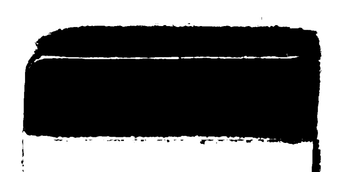
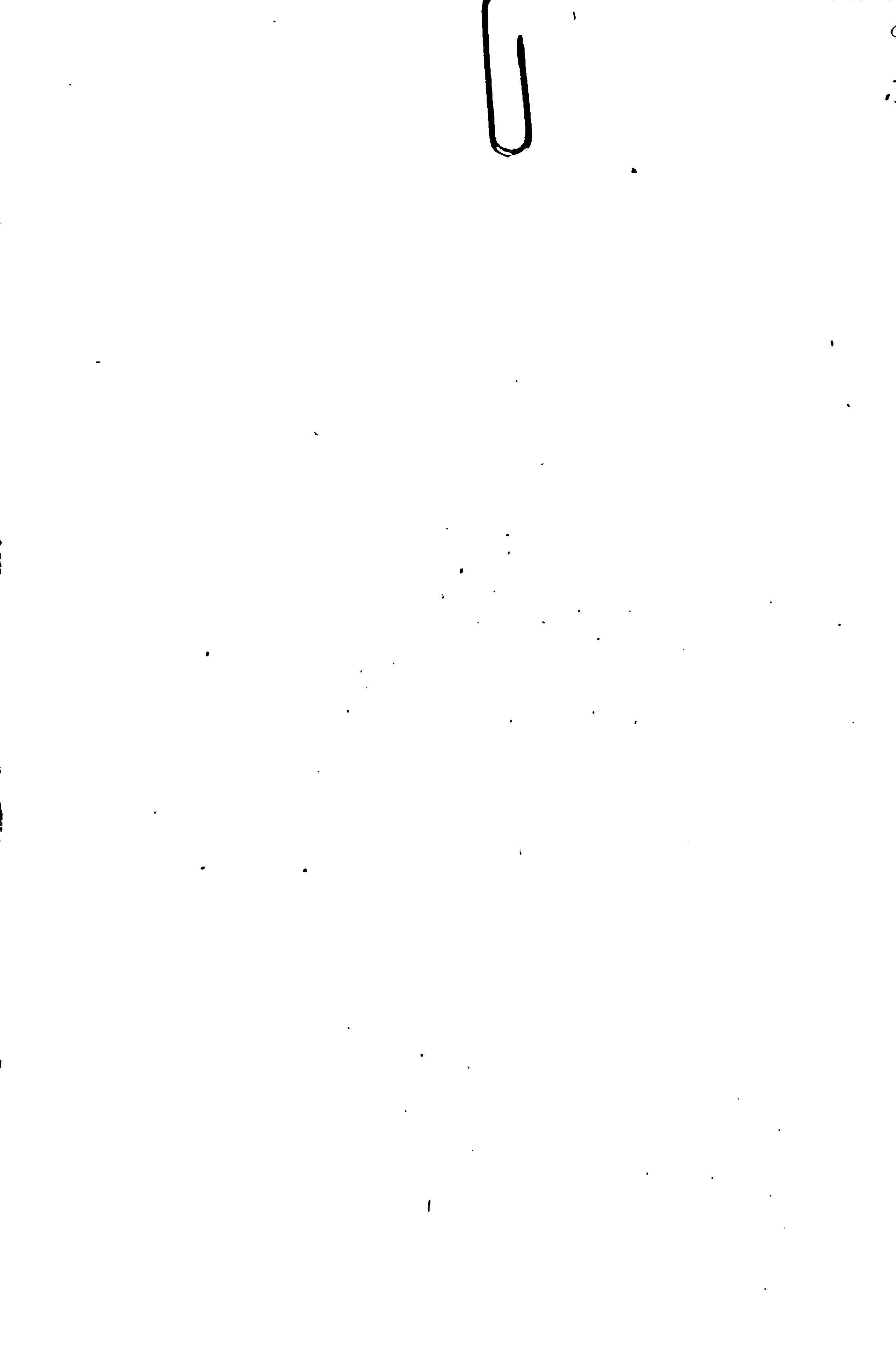
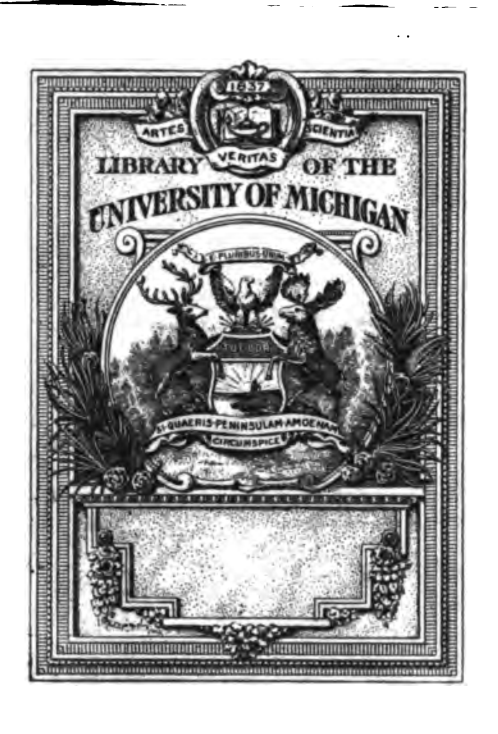
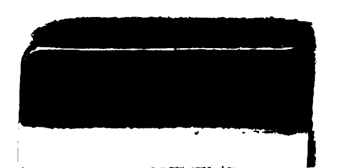





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE





G
1
I



ABHANDLUNGEN

ÜBER DEN

MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND

VERANLASST DURCH DIE INTERNATIONALE
MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION. Deutscher Unterausschuss.

HERAUSGEGEBEN VON

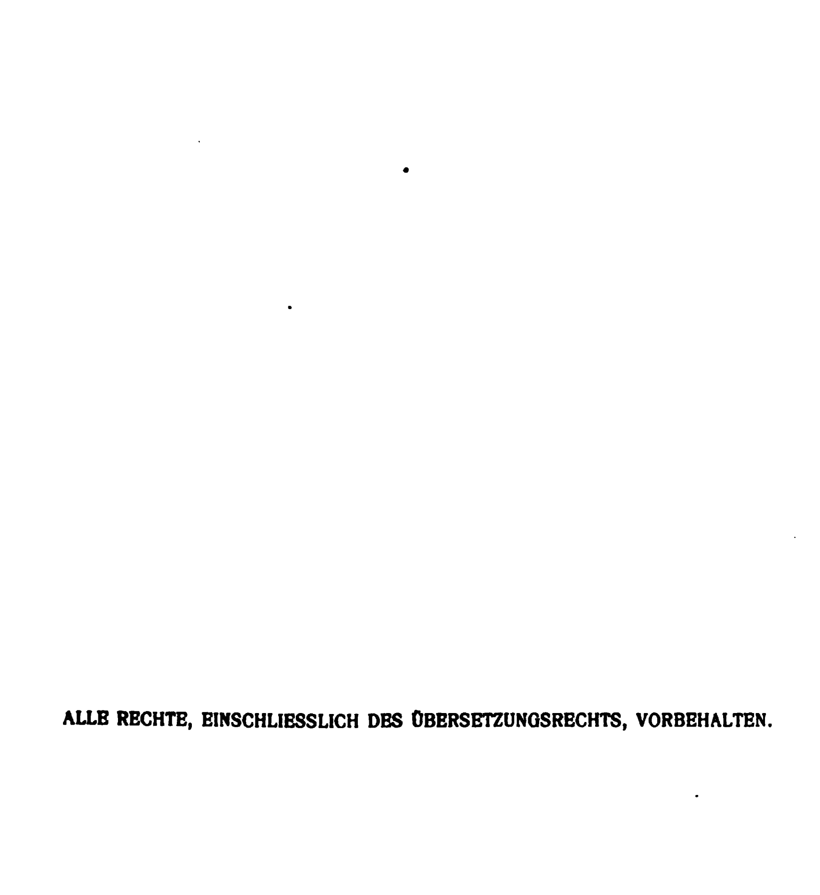
F. KLEIN

ERSTER BAND:

DIE HÖHEREN SCHULEN IN NORDDEUTSCHLAND

MIT EINEM EINFÜHRUNGSWORT
UND EINEM SCHLUSSWORT VON F. KLEIN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913



INHALTSVERZEICHNIS DES ERSTEN BANDES

International commission on the teaching of mathematics.

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND I HEFT 1

STOFF UND METHODE IM MATHEMATISCHEN UNTERRICHT DER NORDDEUTSCHEN HÖHEREN SCHULEN

AUF GRUND DER VORHANDENEN LEHRBÜCHER

VON

DR. WALTHER LIETZMANN
OBERLEHRER AN DER OBERREALSCHULE IN BARMEN

MIT EINEM EINFÜHRUNGSWORT VON F. KLEIN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND I HEFT 1

STOFF UND METHODE IM MATHEMATISCHEN UNTERRICHT DER NORDDEUTSCHEN HÖHEREN SCHULEN AUF GRUND DER VORHANDENEN LEHRBÜCHER

VON

DR. WALTHER LIETZMANN
OBERLEHRER AN DER OBERREALSCHULE IN BARMEN

MIT EINEM EINFÜHRUNGSWORT VON F. KLEIN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909

Zur Einführung.

In den beteiligten Kreisen dürfte es hinreichend bekannt sein, daß auf dem IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom, Ostern 1908, die Einsetzung einer Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (I. M. U. K.) beschlossen wurde, die den Auftrag erhielt, einen vergleichenden Bericht über den Stand des mathematischen Unterrichts in allen Kulturländern auszuarbeiten. Zentralorgan dieser Kommission, deren Vorsitz der Unterzeichnete übernahm, ist die Zeitschrift „L'Enseignement Mathématique", deren Herausgeber, Herr Prof. Fehr in Genf, als Generalsekretär der Kommission fungiert; die Unterkommissionen aber, die in den einzelnen Ländern gebildet wurden, veröffentlichen ihre Vorarbeiten wie auch laufende Mitteilungen über den Stand des Unternehmens in unabhängiger Weise, wie es ihnen gerade zweckmäßig erscheint.

Die Deutsche Unterkommission, deren Mitglieder weiterhin noch besonders genannt werden, hat sich in letzterer Hinsicht ursprünglich darauf beschränkt, in der von Herrn Schotten herausgegebenen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht eine fortlaufende Rubrik einzurichten: Berichte und Mitteilungen veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Diese können auch gesondert bezogen werden. Der Leser findet dort alle Nachrichten über die Organisation der I. M. U. K. und die von ihr in die Hand genommenen Arbeiten; auch kürzere Berichte über einzelne Zweige des mathematischen Unterrichts werden dort veröffentlicht).*

Inzwischen zeigte es sich bald, daß das durch den selbstlosen Eifer zahlreicher Mitarbeiter zusammenkommende wertvolle Material, das alle Gebiete des mathematischen Unterrichts in Deutschland umfaßt, innerhalb dieser Rubrik nur in summarischer, der Wichtigkeit der Sache

---

**) Bislang erschien G. Noodt, Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen.*

nicht in vollem Maße gerecht werdender Form Platz finden kann. Es ist aber dringend erwünscht, daß die ausführlichen Darstellungen, die sich als das Ergebnis der weit ausgreifenden Studien unserer Freunde ergeben, dem Publikum unverkürzt vorgelegt werden; können sie doch nur dann die volle Wirkung üben, die wir von ihnen im Interesse der Sache erwarten dürfen. Unter diesen Umständen hat sich die Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner in dankenswerter Weise entschlossen, besagte Darstellungen in einem besonderen Unternehmen, den Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission, gesondert herauszugeben.

Das erste Heft dieses neuen Unternehmens, das ich hiermit der Öffentlichkeit unterbreite, dürfte geeignet sein, den „Abhandlungen" von vornherein eine große Zahl von Freunden zu werben; war doch das umfangreiche und für jeden Mathematiker zweifellos außerordentlich wichtige Gebiet, das Herr Lietzmann behandelt, bisher mangels geeigneter Führung so gut wie unzugänglich. Es werden weitere Aufsätze folgen, die nicht minder interessant sind, wobei gelegentlich auch die Beziehungen zu benachbarten Disziplinen und die Fäden, die den Unterricht in Deutschland mit dem in andern Ländern verknüpfen, klargelegt werden sollen. Ein allgemeiner Plan unserer Arbeiten wurde bereits in einem Rundschreiben der I. M. U. K., das im Enseignement Mathématique 1909, S. 193 ff. veröffentlicht ist und demnächst in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht abgedruckt werden wird, bekannt gegeben. Ich komme an dieser Stelle auf die Einzelheiten nicht zurück, um Dinge, die in vollem Flusse sind, nicht vorzeitig festzulegen, vertraue vielmehr, daß das Unternehmen der Abhandlungen, je weitere Kreise es zieht, auch ohne programmatische Einleitung steigende Beachtung im Inlande wie im Auslande bei allen denen finden wird, denen die Entwicklung des mathematischen Unterrichts am Herzen liegt.

Langeoog am 15. August 1909. *F. Klein.*

Die Deutsche Unterkommission der I. M. U. K. besteht auf Grund des von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung bei ihrer Kölner Tagung im September 1908 gefaßten Beschlusses z. Z. aus folgenden Mitgliedern:

1. Delegierte:

F. Klein, Geheimer Regierungsrat, Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weberstr. 3.

P. Stäckel, Geheimer Hofrat, Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe i. B., Stefanienstr. 7.

P. Treutlein, Geheimer Hofrat, Direktor der Goetheschule, Karlsruhe i. B., Gartenstr. 5a.

2. Nationaler Beirat:

A. Gutzmer, Professor an der Universität, Herausgeber des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Halle a. S., Wettinerstraße 17.

F. Poske, Professor, Herausgeber der Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht, Friedenau-Berlin, Fregestr. 71.

H. Schotten, Direktor der Städt. Oberrealschule, Herausgeber der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Halle a. S., Reichardtstr. 19.

A. Thaer, Professor, Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentor, von 1910 ab Herausgeber der Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Hamburg.

W. LIETZMANN

STOFF UND METHODE IM MATHEMATISCHEN UNTERRICHT DER NORDDEUTSCHEN HÖHEREN SCHULEN

AUF GRUND DER VORHANDENEN LEHRBÜCHER

Vorrede.

Der vorliegende von der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission veranlaßte Bericht soll den Lehrstoff und die Lehrmethode des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen Deutschlands zum Gegenstand haben, soweit die Lehrbücher davon ein Bild geben. Er berücksichtigt ganz allgemein die deutschen Verhältnisse, doch wird eine gewisse, durch die berufliche Tätigkeit des Verfassers erklärliche Bevorzugung Norddeutschlands zutage treten. Die Kommission hat weitere Berichte für Süddeutschland und Sachsen in Aussicht genommen.

Die Darstellung erfolgt im großen und ganzen ohne Rücksicht auf die Lehrplanverteilung, die in den verschiedenen Staaten und an den verschiedenen Schularten eine wechselnde ist; über die Lehrpläne und Prüfungsbestimmungen ist ein ergänzender Bericht in Vorbereitung.

Aber auch trotz dieser Einschränkungen ist die Aufgabe noch so umfangreich, die Fülle des Stoffes so erdrückend, daß es unbedingt geboten erschien, sich auf eine Herausarbeitung der allgemeinsten Fragen und auf deren Belebung durch eine Anzahl von Einzelzügen zu beschränken. Der einzelne wird mit der dabei getroffenen Auswahl nicht immer einverstanden sein; er wird vielleicht auch die eine oder andere ihm wichtig erscheinende Tatsache vermissen. Dem kann nur entgegengehalten werden, daß eben eine Grenze gezogen werden mußte, um nicht ins Uferlose zu kommen – sie ist übrigens, glaube ich, eher zu weit als zu eng gewählt, – und daß diese Grenze natürlich nur eine mehr oder weniger willkürliche sein konnte.

Wenn ferner manchem Leser die Darstellung im einzelnen zuweilen etwas weitschweifig erscheinen sollte, so bitte ich in Rechnung zu ziehen, daß die Rücksicht auf den internationalen Zweck der Arbeit an vielen Stellen Ausführlichkeit notwendig machte, wo für den deutschen Leser kurze Andeutungen genügt hätten.

Die vorliegende Zusammenstellung erforderte sehr viel Literatur, noch dazu solche, auf die in den größeren Bibliotheken in der Regel kein Wert gelegt wird. Ich habe daher der Königlich Preußischen Auskunftsstelle des höheren Unterrichtswesens in Berlin und der Direktion des mathematischen Lesezimmers der Universität Göttingen sehr zu danken, daß sie mir ihr

reiches Material zugänglich machten; auch einer großen Zahl von Verlagsanstalten bin ich für die Überlassung von Lehrbüchern zu Dank verpflichtet.

Bei der Korrektur der Arbeit durfte ich mich der gütigen Unterstützung einer großen Anzahl von Herren erfreuen, von Mitgliedern der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission und des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, von nord- und süddeutschen Kollegen. Ihnen allen bin ich für vielfache Anregungen, von denen eine große Zahl dem Berichte noch zugute kommen konnte, zu großem Danke verpflichtet.

Travemünde, im August 1909.

W. Lietzmann.

Inhaltsübersicht.

Anhang.

Erster Teil.

Das mathematische Schulbuch.

1. Verschiedene Arten von mathematischen Schulbüchern.

Um einen Überblick über die verschiedenen Arten mathematischer Schulbücher zu erhalten, ist es vorerst angebracht, ihren Zweck ins Auge zu fassen. Die Ansichten gehen hier weit auseinander, und damit ist sofort eine Quelle großer Mannigfaltigkeit in der mathematischen Schulbuchliteratur gegeben.

1. Allgemein zugestanden wird, daß der vornehmste Zweck des Schulbuches der ist, die häusliche Wiederholung des im Unterricht Durchgenommenen zu ermöglichen und zu erleichtern.

2. Die Benutzung des Schulbuches beim Unterricht selbst wird nur von wenigen verteidigt (selbstverständlich muß stets in irgendeiner Weise der Konnex zwischen Lehrbuch und Unterricht für die häusliche Arbeit zumal des jüngeren Schülers hergestellt werden).

3. Das Schulbuch auch zur Vorbereitung auf den im Unterricht neu durchzunehmenden Stoff unmittelbar zu benutzen, ist heute kaum mehr gebräuchlich.

Handelt es sich bisher um die Verknüpfung von regelmäßiger Schul- und Hausarbeit, so gehen einige Schulbücher in ihren Zielen noch darüber hinaus:

4. Sie wollen es dem Schüler ermöglichen, durch Schulversäumnis entstandene Lücken auszugleichen, wollen also so ausführlich sein, daß sie auch zum Selbstunterricht dienen könnten.

5. Andere wieder wollen an mehr oder weniger zahlreichen Stellen über den Unterricht hinausführen, sie erstreben also die Vollständigkeit, die dem Unterricht meist abgehen muß, oder fügen an geeigneten Stellen Exkurse ein, die an den Schulstoff anschließen, ohne doch ihm anzugehören.

6. Eine große Anzahl von Schulbüchern wendet sich, meist ohne es ausdrücklich zu sagen, ebenso an den Lehrer wie an den Schüler. Ich habe nicht nur die in deutschen Schulbüchern üblichen, oft recht umfangreichen und zuweilen didaktisch wertvollen Vorworte im Auge; es ist schon manches Lehrbuch, wenn auch nicht ganz unverblümt, mehr den Schulamtskandidaten als den Schülern empfohlen worden. Jedesmal wenn neue, dem Unterrichtsbetrieb bisher fremde Gedanken, seien sie nun auf den Stoff oder auf die Methode gerichtet, auftauchen,

sind solche Bücher sogar eine Notwendigkeit. Diese Bücher geben deshalb oft dem Außenstehenden ein besseres Bild von dem wirklichen Schulbetriebe oder doch von den verschiedenen Strömungen in ihm als das ureigentliche Schulbuch.

Ein erster Artunterschied zwischen Schulbüchern wird durch die Bezeichnungen Leitfaden und Lehrbuch (im Sinne von ausführliches Lehrbuch) festgelegt. Der Leitfaden will ausschließlich dem ersten der oben genannten Zwecke dienen. Er gibt das Mindestmaß des Lehrstoffes in knapper Form, die Beweise oft nur in Andeutungen, so daß der Schüler nur in eigener Arbeit an der Hand des Leitfadens den Unterrichtsstoff rekapitulieren kann. In seltenen Fällen werden sogar nur die Sätze selbst ohne Beweis aufgeführt (Feld und Serf[1]); doch ist diese Gepflogenheit wohl nur ein Nachklang einer früheren Zeit, wo der Lehrer die Sätze in der Schule diktierte und der Schüler zu Hause die in der Schule durchgenommenen Beweise ausarbeitete. Der Leitfaden läßt dem Lehrer weiten Spielraum, nach seinem Belieben das Lehrgebäude zu erweitern; zu diesem Zweck findet sich meist reiches Material in Aufgaben, Übungssätzen und dgl. angedeutet. Als typische Vertreter dieser Gattung von mathematischen Schulbüchern nenne ich etwa die Leitfäden von Mehler und Thieme. Bei Thieme steckt zum Beispiel das ganze Apollonische Berührungsproblem in den Übungssätzen.

Dem Leitfaden steht das Lehrbuch gegenüber. Hier will ich etwa als Beispiele von älteren das Lehrbuch von Helmes, von neueren das von Holzmüller anführen. Diese Lehrbücher sind umfangreich und ausführlich genug, um auch all den andern oben namhaft gemachten Zwecken gerecht zu werden. Es wird das Maximum des Lehrstoffes der Schule gegeben, dem Lehrer bleibt die Aufgabe, nach seinem Belieben zu kürzen.

Die Ansichten darüber, ob der Leitfaden oder das Lehrbuch das Richtige sei, sind geteilt; vielleicht erklärt sich die Mehrheit gegenwärtig für den Leitfaden. Man macht vor allem geltend, daß der Leitfaden vom Schüler wirklich eigene häusliche Arbeit fordere, und daß er für den Lehrer insofern günstiger sei, als für ihn das Hinzufügen von Lehrstoffpartien weit leichter sei als das Ausscheiden. Die Mehrzahl der gebräuchlichen Schulbücher hält einen Mittelweg zwischen Leitfaden und Lehrbuch inne. Ich nenne etwa Bork-Nath und Heinrich Müller; sie sind bestrebt, dem Schüler auch die selbständige Ausfüllung gelegentlicher Lücken zu ermöglichen.

Eine zweite Unterscheidung liefern die Begriffe methodisches und systematisches Schulbuch. Das systematische Schulbuch — darunter fällt die Mehrzahl der Leitfäden, aber auch ein Teil der Lehrbücher — gibt den Lehrstoff in seiner endgültigen Form, ohne daß die Art, wie diese Form im Unterricht gewonnen wurde, noch erkennbar

1) Die vollständigen Titel aller im Text angeführten Schulbücher sind dem angehängten Literaturverzeichnis zu entnehmen.

ist, und es gliedert diesen Stoff nach logischen, nicht nach psychologischen Gesichtspunkten.

Das methodische Schulbuch läßt im Gegensatz dazu den im Unterricht verfolgten Gang in seinen Grundzügen erkennen und ordnet auch den Stoff in der Weise an, wie er im Unterricht aufeinander folgt.

Am deutlichsten wird das am Beispiel klar: Das systematische Schulbuch beginnt das Trigonometriepensum mit der Definition der trigonometrischen Funktionen, sei es nun erst für das rechtwinklige Dreieck oder gleich für beliebige Winkel. Anders das methodische Lehrbuch. Da beginnt man etwa (ich folge dem Leitfaden von Schwering) mit der Ableitung der Heronischen Formel für den Dreiecksinhalt, aus der dann Ausdrücke für die Höhen des Dreiecks gefunden werden. Jetzt wird die Sinusfunktion definiert, und mit ihrer Hilfe werden aus den rechtwinkligen Teildreiecken die Winkel des Dreiecks berechnet. Dann wird gezeigt, wie auch eine andere Winkelfunktion, der Cosinus, zum Ziel führt. Dann werden tang und cotg hinzugefügt, und so ist hier das, womit das systematische Lehrbuch beginnt, das Ergebnis eines Gedankenganges, der zugleich die Verwendbarkeit der neueingeführten Begriffe zeigt. Ein zweites Beispiel möge den Gegensatz in der Stoffanordnung beleuchten. Im systematischen Lehrbuch tritt das Quadratwurzelausziehen in der Arithmetik erst auf, nachdem die allgemeine Potenz- und Wurzelrechnung erledigt ist, manchmal sogar bescheiden als Anhang. Eine Rolle spielt sie dann erst wieder später, wenn das Lehrbuch in seinem zweiten Teile die Gleichungslehre behandelt. Ganz anders die Anordnung in einem methodischen Schulbuche. (Ich halte mich jetzt etwa an Holzmüller). Nach Erledigung der Gleichung ersten Grades tritt die rein quadratische Gleichung auf, die Anlaß zum Wurzelausziehen gibt; dann folgt die allgemeine Gleichung zweiten Grades und erst dann allgemeine Potenz- und schließlich auch Wurzelrechnung.

Streng systematische Bücher existieren kaum, ebensowenig streng methodische; die Mehrzahl schlägt auch hier einen Mittelweg ein, so daß also das systematische Lehrbuch mit methodischem Einschlag überwiegt. Als typisches Beispiel dieser Mittelgruppe nenne ich etwa das Lehrbuch von Gille. Man könnte es auf den ersten Blick für ein rein methodisches Lehrbuch halten, weil es in der Behandlung der einzelnen Lehrsätze das heuristische Verfahren andeutet; es steht aber, wie Thaer richtig sagt, „in bewußtem Gegensatz zu den methodischen Werken von Holzmüller und Schwering, es bildet ein in den einzelnen Hauptteilen logisch scharf gegliedertes und durchgeführtes System."

Scheinbar sind die Vorzüge des methodischen Lehrbuches sehr groß; der Schüler kann viel leichter dem im Unterricht eingeschlagenen Gange bei der häuslichen Arbeit folgen; er findet nicht nur einen einzigen Weg durch das Gebiet, sondern Verbindungswege führen von diesem zu jenem Satze, er sieht ein Netz von geometrischen Wahrheiten. „Wichtige Sätze erscheinen gewissermaßen wie die Knotenpunkte eines Eisenbahnnetzes"

(Holzmüller[1])). Der schwerwiegende Nachteil ist aber der, daß ein methodisches Lehrbuch den Lehrer in seiner Bewegungsfreiheit beschränkt. Er muß sich dauernde „Bevormundung gefallen lassen“, sofern er es nicht vorzieht, das eingeführte Lehrbuch möglichst wenig zu benutzen; er muß dem Verfahren des Lehrbuches ganz und gar folgen, „sonst wird es halbe Arbeit“. Schon H. Graßmann sagt in seinem Lehrbuch der Mathematik (1861): Die heuristische Methode, „in einem Lehrbuche, was in den Händen der Schüler ist, zugrunde zu legen, wäre ein ganz verfehltes Unternehmen. Es würde dadurch dem Schüler nicht nur die Repetition erschwert, sondern auch der Lehrer gerade in demjenigen eingeengt werden, was auf die individuellste Weise aus seiner und der Schüler besonderen Begabung und aus der gegenseitigen Beziehung zueinander hervorfließen muß.“ Es ist vielleicht das beste Zeugnis für die eigene Arbeit der Lehrer, daß die systematischen Schulbücher bei weitem überwiegen.

Noch eine Bemerkung sei angefügt: Man hat zuweilen (Holzmüller tut es z. B. in der Vorrede zu seinem Lehrbuch) mit dem Begriff des Systematischen den des streng Wissenschaftlichen (ein in älteren Lehrbüchern recht beliebtes Wort, so sagt z. B. Fülle, Lehrbuch der Stereometrie 1844: „Der Vortrag der Mathematik muß in den obersten Klassen durchaus streng wissenschaftlich sein“) verknüpft; das ist eine durchaus nicht notwendige und, wie heut in der Zeit der Axiomatik wohl gesagt werden kann, für ein Schulbuch auch nicht erfüllbare Verknüpfung. Und, wie schon gesagt, ohne einen methodischen Einschlag geht es nirgends ab, äußere er sich vielleicht auch nur in der – im Gegensatz zu Euklid – methodischen Auswahl und der organischen Anordnung des Stoffes.

Was nun schließlich noch eine äußerliche Arteneinteilung der Schulbücher anlangt, so bildet ein wesentliches Unterscheidungsmoment die Schulgattung, an der das Buch gebraucht wird. Daß die Lehrpläne auch gleicher Schulgattungen in verschiedenen deutschen Staaten sich oft wesentlich unterscheiden, bedingt eine recht buntscheckige Ausgabenreihe, die sich natürlich nur vielbenutzte Schulbücher leisten können. Diese wird womöglich noch vermehrt, wenn, wie das in letzter Zeit bei mehreren Büchern geschehen, eine durchgreifende Neubearbeitung erschienen ist, wobei dann das Stammbuch von konservativen Anstalten weiter beibehalten wird. Ich will all das nur an der in Preußen weitaus am meisten benutzten Aufgabensammlung von Bardey erläutern. Der alte Bardey für Vollanstalten, der zuerst 1871 erschien, liegt heute in 28. Auflage vor. 1900 gaben Pietzker und Presler eine neue Bearbeitung heraus, 1908 erschien davon die 6. Auflage. 1907 hat Lengauer danach eine Ausgabe für Bayerische Mittelschulen (2. Auflage 1909),

1) Vergl. dagegen A. Gille, Unterrichtsfach oder Unterrichtsprinzip. Lehrproben und Lehrgänge. Heft 74 (1903), 17: Für den Schüler „ist es gut, wenn er zunächst eine klare zusammenhängende Bahn, die nach oben führt, vor sich hat. Ist er auf einem freieren Punkte mit größerem Überblick angelangt, dann mag er die Verschlingungen des Netzes schlagen.“

1903 Schiffner und Wagner eine für österreichische Mittelschulen besorgt. Außerdem existiert (2. Auflage 1907) eine Bearbeitung von Seyffarth für Lehrerseminare, eine von S. Jacobi und A. Schlie für Metallindustrieschulen (1908). Für Nichtvollanstalten ließ Bardey die arithmetischen Aufgaben zuerst 1881 erscheinen; die Sammlung deckt sich im Aufgabenmaterial nicht mit der Ausgabe für Vollanstalten. 1905 ist danach die 14. Auflage erschienen. Auch hier haben Pietzker und Presler eine neue Ausgabe besorgt, die 1906 in drei Auflagen vorlag. Für sächsische Realschulen hat H. Hartenstein (8. Auflage 1909) den Bardey bearbeitet, eine Ausgabe, die übrigens auch in Preußen mehrfach eingeführt ist. Infolge des jüngsten Ausbaues der Realschulen Sachsens hat Hartenstein 1907 eine neue Oberstufe hinzugefügt. – Wir haben nicht das komplizierteste Beispiel gewählt, das mathematische Unterrichtswerk von Heinrich Müller umfaßt im Teubnerschen Katalog $6\frac{1}{2}$ Druckseiten.

Im Literaturnachweis am Schlusse dieses Berichtes ist von den Lehrbüchern in der Regel nur eine Ausgabe, meist die umfassendste, angegeben.

Der vorliegende Bericht beschränkt sich auf die höheren Knabenschulen. Die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen[1]) hat in den letzten Monaten das Erscheinen einer ganzen Reihe in der Mehrzahl durchaus „moderner“ mathematischer Lehrbücher für höhere Mädchenschulen zur Folge gehabt. Ich begnüge mich damit, einige von ihnen nur namhaft zu machen. Etwas älteren Datums ist die Arithmetik und Algebra von Otto und Siemon; ganz neu sind das Werk von Crantz und das zur Zeit noch nicht abgeschlossene von Noodt. Von mehreren Lehrbüchern für Knabenschulen sind oder werden Ausgaben für Mädchenschulen besorgt, ich führe an: Heinrich Müller-Mahlert, Knops-Meyer nach Heilermann-Diekmann und Koppe-Diekmann, Behrendsen-Götting.

2. Lehrbuchstatistik.

Es gibt eine ganze Anzahl von Lehrbuchzusammenstellungen, doch nur wenige, die einigermaßen gründlich sind. Aus der allgemeinen mathematischen Literatur erwähne ich den Führer durch die mathematische Literatur von F. Müller[2]), der die Elementargeometrie in einer dem Rahmen des Buches entsprechenden Weise berücksichtigt. Reidt gibt in seiner Anleitung[3]) ein Verzeichnis der wichtigsten Lehrbücher mit kurzer Kennzeichnung einzelner, doch ist diese Liste von dem neuen Herausgeber

1) Vergl. G. Noodt, Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen. Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. II. 1909. Leipzig (Teubner); auch Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 40 (1909), 185.

2) F. Müller, Führer durch die mathematische Literatur. Leipzig. (Teubner.) 1909.

3) F. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. 2. A. von H. Schotten. Berlin. (G. Grote.) 1906.

der 2. Auflage nicht vervollständigt worden. M. Simon erledigt in seiner Didaktik[1]) die Lehrbücher auf drei Seiten, wie er ja überhaupt kein Freund des Lehrbuches ist. Seine Elementargeometrie[2]) enthält dagegen eine reichhaltige Liste von Schulbüchern, jedoch meist ohne nähere Charakterisierung. Eine angenähert vollständige Literaturübersicht über die Elementargeometrie geben die alljährlich erscheinenden Jahresberichte für das höhere Schulwesen von C. Rethwisch (Der letzte ist der 22. Band für 1907.) Die Abschnitte über reine Mathematik hat bis zum Jahre 1903 A. Thaer, bis 1906 J. Tropfke, dann K. Weise verfaßt.

In dem folgenden Berichte verbot es sich von selbst, Vollständigkeit in der Schulbuchliteratur anzustreben. Es sind nicht einmal alle tatsächlich im Schulgebrauch befindlichen Lehrbücher benutzt, dafür allerdings eine große Reihe solcher Lehrbücher, die vielleicht in keiner Schule eingeführt sind. Maßgebend war in erster Linie die Wichtigkeit des Inhalts, erst in zweiter Linie die Verbreitung. Zeitlich ist systematisch bis etwa 1892 zurückgegangen, doch ist eine große Zahl älterer Lehrbücher mit in den Bericht einbezogen, sofern bei ihnen von einem Einfluß auf den gegenwärtigen Unterricht gesprochen werden kann.

Über die zahlenmäßigen Verhältnisse kann man sich ein Bild wenigstens für Preußen verschaffen an der Hand der 1880 und 1890 im Zentralblatt[3]) und der 1900 und 1906 als besonderes Buch von E. Horn[4]) veröffentlichten Listen. Eine vor etwa 10 Jahren von I. W. A. Young gemachte, auf Programmstudien fußende Zusammenstellung[5]) scheidet aus, da die Listen unvollständig sind.

Die Anzahl der verschiedenen, an preußischen Lehranstalten eingeführten Lehrbücher und Aufgabensammlungen ist trotz der äußerst raschen Vermehrung der Anstalten immer geringer geworden; sie betrug (da wegen der verschiedenen Teile und Ausgaben der einzelnen Bücher eine gewisse Willkür in der Zählung bleibt, haben die folgenden Zahlen nur ungefähren Wert):

1880	130	Lehrbücher
1890	132	"
1899	100	"
1906	90	"

Dieses eigentümliche Verhalten erklärt sich aus der Geschichte des Lehrbuches. Als die Lehrbücher immer mehr an Stelle des Diktierens

1) M. Simon, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. 2. A. München. (C. H. Beck.) 1908.

2) — , Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert. Leipzig. (Teubner.) 1906.

3) Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen.

4) E. Horn, Verzeichnis der an den höheren Lehranstalten Preußens eingeführten Schulbücher. 1. A. 1900. 2. A. 1906. Leipzig. (Teubner.)

5) Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 29 (1898), 410.

in Übung kamen, schrieb eben fast jeder Lehrer sein eigenes Lehrbuch. So ist es erklärlich, daß früher sehr viele Lehrbücher und Aufgabensammlungen an nur einer Anstalt eingeführt waren, meist wohl an der Anstalt des Verfassers. Das hat, dank dem Einschreiten der Behörden, stark nachgelassen. Die folgenden Zahlen erläutern das. Die Zahl der nur an einer Anstalt Preußens eingeführten mathematischen Schulbücher betrug:

1880	67	Lehrbücher
1890	73	„
1899	24	„
1906	16	„

Dafür ist die Zahl der Lehrbücher, welche in großer oder sehr großer Anzahl eingeführt sind, entsprechend gestiegen. An mehr als 25 Schulen waren eingeführt:

1880	7	Lehrbücher
1890	10	„
1899	14	„
1906	17	„

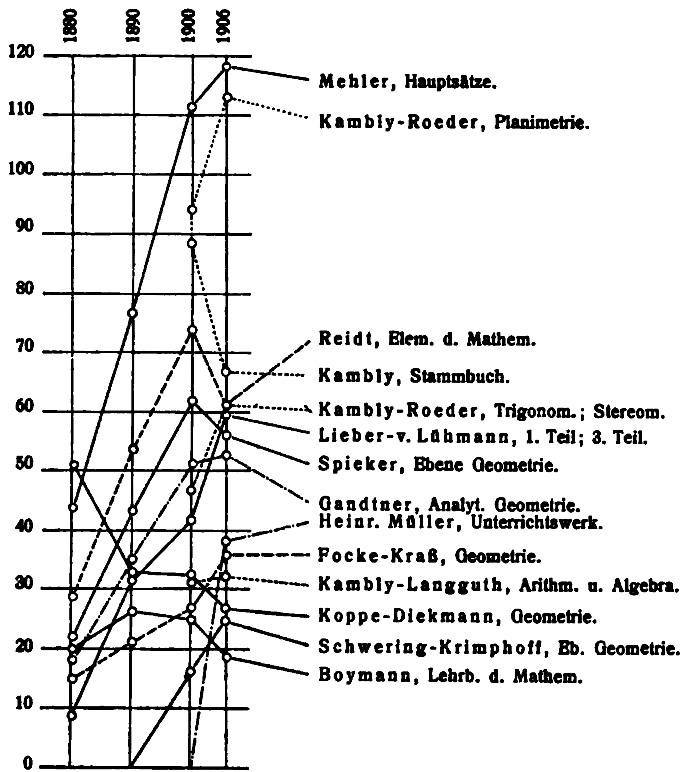
Es ist also sehr deutlich das Streben nach einer gewissen Gleichförmigkeit zu beobachten.

Das beigegebene erste Schema gibt einen Überblick über die zahlenmäßige Verteilung derjenigen Lehrbücher, die irgendeinmal im Laufe der Zeit von 1880 an die Zahl von 25 Anstalten (immer in Preußen!) überschritten haben. Dabei ist ein Buch außer acht gelassen, nämlich der alte Kambly, der 1880 an 217, 1890 an 182 Anstalten eingeführt war (um diese Zahlen einzutragen, hätten wir die Höhe des Schemas verdoppeln müssen!), erst die 1900 auftauchenden Neuausgaben sind nebst dem nun in vernünftigen Grenzen sich bewegenden Stammbuche eingetragen.[1] Für die Darstellung ist in Betracht zu ziehen, daß die absoluten, nicht die relativen — auch die starke Vermehrung der Anstalten in Rechnung ziehenden — Zahlen gegeben sind.

Es sei nur auf ein Moment der Lehrbuchverteilung, das die Tabelle zeigt, hingewiesen, auf den Konservativismus. Nur zwei neuere Werke, das von Schwering-Krimphoff, und dann mit erheblich höheren Zahlen das von Heinrich Müller haben sich im Verlaufe der mehr als 25 Jahre zu den alten gesellen dürfen; Schwering-Krimphoff ist auch das einzige methodische Schulbuch in der ganzen Reihe.

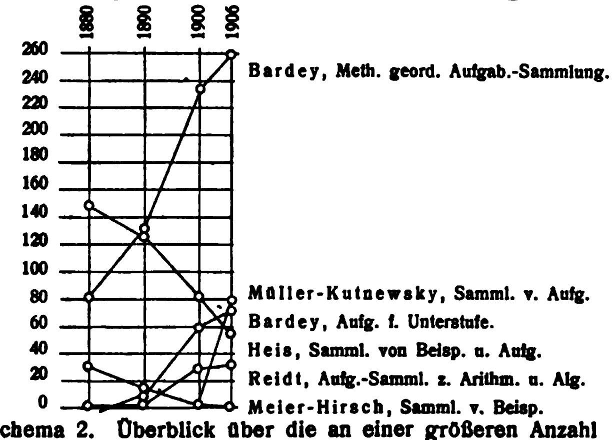
Aus dem starken Übergewicht langeingeführter Lehrbücher ergibt sich, von welcher entscheidenden Bedeutung es für moderne Strömungen im Unterricht sein muß, daß ihre stofflichen oder methodischen Neuerungen Aufnahme in diese herrschenden Bücher finden. Erst dann kann man von dem Durchdringen einer Reformbewegung sprechen, wenn sie auch hier ihren Widerhall findet. Es ist bei alledem nur gut,

1) Von dem Kambly'schen Unterrichtswerk sind nach einer Mitteilung des Verlages bisher über 850000 Exemplare abgesetzt.



Schema 1. Überblick über die an einer größeren Anzahl von Lehranstalten Preußens eingeführten Lehrbücher.

daß auf der andern Seite ein Eingehen auf neue Bestrebungen für solche Bücher eine Notwendigkeit, häufig sogar eine Lebensfrage ist. Verschließen



Schema 2. Überblick über die an einer größeren Anzahl von Lehranstalten Preußens eingeführten Aufgabensammlungen.

sie sich dem Fortschritt, oder geben sie ihm zu spät nach, so sinkt ihr Einfluß, vielleicht zahlenmäßig erst langsam, aber um so stetiger.

Das zweite Schema gibt in derselben Weise und nach denselben Quellen wie bei den Lehrbüchern eine Übersicht über die Aufgabensammlungen. Hier fällt der Abfall von Meier-Hirsch und Heis (des letzteren neue Bearbeitung war 1906 noch nicht erschienen) und das ungeheure Übergewicht der beiden Bardey-Ausgaben in die Augen. Auch hier wieder überrascht die Tatsache, daß nur ein einziges neueres Buch, die Aufgabensammlung von Müller-Kutnewsky, eine große Verbreitung (1906 sogar die zweite Stelle) gefunden hat.

3. Einige allgemeine Bemerkungen über die Lehrbücher.

a. Die Verfasser der Schulbücher sind, man kann sagen ausschließlich, Lehrer der höheren Schulen. Die Zahl der Hochschullehrer, die dem Unterricht an höheren Schulen ein tätiges Interesse entgegenbringen, ist ja bei uns, im Gegensatz etwa zu Frankreich und Italien, sehr gering. Schlömilch, Hauck, Heinrich Weber, Staeckel, Gutzmer, Krause, besonders aber F. Klein wären etwa zu nennen. Allerdings leitet sich, wie es scheint, gegenwärtig dank der Tätigkeit von F. Klein ein Umschwung ein. Immer aber ist noch der Gegensatz zwischen Universitätsmathematik und Schulmathematik ein für die deutschen Verhältnisse kennzeichnendes Merkmal. Das hat seine großen Nachteile. Man hat recht oft den Eindruck, als ob die Lehrbuchverfasser nicht immer Schritt halten mit der Wissenschaft; das Kapitel der Axiomatik ist dafür ein schlagender Beweis. Auf der anderen Seite urteilt aber auch die Universitätsmathematik, soweit sie überhaupt der Schulmathematik Interesse entgegenbringt, zuweilen zu sehr von ihrem modernen Standpunkt aus und zieht nicht genügend den geschichtlichen Werdegang in Betracht. Wenn Heinrich Weber von „dem großen Umfang der Elementargeometrie mit ihren zahllosen Sätzen und Sätzchen über Dreieck und Kreis, Tetraeder und Kugel, die einige wenige projektive Grundgedanken immer wieder variieren und spezialisieren" spricht, so hat er zweifellos vom Standpunkte der modernen Universitätsmathematik, möglicherweise auch einer zukünftigen Schulmathematik recht, aber deswegen hat doch auch diese Seite der gegenwärtigen Mathematik allein schon durch ihr Dasein ihren Wert. –

Um in einem Lehrbuche nicht die Anschauungen eines einzelnen, sondern vielmehr die einer Gesamtheit zu haben, sind Stimmen laut geworden, es durch gemeinsame Arbeit der Lehrer herzustellen. Vor längerer Zeit hat das E. Müller[1]), später dann R. Most[2]) vorgeschlagen, der sogar schon die Entschädigung der jetzigen Lehrbuchverfasser ins Auge faßt. Ist dieser Gedanke auch nie verwirklicht worden, so sind

1) E. Müller, Lehrzweck, Lehrbuch und Lehrmethode im mathematischen Unterricht. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 2 (1871), 192.

2) R. Most, Über den Bildungswert der Mathematik. Pr. Städt. Realgymnasium. Coblenz. 1895.

doch immerhin Lehrbücher mehrfach in der Weise entstanden, daß sich mehrere Fachlehrer einer Anstalt zusammengetan und in gemeinsamer Arbeit oder an der Hand einer von einem Kollegen verfaßten Vorlage einen Leitfaden zusammengestellt haben.

Noch eine Bemerkung über die Verfasser der Schulbücher. Jedes in vielen Auflagen verlegte Schulbuch hat seine Geschichte, und die heute vorliegende Gestalt ist nicht lediglich durch den einstigen Verfasser, sondern meist durch eine längere oder kürzere Reihe von Bearbeitern und alles das wieder unter dem Einfluß der Zeitströmungen geschaffen. Wir sagten schon oben, daß diejenigen Bücher die meistverbreiteten sind, welche am unpersönlichsten auftreten, während sich ganz im Gegenteil dazu der Fortschritt meist an stark individuell gefärbte Bücher knüpft.

Verkehrt wäre es auch, von dem Lehrbuch eines Schulmannes auf seinen Unterricht schließen zu wollen. Baltzers bekanntes Lehrbuch läßt z. B. durchaus nicht erkennen, daß die Beweisführung in seinem Unterricht durchaus analytisch, seine Lehrmethode heuristisch war. Noch mehr aber ist es verfehlt, nach dem eingeführten Lehrbuch den Unterricht in der betreffenden Anstalt beurteilen zu wollen, „weil es bis jetzt wenigstens noch eine große Anzahl Männer gab, die ihren eigenen Gang durchdenken und befolgen konnten“ (Simon). – Dort, wo man z. B. einen den heutigen Reformbestrebungen durchaus entsprechenden Unterricht – und zwar vielleicht mit der Genehmigung der Behörden – erteilt, wird in der Regel ein althergebrachtes Lehrbuch im Bücherverzeichnis aufgeführt, das im Unterricht nur benutzt wird, um den Schüler gelegentlich einmal auf einzelne Sätze oder Aufgaben hinzuweisen.

b. Die Lehrbuchsprache. Die Lehrbuchsprache ist im wesentlichen die des Unterrichts, doch noch knapper als diese; oft wird die Kürze bis aufs äußerste getrieben. Mit der Kürze ist manche sprachliche Ungenauigkeit verknüpft. Pietzker[1]) und neuerdings besonders Schlesinger[2]) haben auf Unrichtigkeiten in dieser Hinsicht hingewiesen, und ihre Bemerkungen haben vielfach eine sprachliche Durchsicht der Lehrbücher bei Neuauflagen zur Folge gehabt. Auch ein Einfluß der auf möglichste Vermeidung der Fremdwörter gerichteten Bestrebungen des „Deutschen Sprachvereins“ ist mehrfach festzustellen[3]), gehen doch einige so weit, Bezeichnungen wie Hypotenuse (= Spannseite) und Kathete (= Lotseite) auszumerzen.

c. Schließlich noch einige Worte über das geschichtliche Element im Lehrbuch. Forderungen in dieser Hinsicht sind in neuerer Zeit wieder

---

1) F. Pietzker, Logik und Sprachrichtigkeit im mathematischen Unterricht. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. 2 (1896), pg. 2,17.

2) Schlesinger, Über die „reine“ Sprache in den mathematischen Schulbüchern. Pr. Lessinggymnasium. Berlin (No. 67) 1904.

3) Vergl. z. B. Buchrucker, Über die Sprache der Lehrbücher für Mathematik und Naturwissenschaft. Vortrag auf dem 3. rheinischen Philologentag. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter 6 (1909).

in stärkerem Maße erhoben, sie sind natürlich nicht neu. Die älteren Lehrbücher brachten in dieser Hinsicht recht viel; ich nenne vor allem Helmes, aber auch das Verdienst Baltzers ist ja bekannt. Heute hat selbst ein Leitfaden gelegentliche Anmerkungen, zumal Zahlenangaben über einzelne Mathematiker. Leider wird aber vielfach über Ungenauigkeit in den Angaben geklagt, manche Versehen z. B. in der Geschichte der mathematischen Zeichen, seien aus den Lehrbüchern nicht auszutilgen. Der Lehrer wird oft selbst zu Cantors Geschichte der Mathematik[1]) greifen, die in vielen Lehrerbibliotheken vorhanden ist. Für seinen Privatgebrauch wie geschaffen ist J. Tropfkes Geschichte der Elementarmathematik[2]), die bis auf die Quellen zurückgeht. Wenn eine allmähliche Besserung im Verhältnis der Schule zur Geschichte der Mathematik sich anbahnt, so ist es nicht zum wenigsten ein Verdienst des Buches von Tropfke. In den Händen manches Schülers wird sich die kleine Geschichte der Mathematik von Sturm[3]) aus der Sammlung Göschen finden.

Wenn wir im folgenden unsere eigentliche Aufgabe, Stoff und Methode im mathematischen Schulbuch, in Angriff nehmen, so ist eine Bemerkung vorauszuschicken. Es ist versucht worden, dem Tatsachenmaterial gegenüber eine möglichst objektive Stellung einzunehmen. Das ist eine schwierige, oft nicht vollständig erfüllbare Aufgabe, und so wird wohl manchmal die Ansicht des Berichterstatters sich unerwünscht vordrängen. Aber das Bestreben lag jedenfalls vor, so objektiv wie möglich zu sein. Was herauskommt, wenn man durchaus subjektiv urteilt, ersieht man aus den Urteilen zweier bekannter Kritiker, es sind Simon und Thaer, über ein und dasselbe Buch; dem einen ist es „eine dürftige Leistung“, dem andern „vereinigt es in sich eine so große Menge von Vorzügen, daß es rückhaltlos empfohlen werden kann.“

Und noch ein Bekenntnis: Es war natürlich nicht möglich, alle die hier berücksichtigten Lehrbücher — zu denen noch eine große Anzahl anderer im Literaturverzeichnis nicht genannter Bücher kommen — für den Zweck dieses Berichts von Anfang bis zu Ende durchzulesen, das hätte eine Zeit von mehreren Jahren erfordert, die zudem meines Erachtens schlecht angewandt wäre. Denn schließlich ergibt auch die genaue Lektüre noch nicht das richtige Bild von einem Lehrbuch, sondern erst ein Unterrichtsversuch an der Hand des Lehrbuches — und das bei allen durchzuführen, wäre für den einzelnen unmöglich. So habe ich mich in vielen Fällen damit begnügen müssen, die Bücher nach ihren charakteristischen Merkmalen durchzusehen, ohne auf die Einzelheiten einzugehen.

1) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. I. Bd. 3. A. 1907. II. Bd. 2. A. 1900. III. Bd. 2. A. 1901. IV. Bd. 1908. Leipzig (Teubner).

2) J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik. I. Bd. 1902. 2. Bd. 1903. Leipzig. (Veit & Co.)

3) A. Sturm, Geschichte der Mathematik Leipzig. (G. J. Göschen.)

Zweiter Teil.

Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie.

4. Propädeutik des geometrischen Unterrichts.

Daß dem eigentlichen Geometrieunterricht eine Vorstufe, ein sogenannter propädeutischer Unterricht vorangehen soll, ist eine in Deutschland schon frühzeitig erhobene Forderung, wenngleich die Meinungen darüber auseinandergehen, welche Zeit dieser Propädeutik einzuräumen ist. So bestand in Preußen nach dem Lehrplan von 1882 ein propädeutischer Unterricht in Quinta; 1892 ließ man ihn fallen; die neuesten Lehrpläne sind einer Propädeutik wieder günstiger, wenngleich ihr (an den Gymnasien) nur der erste Teil des Quartapensums zugestanden ist.

Wenn auch Simon in seiner scharf zugespitzten Weise gesagt hat: „Ein Lehrbuch in der Quarta halte ich für ein Verbrechen an den Schülern", so geben doch fast alle Lehrbücher einen kleinen Leitfaden für diese Vorstufe; daß die Einleitung sich in der Weise Euklids nur auf Begriffserklärungen beschränkt (Bahnson), steht heute fast vereinzelt da. Besonders eine gewisse Gruppe von Lehrbüchern, die durch eine allmähliche Überleitung von der induktiven Methode zur deduktiven charakterisiert ist, geht recht ausführlich auf die Propädeutik ein. Immerhin sind die meisten Darstellungen dieser Leitfäden, und ihnen schließen sich einige kurze, nur auf Definitionen und Aufgaben sich beschränkende selbständige Propädeutiken (z. B. Musmacher, Köstler und das ältere Buch von Diekmann — 1. Teil —) an, kaum geeignet, dem Außenstehenden ein vollständiges Bild von Zweck und Methode dieses Unterrichts zu geben. Gute Richtlinien gibt die Anleitung von Reidt[1]) und eine Anzahl ausführlicher Lehrbücher[2]).

Reidt gibt als Hauptaufgabe des propädeutischen Unterrichts an, „daß er die Schwierigkeiten beseitigen soll, welche der Eintritt in den wissenschaftlichen Unterricht den Anfängern bietet". Dieser Hinweis auf das Wissenschaftliche ist durch Reidts Auffassung vom Zweck der Mathematik überhaupt bedingt. Er betont, wie die Älteren es meist taten, fast nur den formalen Zweck und daneben die Heranbildung der Raumanschauung. Welche Stellung man nun auch zu dieser Frage nimmt,

---

1) l. c. pg. 175 ff.

2) Vergl. auch: M. Nath, Zur Methodik des geometrischen Anfangsunterrichts. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 36 (1905), 1.

man wird jedenfalls als erste Aufgabe der Propädeutik anzusehen haben: die Gewinnung der geometrischen Gebilde unter Anknüpfung an die Anschauungen des Schülers. Das Extremste, was in solcher Anknüpfung an die Anschauungen des Schülers geleistet werden kann, ist wohl die Raumlehre von Martin und Schmidt, die allerdings mehr für niedere Schulen bestimmt ist. Sie ist ein Beispiel für die Methode der „Formengemeinschaften". Es wird im ersten Heft vom Wohnort (Haus, Kirche, Dach, Turmuhr, Kirchenfenster) ausgegangen, im zweiten handelt es sich um Wald und Feld, im dritten um „Kulturstätten". (Z. B. wird an den Wandarm die Lehre vom Dreieck und den ein- und anbeschriebenen Kreisen, an den steinernen Sockel das Kubikwurzelziehen, an die Waschwanne die Behandlung der Ellipse angeknüpft.) Soweit auszuholen ist sonst nirgends üblich. Meist geht man von einem speziellen Körper, in der Regel vom Würfel aus (z. B. Holzmüller in seiner vorbereitenden Einführung u. v. a.). Nur selten ist das erste betrachtete geometrische Gebilde ein solches der Ebene; aber auch dann werden in diesem Gebiete meist ebene und räumliche Gebilde gemeinsam herangezogen; das zeige etwa an der Hand der Kapitelüberschriften der Lehrgang von Börner: Gerade, Kreislinie, Winkel, Würfel und Quadrat, das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck, die Symmetrie, Rhomboëder und Rhombus usf. Abweichend davon beschränken sich Diekmann, Dobriner und Lesser ganz auf die Ebene; Lesser bevorzugt die Ausführung ebener Zeichnungen. Dobriner gibt ein Kapitel über Kongruenz, in dem er durch Bewegung der Figuren Winkel, Strecken, Dreiecke usf. zur Deckung bringt und daraus – rein anschaulich – Sätze gewinnt.

Heute, wo der Lehrplan besonders an den Gymnasien für die Propädeutik nicht mehr soviel Zeit vorsieht wie früher, geht man meist sehr schnell von räumlichen zu ebenen Gebilden über (vergl. z. B. Reishaus, Vorschule). Immerhin zeigt die umfangreiche Einführung von Holzmüller, deren Stoff natürlich nur zur Auswahl in Frage kommt, wieweit einige zu gehen wünschen, begegnen wir doch hier schon dem Ikosaëder, „einigen Durchdringungen", ja sogar dem einschaligen Rotations-Hyperboloid.

Nach einer Seite hin hat die Propädeutik eine Weiterbildung erfahren. Man benutzt neuerdings immer mehr auch bewegliche Körper im Unterricht, man stellt demnach, wie Wienecke sagt, neben die bloße „Betrachtung" die „Beobachtung". Dann wird man aber nicht nur mit zeichnerischen Darstellungen der Körper sich begnügen und mit einigen starren Modellen auf dem Katheder, sondern wird die Tätigkeit der Schüler selbst zu Hilfe nehmen. Hierher gehört die Herstellung von Körpermodellen auf Grund von Netzzeichnungen, das Kneten von Körpern, das Papierfalten, das allerdings sich nirgends der weitgehenden Ausbildung erfreut wie etwa in Youngs Kleinem Geometer[1]), immerhin aber bei axialer

1) G. C. Young u. W. H. Young, Der kleine Geometer. Deutsch von S. u. F. Bernstein. Leipzig. (Teubner.) 1908.

Symmetrie oft angewandt wird. Hier greifen auch die Bestrebungen ein, einen fakultativen Handarbeitsunterricht an den höheren Schulen einzurichten.[1]) Als Beispiel, wie die Tätigkeit des Schülers im kleinen herangezogen wird, will ich einiges von der ersten Seite der Waltherschen Geometrie anführen. Da heißt es: Führe den Zeigefinger um die Ränder eines Heftes, längs der Tischkante, um einen Hutrand: Er beschreibt eine Linie. Zeige gerade und krumme Linien im Zimmer; zeichne sie in der Luft mit dem Finger nach. Bilde aus einem Bindfaden einen Kreis, eine Wellenlinie; spanne ihn zu einer geraden Linie aus. Schreite im Zimmer eine gerade Linie ab. Lege drei Federn nebeneinander in gerader Linie usf.

Zu einem Verständnis geometrischer Gebilde gehört auch, daß man sie zu messen versteht, daß man sie als Größen erkennt. Der Begriff der Größe ist für den Anfänger nicht etwas Selbstverständliches, und wenn in vielen Lehrbüchern der erste Satz gleich heißt: „Die Geometrie ist derjenige Teil der Mathematik, welcher die Lehre von den Raumgrößen umfaßt," so ist das ohne vorangegangene häufige Messungen der verschiedensten Art von Raumgrößen für den Schüler ein Satz ohne Inhalt. Recht vorteilhaft ist es, wenn sich hier der Mathematikunterricht auf den Rechenunterricht stützen kann, wenn der Schüler bereits von früh an beim Rechnen mit den üblichen Maßen praktisch vertraut ist. Wieweit man dann noch im propädeutischen Unterricht der Geometrie zu gehen hat, ob man z. B. mit Holzmüller bis zum Pythagoräischen Lehrsatz – natürlich rein durch Anschauung und praktisches Ausmessen gewonnen – vorgeht, ist bedingt durch die Verhältnisse insbesondere durch die vom Lehrplan zur Verfügung gestellte Zeit und wesentlich durch die Ansicht des Lehrers.

Von der Mehrzahl der Unterrichtenden wird nun dem propädeutischen Unterricht noch ein zweites Ziel zugeschrieben, er „muß allmählich die Methode ausbilden und sich im Verlaufe des Unterrichts immer mehr und mehr der strengen mathematischen Form anzuschließen bestrebt sein, so daß zwischen Einführungskursus und wissenschaftlichem Unterricht keine scharfe Grenze vorhanden ist, sondern ein unmerklicher Übergang stattfindet" (Börner). Nach dieser Anschauung hat also der propädeutische Unterricht auch die Aufgabe, die Schüler zu der spezifisch deduktiven Methode der Mathematik allmählich heranzuziehen, ihnen schrittweis eine Vorstellung von der Notwendigkeit und Nützlichkeit des mathematischen Beweises zu verschaffen und sie gleichzeitig mit dieser Methode vertraut zu machen. Wie man sich zu diesem Ziel der Propädeutik stellt, das ist wesentlich bestimmt durch die Auffassung, die man von der Rolle der Grundlagen in der Schule hat.

---

1) Vergl. darüber z. B. K. Giebel, Die Handarbeit in den höheren Knabenschulen. Pr. Oberrealschule Zeitz. 1909.

5. Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht.

Beim Beweisen, d. h. bei der Zurückführung eines Lehrsatzes auf vorhergehende Lehrsätze, kommt man, wenn man irgendwo einmal anfangen will, auf Grundsätze, die man nicht mehr beweisen, d. h. auf frühere zurückführen, sondern als Ausgangspunkt wählen will, und ähnlich kommt man bei den Definitionen auf Grundbegriffe. Es ist noch eine andere in Hilberts Grundlagen[1]) zum Ausdruck kommende Auffassung möglich, daß nämlich die Grundbegriffe durch ein System von Grundsätzen festgelegt werden. Diese letztere Anschauungsweise kommt in den Schulbüchern, soweit ich sehe, nirgends deutlich zum Ausdruck, wir können also von ihr absehen. Über die den Schulbüchern zugrunde liegenden Anschauungen von den geometrischen Grundbegriffen gibt die vergleichende Planimetrie von H. Schotten[2]) eine bis 1890 reichende, ziemlich erschöpfende Übersicht.

Was nun in dieser Hinsicht die wirkliche Praxis des Lehrbuches anlangt, so ist zunächst auf den bei den meisten Lehrbüchern (eine Ausnahme machen z. B. der Leitfaden von Mehler in der neuen Bearbeitung von Schulte-Tigges, das Unterrichtswerk von Heinrich Müller, Bensemann) grassierenden „Einleitungsunfug" hinzuweisen. Da werden zunächst mehr oder weniger klare und ausführliche Begriffsbestimmungen gegeben dessen, was Wissenschaft, was Mathematik ist, was Geometrie, was ein Lehrsatz, ein Beweis, eine Konstruktion ist. Warum nicht gleich mit einem Abriß der formalen Logik beginnen? fragt da Bensemann mit Recht. Da lesen wir z. B. (Spiekers Geometrie) „der Forderungssatz (Postulatum) verlangt, etwas herzustellen, von dem nicht gezeigt zu werden braucht, wie es geschieht, denn das Verlangte gehört zu den unmittelbaren Grundvorstellungen", während sich doch der Schüler sagt, daß er unbedingt darüber unterrichtet werden muß, wie er mit Zirkel und Lineal umzugehen hat.

Was nun die Grundbegriffe selbst anlangt, so sind die Fälle, wo wie in einem alten Lehrbuche von K. W. Wiecke gesagt wird: „Jeder Mensch weiß, was Raum ist", oder wie in J. Helmes Elementarmathematik: „Die Gerade läßt sich nicht definieren" recht selten. Wohl durchgängig wird vom Raum ausgegangen, der Körper als begrenztes Stück des Raumes, die Fläche als Grenze des Körpers, die Linie als Grenze einer Fläche, der Punkt als Grenze einer Linie definiert bzw. beschrieben. Das steht in direktem Gegensatze zu jener Richtung der modernen Axiomatik, die umgekehrt vom Punkte ausgeht, dann die Gerade und die Ebene als neue Gebilde hinzunimmt oder die letztere oder auch beide vom Punkt aus definiert und schließlich die Begriffe Linie, Fläche durch

1) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. 3. A. Leipzig. (Teubner.) 1909.

2) H. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. 1. Bd. 1890. 2. Bd. 1893. Leipzig. (Teubner.)

einen Grenzprozeß aus den Ausgangsgebilden gewinnt. – Zuweilen wird in der Schulmathematik noch hinzugefügt „jeder Teil einer Linie, auch der kleinste, ist wieder eine Linie ... die Linie besteht daher nicht aus Punkten, ... obgleich in der Linie beliebig viele Punkte ... gedacht werden können". (Spieker, ähnlich Boymann, Kambly, Kambly-Roeder.) Hier gilt dann auch: „Jede Fläche im Raume, jede Linie in der Fläche, jeder Punkt in der Linie hat zwei Seiten"; man verzichtet also von vornherein auf einseitige Flächen u. dgl.

Eine bemerkenswerte Ausgestaltung hat Holzmüller diesem Kapitel in seinem Methodischen Lehrbuch gegeben. Bei den Grundbegriffen spielt schon überall das Unendliche hinein. Er warnt nun durch geeignete Beispiele vor voreiligen Schlüssen in dieser Richtung. Er bemerkt z. B., daß es mathematische Körper gibt, „die bis ins Unendliche reichen und doch einen endlichen, genau bestimmbaren Inhalt haben". Sein Beispiel dafür ist das folgende: Eine senkrechte quadratische Säule von 1 qm Grundfläche und 2 m Höhe wird in Schichten zerschnitten, derart, daß die Höhe der einzelnen Säulen 1, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$, ... m ist. Die Anzahl dieser Schichten ist unendlich groß. Legt man jetzt diese Schichten statt übereinander in eine Reihe nebeneinander, so hat man einen bis ins Unendliche reichenden Körper, der doch den endlichen Inhalt von 2 cbm hat. – Es ist klar, daß derartige Beispiele – und Entsprechendes gilt für den Abschnitt über die Grundbegriffe allgemein – nicht gleich für den ersten Unterricht bestimmt sind, man darf eben beim mathematischen Schulbuche nicht „gleich von vorne anfangen" wollen.

Bezüglich der abgeleiteten Begriffe ist wieder auf Schottens Vergleichende Planimetrie zu verweisen. Man hat bekanntlich lange und heute noch nicht abgeschlossene Diskussionen über verschiedene Begriffe, beispielsweise den Winkel, geführt. Andere Begriffe haben bei den verschiedenen Verfassern verschiedene Bedeutung, ich nenne als Beispiel den Begriff der ebenen Figur. Die enger Definierenden verstehen darunter nur die geschlossene Figur der weiter Definierenden.

Auf die Frage, wie der Unterricht die Axiome einführen soll, scheinen mir[1]) drei Antworten möglich:

1. Den Schülern wird ein vollständiges Axiomensystem geboten.
2. Man stellt die Axiome nicht auf, gibt vielmehr ihren Inhalt in dem propädeutischen Kurs.
3. Man sucht sich einige Axiome heraus, die man besonders als solche ausspricht.

1) W. Lietzmann, Eine französische Rundfrage über den geometrischen Anfangsunterricht. Pädagogisches Archiv. 50 (1908). – Über die im folgenden vergleichsweise herangezogenen außerdeutschen Länder vergleiche man z. B. den Anhang in F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil II. Geometrie. Ausgearbeitet von E. Hellinger 1909. Leipzig. (Teubner). Speziell über Italien unterrichtet der dort zitierte Aufsatz von W. Lietzmann, die Grundlagen der Geometrie im Unterricht (mit besonderer Berücksichtigung der Schulen Italiens). Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 39 (1908), pg. 177.

Im Falle 2 und 3 sind dann 3 Arten des weiteren Fortschreitens im Unterricht möglich, entweder man geht a) rein deduktiv, b) vom Induktiven allmählich zum Deduktiven überführend, c) (das kommt nur für 2 in Betracht) auch weiter rein induktiv vor.

Fall 1, der in Italien fast die Regel bildet, in Frankreich sich z. B. bei Méray[1]), in Amerika bei Halsted[2]) findet, kommt bei uns meines Wissens in keinem geometrischen Schulbuch vor. Das jüngst als Ersatz für den alten Baltzer erschienene Lehrbuch von Thieme[3]), das ein vollständiges Axiomensystem enthält, ist für den Lehrer bestimmt. Da bei uns der Geometrieunterricht sehr früh liegt, wäre ein solcher Lehrgang auch nicht möglich. Die Fälle 2a und 3a dürften heute in Praxis und Lehrbuch die häufigsten sein, die Anhänger der Reformbewegung neigen zum größten Teil 2b, wohl auch 3b zu; der Weg 2c, den z. B. Perry in seinem für Arbeiter geschriebenen Practical Mathematics einschlägt, kann zwar für Primärschulen und Fachschulen eine gewisse Berechtigung haben, dürfte aber für unsere höheren Schulen nicht in Betracht kommen.

Es ist nötig, noch einen Augenblick bei der Auswahl von Axiomen, welche die Gruppe 3 trifft, zu verweilen. Man hat leider nur zu oft den Eindruck, daß die Verfasser nicht mit der Entwicklung der modernen Axiomatik vertraut sind. Das zeigt meines Erachtens auch recht deutlich ein Aufsatz von Wolff[4]), der eine Zusammenstellung solcher Axiomenauswahlen gibt. In der Tat sind J. Frischauf[5]), absolute Geometrie nach J. Bolyai, Paschs Vorlesungen über neuere Geometrie[6]), Stäckel und Engel, Theorie der Parallellinien[7]), fast gar nicht, Hilberts Grundlagen erst sehr spät in weiteren Lehrerkreisen bekannt geworden, obwohl doch alle diese Werke für eine Orientierung über diese Fragen außerordentlich gut geeignet waren. Erst neuerdings lassen Werke, wie die Enzyklopädie der Elementarmathematik von Weber-Wellstein[8]), die Bücher von Bonola-Liebmann[9]), von Thieme[10]), die Elementar-

---

1) Ch. Méray, Nouveaux Éléments de Géométrie. 3. Éd. Dijon. (Jobard.) 1906.

2) G. B. Halsted, Rational Geometry. New-York. 1904.

3) H. Thieme, Die Elemente der Geometrie. Aus: Grundlehren der Mathematik. 2. Teil. 1. Bd. Leipzig. (Teubner.) 1909.

4) Über die Grundlagen unserer Schulgeometrie. Lehrproben und Lehrgänge 1908. Heft 1.

5) J. Frischauf, Absolute Geometrie nach Joh. Bolyai. Leipzig. (Teubner.) 1872.

6) M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig. (Teubner.) 1882.

7) P. Stäckel und F. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß. Leipzig. (Teubner.) 1895.

8) H. Weber und J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik. 1. Band: Enzyklopädie der elementaren Algebra und Analysis. 2. A. 1906. 2. Band: Elemente der Geometrie. 2. A. 1907. 3. Band: Angewandte Elementar-Mathematik 1907. Leipzig. (Teubner.)

9) R. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie. Deutsch von H. Liebmann. Leipzig. (Teubner.) 1908.

10) Vergl. die eben zitierten Elemente der Geometrie.

mathematik vom höheren Standpunkte aus von Klein[1]) einen Umschwung erhoffen.

Sehr viele, ja man kann sagen fast alle Lehrbücher, geben, häufig in der Einleitung, die *κοιναὶ ἔννοιαι* des Euklid; dabei wechselt die Zahl der angeführten (arithmetischen) Axiome sehr stark; bei Sassenfeld sind es nur zwei (zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind sich selbst gleich; Gleiches zu Gleichem addiert oder von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches); dann sind alle Zahlen vertreten bis zu zwölf in Koppe-Diekmanns Geometrie, wo beispielsweise „Gleiches zu Ungleichem addiert gibt Ungleiches" und „Ungleiches zu Gleichem addiert gibt Ungleiches" als verschiedene Axiome ausgesprochen werden.

Die Zahl der geometrischen Axiome ist gleichfalls recht schwankend. Zuweilen findet sich (z. B. bei Koppe-Diekmann) nur das Parallelenaxiom als Grundsatz ausgesprochen, natürlich aus dem Grunde, daß gerade dieses Axiom in der Geschichte der Axiomatik die Hauptrolle gespielt hat. Lieber und von Lühmann folgern das Parallelenaxiom, obwohl sie einige planimetrische Grundsätze anführen, aus einem rein anschaulich gewonnenen Satz. Heinrich Müller spricht das Axiom unmittelbar als (Anschauungs-)Satz aus; dabei ist zu bemerken, daß bei ihm die Bezeichnung als „Satz" formal deshalb berechtigt erscheint, weil er, wie wir später noch auszuführen haben, den Satz von der Winkelsumme im Dreieck vorwegnimmt. Von da aus ließe sich das Parallelenaxiom beweisen; es dann als Grundsatz auszusprechen, wie es z. B. Sassenfelds Hauptsätze tun, erübrigt sich für den, der sich rein auf den systematischen Standpunkt stellt; für den Methodiker kann es trotzdem geboten erscheinen. Kambly-Roeder fügt dem eigentlichen Parallelenaxiom offenbar aus didaktischen Gründen noch den (kinematischen) Grundsatz hinzu: „Wenn man eine Gerade parallel zu sich selbst verschiebt, ändern sich die Winkel, welche sie mit einer anderen Geraden bildet, ihrer Größe nach nicht". Vom Üblichen abweichend ist die Fassung des Axioms bei Boymann; er hat die beiden Axiome: „Schneiden sich zwei Gerade, so läßt sich die eine nicht ohne Drehung in die Lage der anderen bringen" und „Schneiden sich zwei unbegrenzte Gerade, so läßt sich die eine nicht ohne Drehung in eine solche Lage bringen, daß sie die andere nicht mehr schneidet". Focke-Kraß operiert mit dem Axiom: „Wenn eine unbegrenzte gerade Linie durch einen zwischen den Schenkeln eines hohlen Winkels liegenden Punkt gezogen wird, so durchschneidet sie wenigstens einen Schenkel des Winkels". Inwieweit der Richtungsbegriff in den Parallelentheorien der Schulbücher eine Rolle spielt, ist bei H. Schotten eingehend untersucht; hier sei nur als Beispiel der in den Grundlagen allerdings völlig unzuverlässige alte Kambly angeführt, der den Grundsatz anführt: „Wenn

1) F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil II. vergl. das frühere Zitat.

zwei gerade Linien in einer Ebene so liegen, daß sie, wieweit man sie auch verlängere, einander nie schneiden, so haben sie dieselbe Richtung". „Bewiesen" wird das Parallelenaxiom bei H. Seeger, und zwar gibt der Verfasser den Bertrandschen Beweis, der überhaupt mehrfach in ältere Auflagen von Lehrbüchern übergegangen ist.

Die außer dem Parallelenaxiom, das allein wir hier als Beispiel eingehender behandeln konnten, noch besonders ausgesprochenen Grundsätze sind oft wahllos zusammengestellt, ihre Zahl wechselt stark. So findet sich häufig als Grundsatz angeführt (Lieber-von Lühmann und Kambly, der allerdings auf eventuelle Bedenken hinweist), daß zwischen zwei Punkten die Gerade der kürzeste Weg ist. Das sogenannte archimedische Axiom (bei Euklid in einer Definition) wird selten zitiert (Helmes z. B. bringt es unter den arithmetischen Axiomen).

Die Frage, welche Axiome auf der Schule ausdrücklich zu formulieren sind, natürlich vorausgesetzt, daß man überhaupt den Weg 3 einschlägt, hat exakt meines Wissens bisher nur H. Thieme beantwortet. Er sagte in seinem Vortrage auf dem dritten Internationalen Mathematiker-Kongreß[1]: „Im Anfangsunterricht werden wir von den Grundsätzen nur die von Hilbert so bezeichneten der Verknüpfung und das Parallelenaxiom ausdrücklich als solche hinstellen. Von den Axiomen der Anordnung, der Kongruenz und der Stetigkeit werden wir wie bisher zunächst Gebrauch machen, ohne sie besonders aufzuführen".

F. Reidt, H. Schotten und A. Thaer, besonders aber neuerdings Thieme sind nachdrücklich für eine Berücksichtigung der Axiomatik auf der Oberstufe eingetreten[2]. In den Lehrbüchern finden sich in dieser Hinsicht bisher nur ganz geringfügige Ansätze. So bringt Pietzker in seinem Lehrgang einen „Rückblick auf die Grundlagen der Geometrie", in dem aber, trotzdem eine objektive Darstellung versucht wird, doch die bekannte Gegnerschaft Pietzkers zur modernen Axiomatik zum Ausdruck kommt. Schwering und Krimphoff sprechen sich in einer Schlußbemerkung über die Axiomatik aus, führen aber nur drei Axiome an: Der Raum ist dreidimensional, kongruent, eben (im Sinne Riemanns). H. Thieme sagt: „Auf der Oberstufe, bei Gelegenheit des stereometrischen Unterrichts werden wir auf die Notwendigkeit dieser Axiome der Verknüpfung (s. oben) hinweisen. Ein vollständig durchgeführtes exaktes System der Lehren der Geometrie ist auch auf der Oberstufe nicht möglich; die verfügbare Unterrichtszeit ist für näherliegende Dinge notwendig".

Ob auf unseren Schulen auch die nichteuklidische Geometrie Berücksichtigung zu erfahren hat, ist eine noch recht wenig diskutierte Frage. Von Lehrbüchern gehören hierher die Elemente von Simon, welche

---

1) H. Thieme, Wirkung der wissenschaftlichen Ergebnisse auf den Unterricht in der Elementarmathematik. Verhdl. des III. Intern. Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904. Leipzig. (Teubner.) 1905.

2) H. Thieme, Die Umgestaltung der Elementar-Geometrie. Prgr. No. 175. Berger-Oberrealschule Posen 1900.

die absolute Geometrie berücksichtigen; ob dieses Buch mehrfach in der Unterrichtspraxis erprobt ist, entzieht sich meiner Kenntnis. Eine Darstellung des Begriffes der Unabhängigkeit der Axiome ist im Unterricht der Prima sehr wohl möglich[1]), wenn man sich dabei auf einfache Fälle beschränkt, z. B. solche, die sich bei den Axiomen der Verknüpfung ergeben. Für die Diskussion nichteuklidischer Geometrien im Unterricht hat sich A. Thaer ausgesprochen[2]). Dagegen rät Klein (Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus; Bd. II) dringend davon ab, im regulären Schulunterricht (d. h. außer gelegentlichen Andeutungen auf Veranlassung interessierter Schüler) nichteuklidische Geometrie zu bringen.

An dieser Stelle sei kurz auch auf die Verbindung der Mathematik mit der philosophischen Propädeutik hingewiesen. In Preußen sind der philosophischen Propädeutik gegenwärtig keine besonderen Stunden eingeräumt. Damit ist aber nicht gesagt, daß nun die Philosophie ganz aus unseren Schulen verbannt ist. Vielmehr hat jetzt jedes Fach an seinem Teil die Aufgabe, philosophischen Fragen in seinem Gebiete näher zu treten: Die philosophische Propädeutik ist nicht mehr Unterrichtsfach, sie werde also, um einen Ausdruck von Gille[3]) zu gebrauchen, Unterrichtsprinzip.

Hier, wo es sich um die Grundlagen der Mathematik handelt, begnüge ich mich, zwei für Schüler bestimmte Bücher anzuführen, die auf diese Frage eingehen, insbesondere auch auf das Verhältnis deduktiver und induktiver Methode. Das philosophische Lesebuch von B. Schmid[4]) vereinigt eine größere Anzahl Abschnitte aus philosophischen Schriften und ist so recht für den Mathematiker und Naturwissenschaftler zusammengestellt. Von der philosophischen Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage von A. Schulte-Tigges[5]) kommt besonders der erste Teil, die Methodenlehre, in Betracht.

6. Das System.

Wenn die Grundlagen auf irgendeinem Wege gewonnen sind, so baut sich nun darauf ein System von Tatsachen auf, das sich in einzelne, mehr oder weniger genau umgrenzte Kapitel gliedert, die dann

1) W. Lietzmann, Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 39 (1908), pg. 177.

2) A. Thaer, Ist die nichteuklidische Geometrie auf der Schule zu berücksichtigen? Lehrproben und Lehrgänge 61, 1: „Der Primaner muß erfahren, daß Axiome Annahmen sind und nicht Tatsachen!“

3) A. Gille, Unterrichtsfach oder Unterrichtsprinzip? Lehrproben und Lehrgänge. Heft 74 (1903), 17.

4) B. Schmid, Philosophisches Lesebuch. Zum Gebrauch an höheren Schulen und zum Selbststudium. Leipzig. (Teubner.) 1906.

5) A. Schulte-Tigges, Philosophische Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage. 2. A. Berlin. (Reimer.) 1904.

in allen Lehrplänen uns entgegentreten. Ehe wir auf die methodischen Gesichtspunkte eingehen, die bei der Behandlung dieser Tatsachenkomplexe im Unterricht und daher auch im Lehrbuch Anwendung finden, sei eine kurze Kennzeichnung dieser in fast unveränderter Reihenfolge in beinahe allen Schulbüchern wiederkehrenden Abschnitte vorausgeschickt, zunächst soweit sie der Unterstufe angehören. Eine mehr für den Lehrer bestimmte Darstellung des Systems bringt eine ganze Reihe umfangreicherer Werke z. B. von Baltzer, J. C. Becker, Rausenberger, Schlömilch, und die neuen, dem gegenwärtigen Stande der wissenschaftlichen Forschung Rechnung tragenden Elemente von Thieme, die ein vollständiges System der gesamten Elementargeometrie bieten. Von diesen Büchern haben übrigens Baltzers Elemente und Schlömilchs Geometrie des Maßes auch als Schulbücher Verwendung gefunden. Genannt sei ferner V. Schlegel, der in seinem System der Raumlehre den Stoff der Elementarmathematik nach den Prinzipien der Graßmannschen Ausdehnungslehre behandelt, während er in seinem Lehrbuch der elementaren Mathematik „wegen der derzeitigen Schulverfassung" Graßmanns Lehre wieder verläßt, sich aber unter Festhalten am alten Lehrstoff möglichst der neuen Geometrie anpaßt. Eine durchaus moderne Systematik der Geometrie unter Verwendung der Gruppentheorie als Einteilungsprinzip gibt Kleins Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus (Bd. II.) Handelt es sich hier um einen „Gesamtüberblick über das Gebiet der Geometrie", so kann man eine Übersicht über den Stand der Einzelprobleme in der Elementargeometrie an der Hand der sehr umfangreichen Literatur-Zusammenstellung von M. Simon[1]) gewinnen.

An der Spitze des Systems steht die Dreieckslehre. Hier werden etwa Sätze über die Seiten und Winkel des Dreiecks, über Kongruenz und über besondere Arten von Dreiecken (gleichschenklige, rechtwinklige) behandelt.

Die Abhängigkeit des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck von der Parallelentheorie hat drei verschiedene Anordnungen der Sätze zur Folge gehabt.

Schon die älteren Lehrbücher der Mathematik (z. B. Helmes, Wittstein und Kambly) stellten im Interesse eines organischen Aufbaues und Systemes im Gegensatz zu Euklid die Parallelentheorie vor die Dreieckslehre, und danach handelt heute noch fast die gesamte Schulliteratur. Man kann dann die Dreieckslehre sofort mit dem Winkelsatz beginnen.

Später sind einige aus methodischen Gründen wieder zu der Weise Euklids zurückgekehrt; sie bringen die Parallelentheorie erst, nachdem der ganze von ihr unabhängige Teil der Dreieckslehre abgehandelt ist. Der Winkelsatz steht dann ziemlich weit hinten. So treffen wir z. B. in

1) Vgl. die bereits (Abschnitt 2) zitierte Entwicklung der Elementargeometrie.

Thiemes Leitfaden zunächst auf die beiden ersten Kongruenzsätze und das gleichschenklige Dreieck, erst dann auf die Parallelenlehre.

Eine dritte Gruppe geht noch weiter, allerdings auf Kosten der Strenge. Sie beweist den Satz von der Winkelsumme scheinbar ohne Parallelenlehre. Es gibt da zwei Methoden. Die eine bedient sich des sogenannten Thibautschen Beweises. Man läßt etwa einen Schüler von einem Eckpunkt des auf den Fußboden gezeichneten Dreiecks aus auf den Seiten das ganze Dreieck umschreiten. Dann hat er, zum Ausgangspunkt und zur Ausgangsrichtung zurückgekehrt, eine volle Umdrehung gemacht; mit anderen Worten, die Summe der Außenwinkel ist = 4 R. Jetzt läßt sich der gewünschte Beweis leicht erbringen. Dieser Art verfahren z. B. Bensemann, Heinrich Müller und Sassenfeld. Das gleiche Ziel erreicht man mit dem sogenannten Schrumpfungsbeweis, der, wie bei Schwering-Krimphoff, zumeist in Zusammenhang mit dem von Thibaut gebracht wird. Man zeigt dem Schüler, daß es bei dem ganzen Vorgang gar nicht darauf ankommt, wie groß das Dreieck ist, wenn nur die Winkel dieselben bleiben. Denkt man sich jetzt die Seiten sehr klein, so schrumpft das Dreieck in einen Punkt, die Summe der Außenwinkel in die Summe der Winkel um einen Punkt herum zusammen. – Natürlich zeigt sich später beim sphärischen Dreieck, daß beide Beweise nicht stichhaltig sind. — Die Ausführungen können gleichzeitig als ein erstes Beispiel für den Gegensatz zwischen zwei Richtungen unter den Mathematiklehrern dienen, auf die im nächsten Abschnitt noch weiter einzugehen ist.

Auf die Dreieckslehre folgt die Lehre vom Viereck mit starker Betonung des Parallelogrammes. Man läßt dann einen Teil der Kreislehre folgen, soweit sie hier schon zu erledigen ist, also etwa Punkt und Kreis, Gerade und Kreis, Winkel und Kreis, Dreieck sowie Viereck und Kreis, Kreis und Kreis. Wie weit im einzelnen zu gehen ist, darüber besteht nicht Übereinstimmung. Bringt doch z. B. Boymann und ebenso Schuster in seiner konstruktiv-analytischen Planimetrie hier schon den Feuerbachschen Kreis (d. h. den durch die Fußpunkte der Höhen, durch die Mitten der Dreiecksseiten und die Mitten der oberen Höhenabschnitte eines Dreiecks gehenden Kreis.) Andererseits schiebt Bensemann einen Abschnitt über die wichtigsten Eigenschaften des Kreises (Kreis und Gerade, zwei Kreise) vor die Konstruktionen und Kongruenzbetrachtungen der Dreiecke, „da ja die Dreieckskonstruktionen durchweg der Kreise bedürfen".

Ältere Lehrbücher, wie die von Helmes, Wittstein und auch Schlömilch, ordnen die Kreislehre aus Gründen der Systematik später ein, nämlich hinter die Flächenlehre. Man unterscheidet hier meist zwei Abschnitte, die man mit Koppe-Diekmann als geometrische und arithmetische Quadratur bezeichnen kann. Selten sind beide Abschnitte ineinander gearbeitet, wie z. B. im alten Kambly und bei Lieber und von Lühmann. In dem ersten Kapitel, dessen natürlicher

Mittelpunkt der Pythagoräische Lehrsatz ist, wird die Zerlegungsgleichheit ebener, geradlinig begrenzter Figuren untersucht, angeschlossen werden sogenannte Umwandelungsaufgaben z. B. eines Rechtecks in ein Quadrat bei invariantem Flächeninhalt. Diesem Abschnitt geht dann ein entsprechender über Flächenberechnung parallel.

Es folgt die Ähnlichkeitslehre. Man hat hier etwa drei Abschnitte: Erstlich wird die Proportionalität an Geraden untersucht, wobei meist der sogenannte Strahlensatz zum Ausgangspunkt genommen wird. (Werden die Schenkel eines Winkels von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Schenkel wie die entsprechenden auf dem andern). Dann beschäftigt man sich mit der Ähnlichkeit von Dreiecken, und schließlich werden Proportionen am Kreis behandelt. In seltenen Fällen – einige Realschulen Berlins tun es lehrplanmäßig – wird gleich hier ein Abschnitt über harmonische Punktreihen und Strahlen angeschlossen. Dobriner hat in seinem Leitfaden den Versuch gemacht, die Ähnlichkeitslehre aus der Flächenlehre herzuleiten, hat jedoch nicht Anklang gefunden.

Zum Abschluß des Pensums der Unterstufe fehlt noch ein Kapitel über Kreisberechnung. Man geht in der Weise Archimeds von den regulären Polygonen aus und bestimmt so den Kreisumfang durch Angabe einer oberen und unteren Grenze.[1]) Meist fügen die Lehrbücher noch ein Kapitel über sogenannte algebraische Geometrie an (bei Bork-Nath tritt dieses Kapitel in vorbildlicher Weise nur in einer Methodik der Konstruktionsaufgaben auf). Es handelt sich hierbei nicht etwa um Methoden der analytischen Geometrie, vielmehr um die Konstruktion algebraischer Ausdrücke im Sinne der griechischen Mathematiker, also z. B. von $\frac{a \cdot b}{c}$ oder $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Die eben gegebene Gliederung schließt in der Hauptsache an die zur Betrachtung kommenden Figuren an. Auf organische Gliederung Wert legende Lehrbücher haben, auch wenn sie im großen und ganzen den eben gekennzeichneten Weg einschlagen, zuweilen eine andere Disposition. Die Elementargeometrie „ist nicht und will nicht sein", sagt Seeger, „eine Geometrie des Dreiecks, oder des Sehnenvierecks oder des Kreises. Sie kann sich überhaupt nicht darauf einlassen, die Eigenschaften irgend einer speziellen Figur auch nur einigermaßen erschöpfend zu untersuchen. Die Elementargeometrie stellt sich vielmehr keine anderen Aufgaben als die, den Schüler mit den Grundzügen der Kongruenz-, Ähnlichkeits- und Kollineationslehre und mit den am näch-

1) Dabei wird übrigens fast niemals das Verdienst des Archimedes richtig hervorgehoben. Fast überall findet sich der Wert $\pi = \frac{22}{7}$, während Archimedes in seiner „Kreismessung" mit der Ungleichung schließt

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

(Vergl. Cantor, l. c. Bd. 1. pg. 301.)

sten liegenden Anwendungen dieser drei Lehren bekannt zu machen". Uth gliedert den Stoff in 1. Absolute Gleichheit und Ungleichheit; 2. Relative Gleichheit (d. h. Ähnlichkeitslehre); 3. Geometrie der Lage.

7. Deduktive und induktive Methoden.

Im mathematischen Unterricht unterscheidet man ganz allgemein zwei Methoden, die didaktische oder dogmatische Methode und die heuristische Methode. Die extremste Form der dogmatischen Methode ist die Einpaukmethode. Reidt schildert nach einem wirklichen Fall den nach ihr erteilten Unterricht etwa so: In der ersten Stunde wird Lehrsatz 1 durchgenommen und zu häuslicher Aneignung aufgegeben. In der zweiten Stunde sagen sämtliche Schüler den Lehrsatz mit Beweis wörtlich her; wer ihn kann, erhält den Auftrag, das nächste Mal den 2. Lehrsatz einzuüben, die anderen erhalten den 1. Lehrsatz zur nächsten Stunde wieder auf. In gleicher Weise wird in allen Stunden fortgefahren.

Schotten fügt aus seiner Schulzeit einen anderen Fall hinzu, in dem sogar seitenweise auswendig gelernt wurde; also Lehrer: Was steht auf Seite 71? Schüler sagt das her (bzw. liest es ab). Dann wieder vom Lehrer die klassischen Worte: „Solches alles stehet auf Seite 71: – Was steht auf Seite 72?" Derartiger Unterricht wird schon vor 40 bis 50 Jahren eine Monstrosität gewesen sein. Dagegen wird die didaktische Methode, wie sie beispielweise der Universitätsunterricht befolgt, gelegentlich wohl noch heute einmal in den Oberklassen bei dem einen oder anderen Kapitel von einzelnen Lehrern angewandt. Immerhin wird heute wohl kaum noch ein Lehrer zu finden sein, der nicht meistens heuristisch verfährt, d. h. durch ein stetes Frage- und Antwortspiel die Schüler an der Durchnahme des neuen Stoffes beteiligt. Es ist hier nicht der Ort, an der Hand von Beispielen das zu erläutern, vielmehr sollen nur einige allgemeine Gesichtspunkte besprochen werden, die aus der heuristischen Unterrichtsmethode heraus für die Gestaltung des Lehrstoffes auch im Lehrbuche maßgebend waren.

Es gibt eine Anzahl Lehrbücher, die das Wort heuristisch im Titel führen, ohne doch diese Methode zu befolgen, beispielsweise der Leitfaden von I. A. Matthias, wenigstens in seinen Neubearbeitungen. Ein gleiches ist von Behl's Planimetrie zu sagen: Hier wird zwar im Titel von induktiver Methode gesprochen, im ganzen Buch wird aber nirgends induktiv (im üblichen Sinne des Wortes) verfahren, vielmehr sollte es besser heißen heuristisch. Dieses heuristische Element beschränkt sich nun aber darauf, daß bei den einzelnen Sätzen in der Reihenfolge Voraussetzung, Beweis, Behauptung, Lehrsatz vorgegangen wird. Das wichtigste Moment, wie man dazu kommt, gerade auf diese oder jene Tatsache „im Beweise" zu achten, fehlt aber; wenn der Lehrsatz voransteht, so ist wenigstens ein Richtung gebendes Moment da,

hier fehlt das ganz. Man kann wohl sagen, daß tatsächlich vollständig heuristisch verfahrende Bücher überhaupt nicht existieren, hier handelt es sich eben um einen Vorzug des direkten mündlichen Meinungsaustausches, der dem Lehrbuch abgeht.

Zunächst sei der Gegensatz und auf der anderen Seite auch das Hand-in-Hand-Gehen des deduktiven und des induktiven Momentes im mathematischen Unterricht gekennzeichnet. Man kann in dieser Beziehung heute zwei ziemlich unvermittelt[1]) einander gegenüber stehende Ansichten konstatieren. Die eine läßt sich dahin charakterisieren, daß sie auf der Grundlage eines gewissen mehr oder weniger propädeutisch übermittelten Fundaments in strenger lückenloser Deduktion ein System von Lehrsätzen aufgebaut wissen will. Dieses System wird dann durch geeignete Übungssätze, durch Aufgaben, durch praktische Anwendungen weiter in die Breite geführt. Die gegenteilige Ansicht verteidigt demgegenüber zumal in den ersten Teilen ein rein anschauliches, induktives Verfahren bei der Aufstellung der Lehrsätze, für die späteren Teile wünscht sie eine allmähliche Überleitung von der reinen Induktion der Propädeutik zu der deduktiven Methode der reinen Mathematik. Unter Induktion verstehen wir dabei in dem der Geometrie gewidmeten Abschnitt immer das Verfahren, aus der Anschauung einer oder mehrerer Figuren auf allgemeine geometrische Tatsachen zu schließen. Auf eine strenge Grundlegung der Geometrie muß allerdings, wie wir schon gesehen haben, auch die deduktive Richtung verzichten: „Nicht sowohl die Legung oder Befestigung des Fundaments als der sichere Aufbau der Wissenschaft auf gegebenem Fundament ist die nächste Aufgabe des Unterrichts." (Helmes.) Aber davon abgesehen sind die älteren ausführlichen Lehrbücher z. B. von Helmes und Wittstein bestrebt, in dieser Weise den gesamten Lehrstoff „streng wissenschaftlich" zu behandeln.

Bei dieser ganzen Frage spielen die Ansichten über den Zweck des Unterrichtes eine wesentliche Rolle. Es gab eine Zeit, in der der praktische Zweck des mathematischen Unterrichts ganz und gar zurücktrat. Man erklärte: die Mathematik „lediglich ihres praktischen Nutzens wegen in unsere Schulen zu ziehen, würde eine Verkennung ihrer Würde sein." (Wittstein.) Nur der formale Zweck der Geistesbildung[2]) ist ausschlaggebend: „Es dürfte wohl kaum eine Übertreibung sein", sagt wieder Wittstein, „wenn man behaupten wollte, daß ein ... Schüler in seinem späteren Leben den gesamten mathematischen Lehrstoff ohne Schaden vergessen dürfe, und der Erfolg wird dennoch bleiben." Heute wird

1) Das sieht man z. B. recht deutlich bei der Bearbeitung der Reidtschen Anleitung durch Schotten: Verfasser und Bearbeiter stehen in dieser Hinsicht auf vollkommen entgegengesetztem Standpunkte.

2) Eine moderne Behandlung des formalen Zweckes der Mathematik gibt A. Jakobs, Was leistet der Mathematikunterricht für die Erziehung zur Wissenschaft? Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 39 (1908), 625.

wohl allgemein der praktische Nutzen der Geometrie nicht mehr über die Achseln angesehen (vergl. Abschnitt 13); die Folge davon ist, daß neben das System, das an Zahl der Lehrsätze immer mehr abnimmt und sich nur auf das Skelett des Wesentlichen beschränkt, jetzt auch die praktische Anwendung getreten ist. Von dem Umfang und dem Aufbau eines solchen Skelettes von Sätzen geben die beste Vorstellung die systematischen Leitfäden, die in großer Zahl verbreitet sind.

Die kurzen Systeme dieser Leitfäden haben oft Anlaß gegeben zu der Annahme, der nach ihnen erteilte Schulunterricht bediene sich der didaktischen Methode. Das ist ganz und gar nicht der Fall, der Leitfaden gibt eben dem Schüler für seine häusliche Arbeit nur Fingerzeige für das Wesentliche, er will in keiner Weise den Unterricht ersetzen. — Schlagen wir dagegen systematische Lehrbücher auf, so finden sich zuweilen recht deutliche Hinweise auf die unterrichtliche Methode.

Die Vertreter der deduktiven Methode stehen natürlich auf dem Standpunkt, daß es nicht so sehr auf den Inhalt der einzelnen Lehrsätze ankommt, als vielmehr auf die Beweismethoden. Nicht Beweise sollen die Schüler lernen, sondern das Beweisen. Reidt nennt die Methode, welche dies Ziel zu erreichen sucht, die analytische Methode. Man gibt sich davon Rechenschaft, welche Tatsache, welcher Lehrsatz in einem gegebenen Falle eines Beweises zum Ziel geführt hat, und wendet das in entsprechenden anderen Fällen an.

Als ein älteres Beispiel für diese Methode führe ich die Elemente der Stereometrie von Kretschmer an, wenn auch dieser methodische Leitfaden dem Stoff nach noch nicht hierher gehört. Wenn es sich dort z. B. um den Satz handelt: „Der Neigungswinkel zwischen einer Ebene und einer durchschneidenden Geraden ist der kleinste Winkel, welchen die Gerade mit den durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet," so wird im Beweis zuerst gefragt: Welcher Satz lehrt zwei beliebige Winkel, die nicht in demselben Dreieck liegen, vergleichen?

Diese Methode ist dann von Späteren systematisch ausgebaut worden. Auf Anregungen von W. Krumme geht das Lehrbuch von H. Fenkner zurück. Es gibt eine Anzahl sogenannter Beweismittel an; so heißt es z. B. „Um die Gleichheit zweier Winkel zu beweisen, kann man zeigen, daß sie dieselben Supplement- oder Komplementwinkel haben" oder „Um die Gleichheit zweier Winkel nachzuweisen, bringt man sie durch Ziehen von Hilfslinien in zwei Dreiecke und beweist deren Kongruenz". Bei dem Beweis der einzelnen Sätze wird dann angegeben — im Unterricht hat das natürlich der Schüler selbst zu finden, — welches Beweismittel anzuwenden ist; manchmal ergeben sich dabei auch mehrere Wege. In gleicher Weise, doch in größerer Anzahl als Fenkner, der in der Planimetrie insgesamt nur 7 Beweismittel hat, gibt auch Heinr. Müller dem Schüler Beweismittel an die Hand. Selbstverständlich übt diese analytische Methode das Beweisen in ausgedehntem Maße an Übungs-

sätzen; aus diesem Grunde enthalten die meisten Übungsmaterial bietenden Bücher geeignete Übungssätze in reicher Auswahl (vergl. z. B. Gandtner und Junghans).

Eine große Rolle spielt bei der Analyse eines Beweises die Figur, daher lieben es einige Lehrbücher (vergl. z. B. das von Schwering-Krimphoff), dem eigentlichen Beweise einen Hinweis auf die Entstehung der Figur voranzustellen. Der Beweis wird sich durch Betrachtung der Figur und durch Diskussion etwa zu ziehender Hilfslinien herausfinden lassen. Damit wird die Figur von einer bloßen Stütze des Gedächtnisses, wie sie es früher wohl gewesen, zu einem heuristischen Prinzip, und man begreift, daß man in neuerer Zeit auch auf Seiten der deduktiven Gruppe immer mehr Wert legt auf eine exakte Ausführung der Figuren.

Bei dieser Gelegenheit sei eine methodische Bemerkung eingefügt, die an etwas sehr Äußerliches anschließt. Die älteren Lehrbücher vereinigten zum allergrößten Teile die Figuren und Tafeln am Schlusse des Buches; neben der Art der Herstellung war dafür maßgebend, daß „die Schüler die Figuren während der Lektion benutzen können, ohne den Text vor Augen zu haben". (Kambly.) Wenn heute fast alle Lehrbücher von diesem Gebrauch abgekommen sind, so liegt das nicht nur an der einfacheren Herstellungsweise der Figuren, sondern auch daran, daß man auf die Benutzung der Lehrbuchfiguren im Unterricht gänzlich verzichtet. Der Schüler zeichnet selbst entweder in sein Heft oder an die Tafel die nötigen Figuren.

Den Anhängern der Deduktion wird von den Induktiven der Vorwurf der Beweismanie gemacht. Wenn z. B. in vielen Systemen jenes sogenannte Axiom Euklids „Alle rechten Winkel sind gleich" bewiesen wird, so wird dazu gesagt: „Man möchte sich wundern, daß noch kein Mathematiker bewiesen hat, daß alle Viertelstunden einander gleich sind". Die Anhänger der Induktion scheuen sich nicht, derartige Sätze rein der Anschauung zu entnehmen, erst allmählich also einen Übergang von der Propädeutik zur deduktiven Mathematik zu finden. Von älteren Schulbüchern ist in dieser Hinsicht Kretschmers Anschauungslehre charakteristisch. Dort werden Sätze, wie „Zwei Rechtecke sind kongruent, wenn sie in den anstoßenden Seiten übereinstimmen" oder „In jedem Dreieck liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber" rein induktiv gefunden. (Das Buch, auf das übrigens später noch zurückzukommen ist, führt die Fusion der ebenen und räumlichen Geometrie durch; eigenartig ist, daß der Winkel in seiner allgemeinen Form erst in den letzten Kapiteln auftritt, vorher ist nur von Rechten die Rede.)

Aus neuerer Zeit nenne ich für dieses Verfahren nur zwei Beispiele, welche den ganzen Lehrgang der Unterstufe umfassen, Walthers Geometrie und das Lehrbuch von Behrendsen-Götting. In dem letzteren Buche werden die Axiome ebenso als Lehrsätze bezeichnet wie die in gleicher Weise rein anschaulich gewonnenen wirklichen Lehrsätze. Erst allmählich treten dann Beweise auf; zum ersten Mal

wird bei dem Satze vom gleichschenkligen Dreieck gezeigt, was ein Beweis ist; man scheut sich auch weiterhin nicht, im Beweise selbst mit anschaulich klaren Tatsachen zu operieren.

Besonders die Crux der früheren indirekten Beweise bei Umkehrungen wird in diesen Lehrbüchern vermieden; ganz im Gegensatz zu den Vertretern der deduktiven Richtung, wie Wittstein, Kambly u. a., die eine Fülle von Umkehrungen (z. B. gibt die Symmetrie des gleichschenkligen Dreiecks Anlaß zu fast einem halben Dutzend Sätzen) aufzählen. Bensemann geht den indirekten Beweisen, soweit sie nicht rein logisch, ohne Zuhilfenahme der Anschauung zu führen sind, auf andere Weise aus dem Wege. Er versucht, die negativen Aussagen, von denen die indirekten Beweise Gebrauch machen, durch solche positiven Inhalts zu ersetzen. So wird z. B. im Anschluß an das Tangentenviereck auch der Fall behandelt, wo die vierte Seite den Kreis schneidet oder ganz außerhalb des Kreises liegt. Dann werden Beziehungen zwischen den Seiten aufgesucht, die zu einem direkten Beweis der Umkehrung des Satzes vom Tangentenviereck führen.

In anderen Ländern (Frankreich, Italien) ist wie bei uns für den Physik-, so auch für den Mathematik-Unterricht eine Scheidung in Unter- und Oberstufe eingetreten, wobei dann ganz naturgemäß die Unterstufe mehr induktiv und anschaulich (mit allmählicher Erziehung zum deduktiven Verfahren), die Oberstufe von unten an neu aufbauend rein logisch deduktiv verfährt. Eine solche Spaltung ist der Lehrpläne wegen meines Wissens in Norddeutschland nirgends durchgeführt, wenn man von dem kurzfristigen propädeutischen Unterricht absieht; in Süddeutschland dagegen besitzen z. B. die badischen Oberrealschulen und damit auch die badischen Reformanstalten die Zweiteilung.

Mit dem bisher Gesagten ist die Rolle der Induktion im mathematischen Unterricht durchaus nicht erschöpft. Die Induktion erfährt nämlich überall da, wo überhaupt heuristisch vorgegangen wird, Anwendung bei dem Aufsuchen neuer geometrischer Wahrheiten und ferner bei der Nachprüfung von Sätzen. Neue Lehrsätze wird man die Schüler häufig an Figuren finden lassen; man wird z. B. die Winkelsumme vom Dreieck bestimmen lassen und dadurch auf den zugehörigen Lehrsatz geführt werden. Häufig wird man dabei vom Besonderen zum Allgemeinen vorschreiten; so ist z. B. die Gültigkeit des Pythagoreischen Lehrsatzes für das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck trivial; man kann an mehreren Beispielen untersuchen lassen, ob ein entsprechender Satz auch für andere rechtwinklige Dreiecke zutrifft, und dann einen entsprechenden Lehrsatz formulieren lassen. Nur einige methodische Lehrbücher wie z. B. die von Schwering und Holzmüller gehen gelegentlich soweit auf das Unterrichtsdetail ein. Seltener wird man eine induktive Nachprüfung eines Lehrsatzes vornehmen; es sei z. B. genannt die tatsächliche Abzählung des Inhalts eines auf Millimeterpapier gezeichneten Kreises und die Feststellung der Fehlergrenzen. Hier sind auch die anschaulichen

Zerlegungsmethoden im Kapitel der Flächenlehre zu erwähnen (Pythagoreischer Lehrsatz und dergl.), wobei sich dann die Begründung auf das „Siehe!" der Inder beschränken kann.

Wir haben im vorangehenden schon eine Unterrichtspraxis berührt, die man als „genetische Methode" bezeichnet hat. Zwei Punkte sind für die Aufstellung eines Systems wesentlich: einmal die Auffindung und die Anwendung der geometrischen Wahrheiten und weiter die Begründung oder die Beweise derselben. Das erste ist Sache der genetischen Methode. Der Ausdruck genetisch ist zuweilen auch in anderem Sinne gebraucht worden, er bezieht sich dann bei Definitionen auf die Entstehung der Gebilde, bei Beweisen auf die Entstehung der Figuren (siehe Abschnitt 8).

Bei Euklid ist von der Auffindung und Anordnung der Lehrsätze recht wenig zu merken; unsere heutigen Leitfäden legen erheblich mehr Gewicht auf die organische Verknüpfung der einzelnen Teile. Wie man im einzelnen zur Aufstellung von Lehrsätzen kommt, wurde oben schon angedeutet. Ehe man aber soweit ist, muß man wissen, wo man nach neuen Tatsachen suchen will. Nur zwei Beispiele dazu: wenn man den Kreis betrachtet, so wird man Aussagen suchen über sein Verhalten 1. zu Punkten, 2. zu Geraden, 3. zu Winkeln, 4. zu Dreiecken und Vielecken, 5. zu anderen Kreisen. Wenn man die Kongruenzsätze aufsucht, so wird man – ich setze den Anschluß an die entsprechenden Konstruktionen voraus – die verschiedenen Kombinationen von Seiten und Winkeln zu dreien durchgehen u. s. f. Durchaus gleichgültig für die vorliegende Frage ist die äußere Form der Darstellung, ob im Lehrbuch die einzelnen Sätze als Einheiten auftreten, oder ob das Ganze in fließende Darstellung gebracht ist. Ein typisches, nach genetischer Methode verfahrendes Lehrbuch dieser Art ist das am Joachimsthalschen Gymnasium in Berlin längere Zeit benutzte von Schindler, nur wird leider das Buch durch den „Einleitungsunfug" entstellt. Ein anderes Beispiel ist die nach der Snellschen Methode verfahrende Elementargeometrie von Roese.

Wenn wir die in diesem Abschnitt gekennzeichnete Entwicklung der Methode noch einmal andeuten, so ist es diese: in einer ersten Entwicklungsstufe begnügt man sich damit, daß der Schüler die Lehrsätze mit ihren Beweisen lernt, auf einer zweiten Stufe fordert man, daß der Schüler auch das Beweisen vorgelegter Lehrsätze lernt, auf einer dritten und höchsten Stufe der Entwicklung strebt man an, daß der Schüler selbst die Lehrsätze aufsucht und selbst sie beweist, natürlich immer an der leitenden Hand des Lehrers.

8. Die geometrische Aufgabe. Konstruktive Geometrie.

Aus jener Zeit wohl, wo die Lehrsätze des Systems mit ihren Beweisen in dogmatischer Form vorgetragen wurden, stammt die Wertschätzung der geometrischen Aufgabe. Denn die Konstruktionsaufgabe

fordert im Gegensatz zu dem System, wie es damals vorgetragen wurde, die selbständige Tätigkeit des Schülers heraus. Mit der fortschreitenden Entwicklung der Methodik ist die Wertschätzung der Aufgabe ein wenig zurückgegangen, man ist besonders in der Auswahl der Aufgaben kritischer geworden.

Es gibt eine Reihe größerer Sammlungen von Konstruktionsaufgaben, ich nenne von älteren Wöckels Geometrie der Alten, von neueren die umfassendsten ihrer Art, die von Lieber und v. Lühmann und die von Gandtner und Junghans (auch des letzteren Lehrbuch von 1879 ist sehr reich an Konstruktionsaufgaben), daneben E. F. Borth, Clasen-Bach u. v. a. Die meisten Lehrbücher und Leitfäden der Geometrie bringen heute Aufgabenmaterial, immerhin verzichten noch immer einige wenige Bücher ganz darauf (z. B. Bork-Nath, Lieber-von Lühmann, Mehler; im Anschluß an des letzteren Leitfaden hat Funcke eine Aufgabensammlung herausgegeben); auf der anderen Seite scheinen allmählich auch die erst auf Arithmetik und Algebra beschränkten, dann auch Trigonometrie und Stereometrie hinzunehmenden Aufgabensammlungen sich der Planimetrie zu erschließen. Wir finden einen Abschnitt über planimetrische Konstruktionsaufgaben bei Schulze und Pahl, in Fr. Busslers Übungsbuch; Heinrich Müller läßt sie noch in einem besonderen Heft erscheinen.

Steiner hat einmal gesagt[1]), es käme bei jeder geometrischen Aufgabe darauf an, zu untersuchen, auf welche Weise sie „theoretisch oder praktisch, am einfachsten, genauesten oder sichersten konstruiert werden könne, und zwar 1) welches im allgemeinen, 2) welches bei beschränkten Hilfsmitteln, und 3) welches bei obwaltenden Hindernissen das zweckmäßigste Verfahren sei". Die Schule streicht einen großen Teil dieser Forderungen, oder begnügt sich doch an vielen Stellen auf gelegentliche Andeutungen.

Zunächst beschränkt sie sich bei den Konstruktionsaufgaben fast durchgängig auf solche, die mit Zirkel und Lineal in einer endlichen Anzahl von Operationen ausführbar sind. Die für die Ausführung solcher Konstruktionen nötigen Postulate werden in sehr vielen Lehrbüchern im engsten Anschluß an Euklid meist gleich am Anfang aufgezählt.

Dabei sei gleich hier eingeschaltet, daß es in der Stereometrie noch kaum üblich geworden ist, das für Konstruktionen im Raume notwendige Postulat anzuführen, daß durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, eine Ebene gelegt werden kann; das Postulat findet sich z. B. bei Hauck-Kommerell, Müller-Witting, Thieme.

1) J. Steiner, Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten und zur praktischen Benutzung. (1833). = Gesammelte Werke I, S. 510. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 60. Herausgeg. von A. J. v. Oettingen. Leipzig. (Engelmann.) 1895.

Auf Konstruktionen mit dem Zirkel allein (Mascheroni) oder mit dem Lineal und einem festen Kreis (Steiner) wird wohl nirgends in Schulbüchern Rücksicht genommen. Ebensowenig wird auch die im Linearzeichnen interessierende Frage nach der praktischsten Konstruktion auf dem Reißbrett, wobei auch das Ziehen einer Parallelen und eines Lotes durch einen Punkt als direkt ausführbar angesehen wird, einer systematischen Untersuchung unterzogen.[1] Dagegen haben die von Witting in einer Programmabhandlung[1] behandelten „Konstruktionen in begrenzter Ebene", die übrigens auch früheren Jahrhunderten nicht ganz fremd waren[2], neuerdings einen Widerhall in einer Schrift von Zühlke[3] gefunden, die dann auch das verwandte Problem angreift: die in einer Konstruktion gesuchten Schnittpunkte u. dergl. sind zwar erreichbar, erscheinen aber nicht sicher genug bestimmt.

Näherungskonstruktionen werden in den Schulbüchern nur gelegentlich (z. B. bei der Quadratur des Kreises: Henrici-Treutlein) angeführt. Immerhin gibt z. B. bei Schuster die Untersuchung der Genauigkeit bei Näherungskonstruktionen regulärer Vielecke einen interessanten Aufgabenstoff für die Trigonometrie ab.

Konstruktionen mit vom üblichen abweichenden Hilfsmitteln, also z. B. Einschieblösungen (bei der Dreiteilung des Winkels und dgl.), werden kaum je erwähnt; der Unterricht wird aber wohl zuweilen auf sie hinweisen.

Hier wäre auch ein Wort über die Geometrographie einzuschalten, gegen deren Prinzipien ja allerdings in Deutschland auch Bedenken geäußert sind (Mehmke). Reusch sagt in einem Heft „Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung": „Eine Erörterung der Frage, in welcher Weise die Geometrographie im Unterricht zu verwerten sei, wird wohl am besten noch hinausgeschoben, bis sich seitens der Herren Fachkollegen an höheren Schulen eine größere Beteiligung an den geometrographischen Untersuchungen zeigt, die auch bezüglich der fundamentalen planimetrischen Aufgaben noch keineswegs als abgeschlossen zu betrachten sind." Immerhin liegt es nicht weit von dem Gedanken Lemoines ab, wenn z. B. in dem methodischen Lehrbuch von Schumann die Zahl der notwendigen Konstruktionslinien als Maßstab für die Einfachheit einer Konstruktion genommen wird.

Bei der Lösung geometrischer Aufgaben in der Schule liegt die Gefahr nahe, daß sie in eine geistlose und auch für den mit den verschiedenen Kniffen Vertrauten recht fruchtlose Technik ausartet. Wer hingegen diese Kniffe nicht kennt, der steht meist vor Rätseln, er kann

---

1) A. Witting, Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene. Prg. Gymnasium zum heiligen Kreuz. Dresden 1899.

2) W. Lietzmann, Eine geometrische Aufgabensammlung aus dem Ende des 17. Jahrhunderts. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter 6 (1909), 57.

3) P. Zühlke, Ausführung elementar-geometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Leipzig. (Teubner.) 1906.

ohne fremde Hilfe die Konstruktionen „von Dreiecken mit möglichst unzweckmäßigen Stücken" (Lindemann) nicht finden. In der Absicht, dem entgegenzuwirken, begegnen sich zwei Bestrebungen. Die eine geht dahin, Aufgaben mit Kniffen und mit komplizierten Daten (z. B. bei Dreieckskonstruktionen: Summe zweier Höhen oder Summe zweier Radien von Ankreisen) auszumerzen. Die andere geht darauf aus, eine Methodik der Konstruktionsaufgaben zu entwickeln. Die Bemühungen in dieser Richtung sind sehr zahlreich. Bahnbrechend waren die zuerst dänisch erschienenen Bücher von Petersen, doch ist Petersens Methodik und Theorie kaum direkt für Schüler verwertbar, da diese gründlichen Untersuchungen mehrfach über den Rahmen der Schule hinausgehen. Neuere für den Lehrer bestimmte Bücher mit ähnlichen, aber weitergehenden Zielen sind F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie[1]) und A. Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen.[2]) Für die Schüler sind nicht so sehr allgemeine und möglichst allumfassende Methoden als speziellere und damit für die Schüler leichter verständliche am Platze. In dieser Weise verfahren eine Anzahl Methodiken der Konstruktionsaufgabe, wie die von Alexandroff, Brockmann, G. Hoffmann, E. R. Müller und auch Lehrbücher der Geometrie, wie z. B. die von Bork-Nath, Mahler, Mehler-Schulte-Tigges, Spieker. Es werden da angeführt: Die Methode der geometrischen Örter, der Reduktion (auf Hilfsdreiecke), die Ähnlichkeitsmethode, dann die Methode der Parallelverschiebung, des Umklappens (Drehung um eine Achse), der Drehung (Drehung um einen Punkt), schließlich die Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

Eine wichtige Rolle spielt bei der Konstruktionsaufgabe die Determination, und zwar in erster Linie deshalb, weil in ihr die Überlegungen über die Lösbarkeit und Mehrdeutigkeit der Aufgabe anknüpfen an die Variabilität der gegebenen Größen. Ich greife als Beispiel zwei Aufgaben aus den Hauptsätzen von Bork-Nath heraus.

Bei der Konstruktion eines Dreiecks aus einer Seite a, der zugehörigen Höhe h_a und der zugehörigen Mittellinie m_a kann man, wie leicht einzusehen, über a und h_a beliebig verfügen. Wenn jetzt aber m_a alle Werte von 0 bis ∞ durchläuft, so existiert nicht immer ein Dreieck, vielmehr erhält man keines, eines oder zwei, je nachdem $m_a < h_a$, $m_a = h_a$ oder $m_a > h_a$ ist.

Handelt es sich etwa um die Konstruktion eines Dreiecks aus einer Seite a, der Höhe h_b von dem einen und der Mittellinie m_c von dem anderen Endpunkte dieser Seite, so wird man nicht mehr über a und h_b frei verfügen können; man wird vielmehr h_b und m_c variieren lassen und dann das folgende Schema erhalten:

1) F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie. Deutsche Ausgabe von H. Fleischer. Teil II: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Leipzig. (Teubner.) 1907.

2) A. Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen. Leipzig. (Göschen.) 1906.

h_b	m_c	Lösung:
$> a$	belieb.	kein Dreieck.
$= a$	$< \frac{a}{2}$	kein Dreieck.
	$= \frac{a}{2}$	eine Gerade.
	$> \frac{a}{2}$	zwei kongruente Dreiecke.
$< a$	$< \frac{h_b}{2}$	kein Dreieck.
	$= \frac{h_b}{2}$	ein Dreieck.
	$> \frac{h_b}{2}$	zwei Dreiecke.

Diese Beispiele zeigen, wie die Determination vortrefflich geeignet ist, den Schüler mit dem Begriff der Variablen und der Funktion vertraut zu machen.

Das ist nun besonders dort der Fall, wo der Schüler die Abhängigkeit einer geometrischen Größe von anderen in eine algebraische Form fassen kann, bei den sog. Konstruktionen algebraischer Ausdrücke. So schließt sich (vergl. Behrendsen-Götting) z. B. an die Konstruktion der Strecke

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

(vergl. Abschnitt 6) die Frage an, wie c sich verändert, wenn a oder b sich ändert. Das führt dann auf die Diskussion der Funktionen

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$
$$y = \sqrt{x^2 - b^2},$$

also auf den Kreis und die gleichseitige Hyperbel.

Wir sprachen bis jetzt von der Rolle, die die geometrische Konstruktion gewissermaßen für sich allein betrachtet im Unterricht spielt. Sie wird nun aber von vielen auch für den eigentlichen Lehrgang herangezogen. Wenn heute immer mehr das Bestreben hervortritt, die Zahl der Lehrsätze des eigentlichen Systems zu verringern, so geschieht das nicht zum wenigsten deswegen, weil man dem Schüler viele früher als besondere Lehrsätze ausgesprochene Tatsachen in der Gestalt der geometrischen Aufgaben darbieten kann.

Aber nicht nur als Ersatz für weniger wichtige Lehrsätze, sondern überhaupt „als Vorbereitung für künftig zu behandelnde geometrische Wahrheiten“ soll die Aufgabe dienen. An die Konstruktion, an einen Kreis von einem Punkte aus die Tangenten zu ziehen, wird sich z. B.

der Lehrsatz knüpfen, daß diese beiden Tangenten gleich sind, daß die Zentrale Winkelhalbierende des Winkels zwischen den Tangenten ist usf.

Nur ein Schritt weiter ist es, wenn man direkt aus der Konstruktion Lehrsätze erschließt. Immer weitere Verbreitung gewinnt der Gebrauch, die Kongruenzsätze aus der Eindeutigkeit der fundamentalen Dreieckskonstruktionen zu erschließen. Man läßt die Schüler aus gegebenen Stücken etwa das Dreieck konstruieren; das wird dann von den einzelnen Schülern ausgeschnitten, und die 30 oder 40 Stück werden aufeinander geschichtet. Die Lehrbücher, die vordem (z. B. Kambly) häufig erst den Kongruenzsatz, dann die entsprechende Konstruktion brachten, verfahren heut zum größten Teil umgekehrt, ja deuten den Euklidischen Deckungsbeweis nur eben ganz summarisch an (Behrendsen-Götting) oder lassen ihn ganz fallen (Walther). Allgemein durchgeführt ist die konstruktive Methode bei A. Gille; bei ihm ist an Stelle der Folge: Lehrsatz, Voraussetzung, Behauptung, Beweis, getreten: Aufgabe, Untersuchung, Lehrsatz, Folgerung (analog dem Verfahren bei Konstruktionsaufgaben: Aufgabe, Analysis, Konstruktion, Determination). Weniger weit geht Lesser in seinem Hilfsbuch, der die Reihenfolge: Aufgabe, Lehrsatz, Beweis hat. Schließlich nenne ich noch Bensemann, bei dem gleichfalls systematisch die Konstruktion an die Spitze gestellt wird.

Was sich bei den Kongruenzsätzen allmählich allgemein einzubürgern scheint, will Hubert Müller in seinen Elementen der Planimetrie verallgemeinern: „Man kann die Beweise des Systems weder nach der Schwierigkeit noch nach der Beweisart ordnen“; es gibt Beweise, die der Schüler selbständig nicht oder doch nur schwer finden würde[1] damit aber liegt die Gefahr des Einpaukens nahe. Deswegen beschränkt Hubert Müller das System auf eine Anzahl Sätze, deren Beweis nicht zu schwer ist, und behandelt den Inhalt der anderen Sätze konstruktiv. Nach der Ansicht des Verfassers sind z. B. die Kongruenzbeweise beim Parallelogramm zu schwierig für diese Klassenstufe. Er läßt also drei Punkte eines Vierecks fest annehmen, den 4. finden, so daß 1. je zwei gegenüberliegende Seiten gleichlaufend sind; 2. eine Seite der gegenüberliegenden gleich und parallel ist; 3. je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind; 4. je zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind; 5. die Diagonalen einander halbieren. Die Zeichnungen ergeben deckungsgleiche Figuren; daraus folgen, wenn nach 1 das Parallelogramm definiert wird, „konstruktiv“ die durch die Eigenschaften 2 bis 5 gegebenen Lehrsätze.

Ganz ähnlich ist die von M. Schuster angewandte Methode. Ich will auch von ihm ein Beispiel wählen, das dadurch, daß es mit dem Element der Bewegung von Figuren operiert, zum nächsten Kapitel überleiten soll. Es handelt sich um denselben Satz wie oben. Es wird die Aufgabe gestellt: „Im Parallelogramm $ABCD$ ist die Diagonale AC durch O halbiert. Drehe $\triangle ABC$ um O um einen Winkel von 180°: wohin fallen dann OA, OC, $\sphericalangle OAB$, $\sphericalangle OCB$, Punkt B, Seite AB, Seite BC?

Wohin fällt OB?“ Daraus folgt dann der Satz: „Im Parallelogramm sind a) je zwei Gegenseiten einander gleich, b) je zwei Gegenwinkel einander gleich, c) halbieren die Diagonalen einander.“

9. Beweglichkeit der Figuren. Geometrie der Lage.

Die Planimetrie Euklids vermeidet es, die Beweglichkeit der Figuren als Beweismittel zu verwenden. Bekanntlich weicht Euklid nur beim Beweis des ersten Kongruenzsatzes und seiner Umkehrung hiervon ab, man hat deshalb auch diesen Abschnitt der Elemente als spätere Redaktion erklärt, und andere, z. B. Th. Simpson (1710–1761), haben den „Fehler“ Euklids verbessert und den ersten Kongruenzsatz als Axiom ausgesprochen. Heute wird die Zahl der Lehrbücher, in denen von der Beweglichkeit nirgends Gebrauch gemacht wird, äußerst gering sein. Helmes ist noch Verteidiger der „alten Geometrie, fest und unbeweglich in plastischer Ruhe“; der neuen Geometrie „in Fluß und Bewegung“ verwehrt er den Eingang in die Schule. Heute in der Zeit des Funktionsbegriffes berühren Helmes' Worte sehr eigentümlich: „Und glaubt man selbst an eine Zukunft, wo schon in den Kinderschulen der Unterricht nur gleich mit der veränderlichen Größe werde beginnen können: so hat man doch zu bedenken, daß diese sogenannte „Entwicklungshypothese“ nach Aeonen und nicht nach Jahrhunderten oder Jahrtausenden zählt!“ Tatsächlich dringt an allen Ecken und Kanten des nach der alten Geometrie aufgebauten Systems die neuere ein und gewinnt stetig an Boden.

Da sind zunächst die Begriffsbestimmungen zu nennen. Linien werden als Orte bewegter Punkte erklärt (z. B. der Kreis), der Winkel entsteht durch Drehung eines Strahles um seinen Endpunkt; auch die Unterscheidung Gerade-Strahl-Strecke und damit Dreiseit-Dreieck, Vierseit-Viereck ist nicht euklidisch.

Damit steht im Zusammenhang die Einführung positiver und negativer Strecken, wie sie zwar in der Trigonometrie allgemein gebräuchlich ist, während wir ihr in der Planimetrie nur selten begegnen. Baltzer benützt sie u. a. in der Polarentheorie und bezieht sich dabei auf den baryzentrischen Kalkul von A. F. Möbius[1]), ein Buch, das mittelbar einen großen Einfluß auf den Unterricht gehabt hat.

Die axiale Symmetrie[2]) findet in immer mehr Lehrbüchern Eingang; man begegnet ihr jedenfalls fast stets beim gleichschenkligen Dreieck und bei den sogenannten Fundamental-Konstruktionen (Winkelhalbierung, Streckenhalbierung, Errichten und Fällen der Senkrechten werden am Rhombus abgelesen!). Hinzu kommt allmählich die Unterscheidung direkt

1) A. F. Möbius, Der baryzentrische Kalkul. Leipzig (Barth) 1827 = Gesammelte Werke 1. Bd. S. 1. Leipzig. (Hirzel.) 1885.

2) Vgl. E. Brocke, Über die Benutzung symmetrischer Beziehungen im geometrischen Unterricht. Jahresber. der Realschule Münster. Elsaß. 1907.

oder erst nach Umklappen kongruenter Dreiecke und damit z. B. die Ableitung des Satzes vom gleichschenkligen Dreieck durch Beweis von $ABC \cong ACB$ (Kambly-Röder). Die Benutzung zentraler Symmetrie ist nicht ganz so häufig. Vorbildlich sind in dieser Hinsicht Mahler, Schumann und Schulte-Tigges in der Neubearbeitung des Mehlerschen Leitfadens, der neben der üblichen Dreieckslehre eine zweite, die Symmetrie bevorzugende Theorie gibt, und dann wieder Behrendsen-Götting und Walther. Einem Einschlag neuer Lehren in das alte System begegnet man auch in der Ähnlichkeitslehre. Während in der Mehrzahl der Lehrbücher von ähnlichen Vielecken, definiert als solche mit gleichen entsprechenden Winkeln und proportionalen entsprechenden Seiten, ausgegangen wird, bringen andere wenige (als einer der ersten Boymann, dann z. B. Walther, selbstverständlich auch das weiter unten noch näher zu besprechende Buch von Henrici-Treutlein) die Definition: „Geradlinige Figuren sind ähnlich, wenn sie sich in eine solche Lage bringen lassen, daß die von irgendeinem Punkte nach den Ecken der einen Figur gezogenen Geraden oder Strahlen durch die Ecken der anderen Figur gehen und von denselben proportional geschnitten werden“ (oder an Stelle des letzten, „daß die entsprechenden Seiten parallel sind“). Daß die perspektivische Lage in der Ähnlichkeitslehre zur Sprache kommt, bürgert sich immer mehr ein.

Die Veränderlichkeit der einzelnen Stücke in einer Figur, insbesondere, wie wir schon früher sahen, bei den Konstruktionsaufgaben, läßt die gegenseitige Abhängigkeit erkennen und ist deshalb außerordentlich geeignet, die Bildung des Funktionsbegriffes zu unterstützen. Die neueste Auflage von Koppe-Diekmann bemerkt z. B. schon beim Satz vom Nebenwinkel, daß der eine Winkel eine Funktion des andern ist.

Es mehrt sich heutigentags immer mehr die Zahl derer, welche mit dieser Mischung alter und neuer Geometrie nicht zufrieden sind, die mit V. Schlegel der Meinung sind, „daß nur von einem vollständigen Bruch mit den alten Anschauungen und Methoden eine wissenschaftlich befriedigende Neugestaltung der Geometrie erwartet werden kann.“ Pioniere in das Neuland waren Schlegel selbst in seinem „Lehrbuch“, Kruse und Milinowski, alle aber ohne nachhaltigen Erfolg. Fink, dessen Lehrbuch sich an Lehrer wendet, wünscht: „eine lebendige Durchdringung der euklidischen mit der projektiven Geometrie“; „dazu scheint es geboten, der Unterstufe die euklidische Geometrie im großen und ganzen in ihrer seitherigen Form zu belassen, jedoch in diesem Rahmen Fundamentalbegriffe der projektiven Geometrie überall da organisch einzufügen, wo sich dieselben ungezwungen und nutzbringend verwerten lassen“.

Dieselbe Absicht verfolgt das Schulbuch von Hubert Müller. Auch Müller behielt den Lehrstoff und seine Anordnung nach Möglichkeit bei, die Methode war aber die der neueren Geometrie. „Das Prinzip der Starrheit ist beseitigt“, von Anfang an werden axiale und zentrale

Symmetrie eingeführt und überall beim Beweisen benutzt. Die Größenbeziehungen sind nicht das allein Ausschlaggebende, auch die Lagebeziehungen werden bearbeitet. Das Dualitätsprinzip kommt zu seinem Recht. Es ist schwer zu sagen, warum der Einfluß des Müllerschen Leitfadens schließlich abflaute; schließlich ist es wohl das, daß er nicht radikal auch den Lehrstoff änderte. So wurden wertvolle Gedanken aus dem Leitfaden allmählich in andere Lehrbücher übernommen, und diese waren dann mit ihrer Mischung von alter und neuer Geometrie bequemer für den Lehrer.

Anders das Lehrbuch von Henrici und Treutlein. Thieme hat einmal den Unterschied der beiden Bücher so charakterisiert: „Während bei Hubert Müller der Stoff in dem Vordergrunde steht, dieser mit neueren Anschauungen durchtränkt und nach neueren Methoden behandelt wird, treten bei Henrici und Treutlein die Methoden selbst in die erste Linie. Die Methoden der Beweisführung sind bei ihnen maßgebend für die Gliederung des Stoffes. Diese Methoden selbst stammen aus der neueren Geometrie, sind im Grunde besondere Fälle der allgemeinen Methoden der Projektivität". Damit fehlen allerdings, wie Klein jüngst noch bedauernd ausgesprochen hat, die über die linearen Transformationen der projektiven Geometrie hinausgehenden allgemeinen Verwandtschaften.

Es kann hier nicht eine Darstellung des gesamten Lehrgangs gegeben werden, nur einige wenige charakteristische Züge seien herausgehoben. Die Verfasser beginnen mit der Methode der Umdrehung (zentrale Symmetrie) und der Umwendung (axiale Symmetrie). Erst dann wird die „Verschiebung längs einer Geraden" und die Drehung um einen Punkt betrachtet und der Übergang zur „Deckungsgleichheit" gefunden. Interessant ist hierbei die an das Schulbuch von Veronese[1]) erinnernde Einführung der Parallelen: Es werden „in bezug auf einen Punkt entgegengesetzte oder diametrale" Figuren definiert als solche, deren Punkte paarweise auf Halbstrahl und Gegenstrahl dieses Punktes in gleichen Abständen von ihm liegen. Zwei entgegengesetzte Geraden sind dann parallel.

Die allgemeine Disposition des Lehrbuches ist kurz: (im 1. Bd.) Dreieck, Kreis, Vier- und Vieleck, Flächengleichheit; (im 2. Bd.) Ähnlichkeitslehre (betrachtet nach den einfachsten Gesetzen der Perspektivität), dann Untersuchung der Eigenschaften perspektiver und projektiver Punktreihen und Strahlenbüschel bis hin zu den Kegelschnitten, betrachtet als Bilder des Kreises. Die Disposition der einzelnen Kapitel ist durchaus durch die angewandten Methoden bedingt. So haben wir z. B. beim Viereck: 1. das Viereck mit einem Mittelpunkt, 2. Viereck und Vierseit mit einer Mittellinie, 3. Viereck und Vierseit mit Mittelpunkt

1) G. Veronese und P. Gazzaniga, Elementi di Geometria. Parte I. Ediz IV. 1909. Parte II. Ediz III. 1905. Verona-Padova, Fratelli Drucker.

und Mittellinie, 4. Viereck im Kreis und Vierseit um den Kreis. – Hier kommt auch das Dualitätsprinzip zur Geltung; schon beim Dreieck werden gleichschenkliges und gleichgeneigtes Dreieck parallelgehend behandelt.

Das Lehrbuch von Henrici-Treutlein fordert den Vergleich mit den analogen Erscheinungen des Auslandes heraus, besonders mit Mérays Nouveaux Éléments[1]). Da ist nun der charakteristische Unterschied, daß Méray immer vom Allgemeinen zum Speziellen vorzuschreiten sucht, während Henrici-Treutlein den der Schule mehr entsprechenden umgekehrten Weg einschlagen. Méray beginnt mit der Translation und untersucht nun, was alles er damit erreichen kann, Henrici und Treutlein beginnen mit ganz speziellen Fällen der Rotation. Damit hängen andere Unterschiede zusammen. Méray legt Wert auf ein vollständiges Axiomensystem, Henrici-Treutlein nicht; Méray führt die Fusion der räumlichen und ebenen Geometrie vollständig durch, Henrici-Treutlein befolgen sie nicht, wenn sie sie auch für die späteren Kapitel über perspektivische Abbildung in einer Ebene und von einer Ebene auf eine andere Ebene empfehlen. Alles in allem: Henrici-Treutlein ist ein aus dem Unterricht erwachsenes Schulbuch, Méray ein wissenschaftliches, nur künstlich dem Unterricht angepaßtes Werk. In Frankreich sind Mérays Elemente bahnbrechend gewesen und haben dem Unterricht besser entsprechende Lehrgänge zur Folge gehabt, so daß die Frage, ob statische oder kinematische Geometrie, heute in Frankreich im Vordergrund steht. In Deutschland ist das Lehrbuch von Henrici-Treutlein noch eine vereinzelte Erscheinung.

10. Erweiterung des Planimetriepensums auf der Oberstufe. Apollonische Kegelschnittlehre.

An die Planimetrie der Unterstufe schließt sich auf der Oberstufe eine Erweiterung an, die einige über Euklid hinausgehende Gedankengänge zum Gegenstande hat, und die häufig als neuere Geometrie bezeichnet wird. (Andere verstehen unter neuerer Geometrie die Geometrie der Lage.) Um von der üblichen Stoffwahl einen Begriff zu geben, stelle ich, etwa nach Spieker oder Koppe-Diekmann, den Grundstock der hierher gehörigen Sätze zusammen. An der Spitze steht in der Regel ein Abschnitt über Transversalen im Dreieck; hier werden die Sätze des Ceva und des Menelaus, des Pascal und des Brianchon (doch in diesem Zusammenhange nur für den Kreis) und der vom Neunpunktekreis (Feuerbachschen Kreis) bewiesen. Zuweilen werden dann noch die Eulersche Gerade (bestimmt durch den Schnittpunkt der Mittellinien, den Schnittpunkt der Höhen, den Mittelpunkt des Umkreises in einem Dreieck) und ähnliche Untersuchungen hinzugenommen.

In einem zweiten Abschnitte wird die harmonische Teilung (Punktreihe und Strahlenbüschel) behandelt, schließend etwa mit dem Satz

1) Vergl. das Zitat in Abschnitt 5.

des Apollonius (der Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten konstantes Verhältnis haben, ist ein Kreis usf.) und der Untersuchung von vollständigem Viereck und Vierseit. Den Abschluß macht ein Kapitel über Ähnlichkeitspunkte an Kreisen (mit dem Satz von Monge über die Lage der Ähnlichkeitspunkte bei drei Kreisen), über Pol und Polare am Kreis, über Chordalen und Potenzlinien (mit dem dem Mongeschen dual entsprechenden Satz über den Chordal- bzw. Potenzpunkt dreier Kreise) und dann das Berührungsproblem des Apollonius. Diese Aufgabe (zu drei Kreisen die berührenden Kreise zu finden) mit ihren insgesamt zehn Spezialfällen (durch Ausartung der Kreise in Gerade oder Punkte) bildet gleichsam den Höhepunkt dieser „Erweiterung der Planimetrie". Neuerdings wird dem Apollonischen Berührungsproblem zuweilen auch die Malfattische Aufgabe an die Seite gestellt (in ein Dreieck drei Kreise zu zeichnen, so daß jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt); von älteren Lehrbüchern, die das bereits tun, ist etwa Junghans zu erwähnen, von neueren nenne ich Holzmüller im dritten Teile seiner Elementarmathematik.

Eine andere Anordnung wie die eben genannte läßt sich dadurch kennzeichnen, daß die harmonische Teilung vorweggenommen und mit Benutzung dieser Begriffe die Sätze von Ceva, Menelaus usf. bewiesen werden. So findet man es beispielsweise bei Schulte-Tigges (Kegelschnitte) oder bei Schuster, der übrigens die Chordalen ganz an die Spitze stellt. Bei einer dritten Art der Anordnung (bei Müller-Witting) werden Chordalen, Ähnlichkeitspunkte, Ceva- und Menelaussatz mitsamt der Apollonischen Berührungsaufgabe vorweggenommen, dann erst werden die harmonischen Punkte und Strahlen (mit Viereck und Vierseit, Pol und Polare) im Zusammenhang dargestellt.

Die Behandlungsweise aller dieser Fragen ist zunächst die alte „starre" euklidische. Nicht der bewegliche Punkt einer Punktreihe, der bewegliche Strahl eines Strahlenbüschels, sondern die starre Figur wird betrachtet. Nur ganz selten kommt ein moderner Gedanke hinein, wird etwa einmal das Doppelverhältnis oder dergleichen berührt. Es kann etwa auf das Buch von Fuhrmann als ein Beispiel dieser Art verwiesen werden.

Der Wunsch nach einer synthetischen Geometrie der Kegelschnitte in Prima wurde etwa in den siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts laut. Als Gründe wurden angeführt (1878 von Buchbinder) 1. die Anwendbarkeit in der Physik, 2. die Gelegenheit, das geometrische Anschauungsvermögen weiter zu stärken und die Möglichkeit einer immanenten Wiederholung der Planimetrie, 3. die synthetische Geometrie würde ein Gegengewicht gegen die gerade in Prima überwiegende Arithmetik sein.

Für die synthetische Kegelschnittlehre, wie sie sich dann herausgebildet hat, war „die berühmte Steinersche Vorlesung" (Gallen-

kamp) über synthetische Geometrie[1]), und zwar deren erster, die Kegelschnittlehre elementar, ohne Benutzung projektiver Methoden behandelnder Teil, von ausschlaggebender Bedeutung. Die Kegelschnittlehre, die so allmählich Eingang in die Schulen gefunden hat, operiert wesentlich im Anschluß an oder doch nach den Methoden von Apollonius. Typische Beispiele des üblichen Lehrganges findet man etwa in den Lehrbüchern von Koppe-Diekmann, Müller-Hupe, Thieme; von besonderen Schriften nenne ich das bahnbrechende, zuerst 1877 in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht erschienene Werkchen von Erler und das häufig benutzte von Handel.

Es werden in der Regel nacheinander Parabel, Ellipse und Hyperbel behandelt, daran schließt sich meist noch ein Kapitel über gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte; abweichend von dieser Reihenfolge wird von einzelnen die Parabel zwischen Ellipse und Hyperbel gestellt (Bork-Nath, Schulte-Tigges). Als Ausgangsdefinition wird meist die auf den Brennpunktseigenschaften beruhende der als geometrischer Ort aufgefaßten Kurve genommen. Hier werden zwei Fassungen gegeben, neben der bekannten auch die Form: die Ellipse ist geometrischer Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die einen gegebenen Kreis berühren und durch einen Punkt innerhalb (bei der Hyperbel außerhalb) gehen. Als Beispiel einer abweichenden Definition sei die Fassung bei Müller-Hupe erwähnt: Man zeichne Punkte, deren Entfernungen von einem festen Punkte F und einer festen Geraden g ein unveränderliches Verhältnis ε besitzen, das kleiner als (für die Hyperbel größer als, für die Parabel gleich) 1 ist.

Die Diskussion der Gestalt des Kegelschnittes leitet über zu der Untersuchung der gegenseitigen Beziehungen von Punkt und Kegelschnitt, von Gerade und Kegelschnitt. Von einer Tangente (bei der Hyperbel auch Asymptote) wird zu Sätzen über zwei (Leitlinien) und drei Tangenten übergegangen, von wo aus dann die Frage konjugierter Durchmesser ihre Erledigung findet. Den Beschluß macht die Quadratur des Kegelschnittes, die durch geeignete in den einzelnen Grenzübergängen vollständig durchgeführte Integrationsmethoden erreicht wird, meist ohne daß der Begriff Integral genannt wird.

Dem Abschnitt über allgemeine Eigenschaften der Kegelschnitte ist die Herstellung der Verbindung zwischen räumlicher Entstehung des Kegelschnittes und Definition als ebener geometrischer Ort vorbehalten, dabei kommen die Grenzformen Punkt, eine, zwei Gerade zur Sprache. Hier geht man dann meist auch auf einige harmonische Beziehungen ein, gibt etwa die Begriffe Pol und Polare und die — vorher nur für den Kreis abgeleiteten — Sätze von Pascal und Brianchon.

Was die Behandlung der einzelnen Sätze anlangt, so wird in der Regel die Parabel recht eingehend besprochen; bei der Ellipse und Hy-

1) J. Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie. 1. Teil: Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung. Bearb. von C. F. Geiser. 3. A. Leipzig. (Teubner.) 1887.

perbel treten dann dieselben Lehrsatzgruppen und Beweismethoden wieder auf, und das ermöglicht eine schnellere Erledigung dieser Teile. Damit wird auch dem Bedenken gesteuert, daß „die mannigfaltigen Beweise an das Gedächtnis der Schüler große Ansprüche stellen". Lange-Zühlke gehen noch weiter. Sie wählen nicht diese Anordnung (Parabel, Ellipse, Hyperbel), sondern entwickeln die einander entsprechenden Sätze an den drei Kegelschnitten jeweilig im Zusammenhange, also etwa erst die Definitionen, dann Tangenten und Sekanten, Leitlinien usf. Eine solche natürliche Disposition hat bereits Gallenkamp im ersten Teile seiner synthetischen Geometrie. Er gliedert den Stoff in zwei Kapitel: Die Kegelschnitte in der Ebene und die Kegelschnitte am Kegel und behandelt in diesen Abschnitten die einzelnen Kegelschnitte neben-, nicht nacheinander.

Es ist gelegentlich versucht worden, spezielle Kegelschnitte ebenso wie den Kreis durchaus elementar und für die Unterstufe verständlich zu behandeln, das hat Milinowski mit der gleichseitigen Hyperbel, M. Simon mit der Parabel getan; doch sind ihre Bestrebungen wohl nicht in weitere Kreise der Unterrichtenden gedrungen.[1])

Das System der Kegelschnittlehre wird wie die Planimetrie der Unterstufe durch eine große Zahl von Konstruktionsaufgaben belebt; Material geben in dieser Hinsicht alle Lehrbücher.

Analytische Betrachtungen werden in vielen Fällen nach Möglichkeit gemieden, Erler benutzte sie noch recht reichlich (rechtwinklige und schiefwinklige Koordinaten), auch Handel gibt wenigstens einige Gleichungen an (z. B. Scheitelgleichung der Parabel, Mittelpunktsgleichung der Ellipse, bezogen auf konjugierte Durchmesser, Asymptotengleichung der Hyperbel).

In der Unterrichtspraxis wird man meist die synthetische Geometrie der analytischen vorangehen lassen (die umgekehrte Folge findet sich bei Bork-Nath). Neuerdings mehren sich aber die Beispiele für Verschmelzung der synthetischen und der analytischen Kegelschnittlehre. Für diese im Sinne der Konzentration des mathematischen Unterrichts sehr bedeutsame Tatsache führe ich als Beleg die Kegelschnittlehre von Pietzker und die Darstellungen der Kegelschnitte in den Lehrbüchern von Henrici-Treutlein und von Müller-Witting (Lehrbuch) an.

11. Geometrie der Lage auf der Oberstufe.

Schon in der Planimetrie der Unterstufe hatten wir Gelegenheit, das Eindringen von Begriffen, die der Geometrie der Lage entlehnt sind, an vielen Stellen zu konstatieren, und wir konnten auch Beispiele für gänz-

1) Ph. Weinmeister hat neuerdings (Unendlichkeitsrechnung in der Schule. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 38 (1907), 1) auf eine elementare Behandlung der Parabel und der gleichseitigen Hyperbel hingewiesen: „Nach meiner Ansicht treiben wir in der Schule im allzu engen Anschluß an Euklid viel zu viel Kreislehre." Er denkt sich die erste Durchnahme dieser Kegelschnitte bereits in Tertia und beruft sich dabei auf die österreichischen Lehrpläne.

lich im Sinne der projektiven Geometrie umgestaltete Lehrgänge finden. Die Beziehungen von Figuren, die den Lehrstoff der Unterstufe abgeben, sind aber anderer Art als diejenigen Begriffe und Untersuchungen, mit denen man sich beim Aufbau der projektiven Geometrie zu beschäftigen pflegt. Die Einsicht, daß man das Planimetriepensum der Unterstufe nicht gut mit Punktreihen, Strahlenbüscheln und den projektiven Beziehungen zwischen ihnen beginnen kann, sondern besser beim alten Stoff, bei Dreieck, Viereck und Kreis bleibt, wenn man auch all die zu untersuchenden Eigenschaften wie z. B. Kongruenz, Ähnlichkeit dem Begriffe der projektiven Verwandtschaft unterordnen kann, diese Einsicht läßt es begreiflich erscheinen, daß ein Beginn mit den allgemeinen Elementen der projektiven Geometrie erst auf der Oberstufe möglich erscheint.

Die Zahl der Autoren, die es unternehmen, auch der Schule einige Grundtatsachen über projektive Beziehungen zu erschließen, ist groß, die Art der Ausführung sehr verschieden. Zunächst sei die Auffassung der Kegelschnitte als Bilder eines Kreises erwähnt und die Diskussion dieser Beziehungen, natürlich mit den Methoden der „starren" Geometrie (so bei Schulte-Tigges und in Pietzkers Kegelschnittlehre). Dabei spielen die sogenannten Dandelinschen Kugeln eine Rolle. Dieses Kapitel stellt den für eine vollständige Darstellung nötigen Zusammenhang zwischen der Definition des Kegelschnittes einmal als geometrischen Ort, zum andern als ebenen Schnitt durch den Kegel her.

Die des weiteren zu besprechenden Methoden haben das gemeinsam, daß sie sich die Aufgabe stellen, den Schüler mit den Grundeigenschaften projektiver Gebilde bekannt zu machen. Ich möchte zunächst den Standpunkt kennzeichnen, den Schafheitlin in seinem jüngst erschienenen Buche einnimmt. Er sagt: „So reizvoll für den Mathematiker die Methoden der Geometrie der Lage sind, so stoßen sie bei der Mehrzahl der Schüler nur auf geringes Verständnis. Zum Teil liegt es daran, daß das Messen und Vergleichen ihnen so unzertrennlich seit der ersten Geometriestunde mit diesem Wissenszweige verknüpft zu sein scheint, daß ihnen die Nichtberücksichtigung der Maßeigenschaften gesucht und unnatürlich vorkommt; ferner aber bringen die Schüler stets den Kegelschnittaufgaben das größte Interesse entgegen, die sich auf alles das beziehen, was mit dem Mittelpunkte, den Achsen und den Brennpunkten zusammenhängt, so daß sie in dem Gefühl bestärkt werden, daß die vorherige Vernachlässigung der Maßbeziehungen etwas Gekünsteltes sei." Daraus schließt der Verfasser, daß man die Begriffe der projektiven Geometrie nicht meiden, sie aber mit den Methoden der „starren" Geometrie behandeln soll. Ich lasse ihn seinen Lehrgang selbst skizzieren: „Um Einfachheit und Einheitlichkeit zu erlangen, stelle ich den Doppelsatz des Pascal und Brianchon an die Spitze der Kegelschnittlehre. Zu seiner Begründung benutze ich die projektiven Eigenschaften der Strahlenbüschel, die ich aber unter fortwährender Benutzung von Maßbeziehungen behandle. Auch bei den zum Schluß besprochenen Involutionen und den

polaren Eigenschaften ziehe ich beständig Maßbeziehungen zur Begründung und Erklärung heran."

Andere Autoren gehen insofern über Schafheitlin hinaus, als sie in der Behandlung der Grundgebilde sich mehr der Methoden der Geometrie der Lage auch bei der Begründung und Ableitung dieser Eigenschaften bedienen, sie bleiben aber insofern hinter ihm zurück, als sie sich auf einzelne Kapitel beschränken. So bedient sich Pietzker dieser Beziehungen bei der vorher skizzierten Erweiterung der Planimetrie, während er bei der Kegelschnittlehre darauf verzichtet. Lange behandelt die Kegelschnittlehre zunächst in Maßgeometrie, fügt dann aber, „um die allgemeine Konstruktion eines Kegelschnittes aus fünf Elementen zu ermöglichen", eine Darstellung der projektiven und involutorischen Beziehungen bis zum Satze von Desargues hinzu. Schulte-Tigges begnügt sich mit einer kurzen Betrachtung der Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Gebilde.

Schließlich seien einige Darstellungen genannt, die das ganze hier in Frage stehende Gebiet durchgehends mit den Begriffen und auch mit den Methoden der Geometrie der Lage durchsetzen. Eine der ältesten Veröffentlichungen dieser Art ist eine Programmabhandlung von Spieker[1]. Nur wenig jünger ist der Leitfaden von Hubert Müller; in Betracht kommt weniger das zweite Heft des ersten Teiles, das bis zu einer kurzen Apollonischen Kegelschnittlehre vordringt, als der zweite Teil. Der Gang ist der folgende: „Die Grundeigenschaften der projektiven Punktreihen und Strahlenbüschel werden benutzt zur Ableitung der Beziehungen der Elemente involutorischer Punktreihen und Strahlenbüschel, der Beziehungen derselben zum Kreisbüschel, der Sätze über Pol und Polare in bezug auf den Kreis. Sodann werden die Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel und in dualer Weise die Gesamtheit ihrer Tangenten als Erzeugnisse projektiver Punktreihen betrachtet. Diese Erzeugnisse projektiver Grundgebilde werden schließlich nach ihren Beziehungen zur unendlich fernen Geraden in verschiedene Arten eingeteilt und diese dann mit den schon im ersten Teil behandelten Kegelschnitten als identisch nachgewiesen."

Erheblich weiter geht Gallenkamp in seinen Elementen der Mathematik (4. Teil, 2. Abschnitt). Er begnügt sich nicht mit den ebenen Gebilden, sondern nimmt auch die Flächen zweiter Ordnung hinzu; denn „kein Gebiet der Mathematik ist in annähernd gleichem Maße geeignet, die Energie der räumlichen Anschauung auszubilden", wie dieses. Zur näheren Kennzeichnung gebe ich die kurze Inhaltsangabe: Harmonische Elemente; Projektive Beziehung der Gebilde erster Ordnung. Erzeugung und Fundamentaleigenschaften der Gebilde zweiter Ordnung in der Ebene und im Strahlenbündel. Polarität. Involution.

1) Th. Spieker, Lineare Construction der Kegelschnitte. Programm d. Städt. Realschule erster Ordnung zu Potsdam. 1867.

Regelscharen und Regelflächen. Kollineation und Reziprozität der ebenen Systeme und der Strahlenbündel. Erzeugung und Polareigenschaften der Flächen und der Ebenenbündel zweiter Ordnung. Reziprozität und Kollineation räumlicher Systeme.

Diese ausführliche Darstellung der projektiven Geometrie bei Gallenkamp dürfte heute für den Unterricht nicht mehr in Frage kommen, sie steht nicht in Einklang mit der zur Verfügung stehenden Zeit. Das ist hingegen wohl der Fall bei einer Reihe anderer Bücher. In dem Lehrbuch von Henrici-Treutlein trägt der Abschnitt über Kegelschnitte den Titel „Abbildung von einer Ebene auf eine sie schneidende Ebene", und das gibt in der Tat das Leitmotiv an, nach dem die Kegelschnittlehre hier behandelt wird. Die Verfasser schließen damit unmittelbar in Stoff und Methode an die Unterstufe ihres Lehrbuches an.

Eine Reihe anderer kleiner Leitfäden hat sich die Aufgabe gestellt, unabhängig vom übrigen Lehrstoff einen Abriß der Geometrie der Lage zu geben; ich nenne den Leitfaden von I. Sachs, die Elemente von K. G. Volk und die von R. Böger, wozu als ältere Erscheinung etwa noch der zweite Teil der Diekmannschen Propädeutik hinzuzufügen wäre.

Es sei der Gedankengang eines solchen kurzen Abrisses im Anschluß an das Buch von Volk angedeutet. Der Verfasser beginnt mit den Grundlagen der Geometrie der Lage (Grundgebilde, uneigentliche Grundgebilde, Gesetz der Reziprozität, perspektive Verwandtschaft). Dann folgen zwei Abschnitte über harmonische Gebilde. Nachdem sodann die projektive Verwandtschaft eingeführt und die Erzeugung einer Kurve durch Wandern eines Punktes bzw. einer Tangente untersucht ist, werden einige Ausführungen über Kegelschnitte, betrachtet als ebene Schnitte durch den Kegel und als geometrische Örter, eingeschoben. Es folgen die Sätze von Pascal und Brianchon, die Feststellung der Identität von Kurven 2. Ordnung, Kurven 2. Klasse und Kegelschnitten, die Lehre von Pol und Polare. In einem Schlußabschnitt wird die Verbindung mit der analytischen Kegelschnittlehre hergestellt.

12. Trigonometrie der Ebene und des Raumes.

Durch die Lehrpläne ist in vielen Fällen (bei den Gymnasien Preußens allerdings seit 1901 nicht mehr) eine Anordnung des Pensums der ebenen Trigonometrie in zwei Stufen bedingt; die Unterstufe, die meist nach Beendigung des planimetrischen Pensums behandelt wird, obwohl sie sich organisch am besten der Ähnlichkeitslehre einfügen würde (so bei Frischauf), soll durchaus propädeutischen Charakter haben. Neben dem damit gegebenen methodischen Unterschied ist ein stofflicher vorhanden. Man beschränkt sich auf der Unterstufe in der Regel auf spitz- und stumpfwinklige Dreiecke und nimmt hier auch nur Sinus- und Cosinussatz, zuweilen wohl auch Tangens- und Halbwinkel-

satz; mit diesen Hilfsmitteln werden dann die vier Fälle von Dreiecksberechnungen erledigt und zur Lösung einfacher Aufgaben verwandt. Auf der Oberstufe werden die trigonometrischen Funktionen allgemein definiert, und die Goniometrie wird auf der Grundlage des Additionstheorems aufgebaut. Die Sätze für das Dreieck werden erweitert durch die sogenannten Mollweideschen Formeln.

Die Definition der trigonometrischen Funktionen knüpft in der Regel an das rechtwinklige Dreieck an, beschränkt sich also zunächst auf spitze Winkel (z. B. Kambly-Roeder), dann werden die Definitionen übertragen auf stumpfe Winkel, etwa wie in Hubert Müllers Elementen durch die Festsetzung, daß Funktionen von Nebenwinkeln absolut gleich, die Vorzeichen bei Sinus (bzw. auch bei cosec) gleich, bei allen anderen Funktionen ungleich sind. Diese Festsetzung wird gegebenenfalls zu begründen sein; das kann in der Weise geschehen, daß man auch hier das in der Arithmetik gebräuchliche Prinzip der Permanenz anwendet (vgl. Abschnitt 16). Man hat etwa den Inhalt eines bei C spitzwinkligen Dreiecks zu $\frac{1}{2} ab \sin\gamma$ gefunden. Jetzt richtet man die Definition für stumpfe Winkel so ein, daß die Formel auch weiter richtig bleibt (man sieht sofort, daß man den Sinus im 2. Quadranten positiv wählen muß). Für den Cosinus verfährt man in gleicher Weise, indem man etwa den Cosinussatz zugrunde legt. Diese „künstliche" Definitionsweise[1]) wird dann angebracht sein, wenn, wie in den Realschulen, die Schüler späterhin die Definition der Funktion für beliebige Winkel nicht mehr kennen lernen. Aber auch wenn das geschieht, läßt sich bei der neuen allgemeinen Definition leicht verifizieren, daß sie mit den früheren für spitze und stumpfe Winkel übereinstimmt. Immerhin ist das für einige Autoren, z. B. Arendt, Boymann, Spieker, Wittstein, Wolff, offenbar der Anlaß, gleich zu Anfang die allgemeinste Definition am Kreis zu geben.

Von den Funktionen wird an erster Stelle in der Regel der Sinus definiert. Schuster beginnt mit dem Tangens, da er nicht durch ± 1 begrenzt ist, praktischer und für den Anfänger anschaulicher ist und besser zum Sinus überleitet als umgekehrt. H. Graßmann stellte den Cosinus an den Anfang, weil dieser „ein Verhältnis darstellt, in welchem nur Stücke der beiden Schenkel des Winkels vorkommen, und daher hier die Zeichenbestimmung auf das einfachste erfolgt". sec und cosec finden sich nur noch sehr selten in den Schulbüchern (z. B. noch bei Haller von Hallerstein, Spieker, Wittstein).

Von der älteren Auffassung der trigonometrischen Funktionen als Strecken ist in den neuen Lehrbüchern nichts mehr zu finden; von älteren Büchern, die noch längere Zeit an der Streckendefinition festgehalten haben, sei Rummer (1867) angeführt. Wittstein gebraucht

1) Vgl. darüber Th. Häbler, Die Ausnahmslosigkeit beim Definieren trigonometrischer Funktionen. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 37 (1906), 81.

ausdrücklich den Ausdruck trigonometrische „Zahlen", denn, so äußert er sich, „der exakte Begriff einer Funktion kann erst in den höheren Teilen der Mathematik gegeben werden".

Immer mehr bürgert sich heute der Gebrauch ein, den Verlauf der trigonometrischen Funktionen graphisch darzustellen (von älteren Lehrbüchern, die das bereits tun, nenne ich Hammer), ja auch in logarithmisch-trigonometrischen Tafeln (z.B. Rohrbach) begegnet man bereits diesen Darstellungen, welche die Beziehungen zwischen den Funktionswerten von Komplementwinkeln, von Supplementwinkeln und zwischen den Funktionen untereinander sehr viel einfacher abzulesen gestatten als die Streckendarstellungen am Kreis. Zur punktweisen Konstruktion der Kurven, bzw. zur Feststellung der Funktionswerte für einzelne Fälle werden die Funktionen für eine Anzahl Winkel (0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, auch 18^0 usw.) berechnet. Andere, wie z.B. Reidt und Schuster, lassen die Werte der Funktionen auch durch Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke mit Hilfe des Transporteurs etwa von 10^0 zu 10^0 finden.

Eine Gruppe von Mathematikern erklärt es für wünschenswert, auf der Unterstufe möglichst ohne Formeln und daneben auch ohne die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen auszukommen. Das wird erreichbar dadurch, daß man die trigonometrischen Aufgaben auch am schiefwinkligen Dreieck jedesmal auf solche am rechtwinkligen Dreieck zurückführt[1]).

In der Regel werden auch der Sinus- und Cosinussatz durch geeignete Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke bewiesen, seltener trifft man eine algebraische Herleitung dieser Sätze aus anderen einfacheren. Ich gebe als Beispiel die Ableitung bei Hubert Müller, die ich mit seinen eigenen Worten charakterisiere[2]):

„Bei den geometrischen Beweisen braucht man die Betrachtung an mindestens zwei Figuren 1) bei dem Cosinussatz, 2) bei dem Sinussatz, 3) bei $\sin(\alpha+\beta)$, 4) bei $\cos(\alpha+\beta)$, 5) bei $\sin(\alpha-\beta)$, 6) bei $\cos(\alpha-\beta)$. Ich finde es einfacher, die Fundamentalformeln $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$ und $c = a \cdot \cos\beta + b\cos\alpha$ für spitze und stumpfe Winkel abzuleiten und die obengenannten Sätze algebraisch daraus abzuleiten, so daß dieselben auch sofort Gültigkeit für alle im Dreieck vorkommenden Fälle haben. Außerdem glaube ich, daß diese algebraischen Ableitungen dadurch Wert haben, daß der Schüler sie selbst ausführen kann, sobald man ihm den Plan kurz auseinandergesetzt hat. Z.B. bei der Ausrechnung von a^2 für

1) R. Glauer, Die trigonometrische Aufgabe in Untersekunda. Progr. (Städt. Realschule in Erfurt) 1902; schließt sich an Schülke, Trigonometrie ohne Logarithmen, Lehrproben und Lehrgänge Heft 51 (1897) und Schuster, Trigonometrie ohne Formeln, ebenda 52 (1897) an. Vgl. dagegen W. Janisch, Die formelarme und logarithmenlose Methode der Auflösung trigonometrischer Aufgaben. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 33 (1902), 551.

2) Die Stelle ist einem Briefe von Herrn Müller an mich entnommen und bezieht sich auf die Gestalt, in der die betreffenden Kapitel in der nächsten Auflage seiner Elemente der Trigonometrie erscheinen werden.

den Cosinussatz heißt die kurze Anleitung: fasse a^2 auf als $a^2 \cdot \cos^2 \beta + a^2 \sin^2 \beta$, entnimm $a \cdot \cos \beta$ und $a \cdot \sin \beta$ aus den Grundformeln, quadriere und addiere."

Die Additionstheoreme werden zumeist in der Weise bewiesen, daß an einen Winkel α ein Winkel β angetragen wird und durch Herstellung geeigneter Dreiecke die Beziehungen zwischen den Funktionen von $\alpha + \beta$ und α und β abgeleitet werden. Hier wird der Beweis für beliebige Winkel geliefert. Daß das Additionstheorem in dieser Weise bereits dann abgeleitet wird, wenn die Funktionen nur erst für spitze Winkel definiert sind, ist mir nur einmal (Heger) begegnet. Dort wird dann im Anschluß daran ein Weg angegeben, wie man die Funktionswerte beliebiger spitzer Winkel tatsächlich berechnen kann.[1]) Ein anderer häufiger Beweis des Additionstheorems knüpft an den Satz des Ptolemäus (im Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Gegenseiten) an, er findet sich z.B. bei Mehler, bei Bork-Nath und bei Hessenberg. Schließlich wird das Additionstheorem auch am Dreieck hergeleitet, so machen es beispielsweise Conradt, Hessenberg und, wie oben schon bemerkt, Hubert Müller.

Im weiteren Ausbau der Trigonometrie werden von dem einen lieber geometrisch, von dem anderen lieber algebraisch abgeleitet der Tangenssatz $\left(\text{Ausdruck für } \frac{a+b}{a-b}\right)$ und die Mollweideschen Formeln $\left(\text{Ausdrücke für } \frac{a+b}{c} \text{ und } \frac{a-b}{c}\right)$. Daran schließt sich meist noch eine mehr oder weniger weit ausgeführte Untersuchung der Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln und den Radien der Kreise des Dreiecks, also z. B. wenn r der Radius des Umkreises, ϱ der des Inkreises ist,

$$\varrho = 4\, r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Oft wird auch die halbe Seitensumme

$$s = \frac{a+b+c}{2},$$

eingeführt, also beispielsweise

$$s = 4\, r \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Diese Kapitel bieten den älteren Büchern, wie z. B. denen von Reidt, Spieker, ausgedehntes Übungsmaterial. Neuere Bücher lehnen ziemlich einmütig den „Formelkram" ab.

Die sphärische Trigonometrie lehnt sich entweder an die Theorie der Ecken in der Stereometrie an, oder sie folgt dem Stereometriepensum nach. Man findet, analog dem Vorgehen in der Ebene, in der Regel die Dreiteilung: Rechtwinklige Ecke, schiefwinklige Ecke, Anwendungen (so

1) Der Leitfaden von Heger zeichnet sich überhaupt durch eine Reihe neuer methodischer Ideen aus. Es sei hier nur die Einführung der Richtungsgleichheit ($\approx$) von Winkeln erwähnt. So ist beispielsweise $0° \approx 360°$.

z. B. Thieme, Kambly). Wird diese Reihenfolge eingehalten, wobei die zehn Formeln zwischen Winkeln und Seiten der rechtwinkligen Ecke in die Nepersche Regel zusammengezogen werden können, so führt man Sinus- und Cosinussatz für das schiefwinklige sphärische Dreieck auf das rechtwinklige zurück. Beginnt man dagegen (z. B. Spieker) gleich mit dem allgemeineren Fall, so werden die Beweise natürlich direkt aus der Betrachtung der Ecke erschlossen. Auf den preußischen Gymnasien ist damit die Zahl der Lehrsätze erschöpft. Recht oft begnügt man sich sogar mit dem Cosinussatz allein.

An den realistischen Anstalten, gelegentlich wohl auch einmal an Gymnasien werden dann außer Sinus- und Cosinussatz, dem zuweilen ein „zweiter“ Cosinussatz

$$\cos\alpha = \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \cos a - \cos\beta \cdot \cos\gamma$$

an die Seite gestellt wird, häufig noch abgeleitet die Halbwinkelsätze, die Gaußschen (zuweilen auch nach Delambre oder Mollweide benannten) Gleichungen

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{a+b}{2} : \sin\frac{c}{2}$$

usf. und die Neperschen Analogien, die durch Division je zweier entsprechender Gaußscher Gleichungen entstehen. Dazu kommt dann noch der Ausdruck für den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks. Weitergehende Sätze werden im System selten abgeleitet, höchstens wird etwa auf den In- und Umkreis und die Ankreise des sphärischen Dreiecks eingegangen.

13. Die trigonometrische Aufgabe. Praktische Geometrie.

Unter den der Trigonometrie angeschlossenen Aufgaben spielen zunächst zwei Gruppen eine Rolle, die von den anderen isoliert sind und überhaupt mehr formalen als praktischen Wert haben, die „Trigonometrischen Gleichungen“ und die „Goniometrischen Aufgaben“, d. h. Aufgaben, welche Umwandlungen goniometrischer Ausdrücke in andere verlangen.

An der Spitze der eigentlichen Anwendungen der Trigonometrie stehen die den vier Kongruenzfällen entsprechenden Grundaufgaben; ihre Erledigung hängt von den zur Verfügung stehenden Lehrsätzen ab. Manche Verfasser sind bestrebt, in der Ebene und auf der Kugel möglichst mit Sinus- und Cosinussatz auszukommen. Andere wieder verwenden mit Rücksicht auf die logarithmische Rechnung mit Vorliebe Mollweidesche Formeln und dgl.; Schuster vermeidet den Cosinussatz zunächst ganz und gar. Nun schließen sich, ebenso wie an die Kongruenzfälle die Dreieckskonstruktionen, so hier die mehr oder weniger „schwierigen“ Dreiecksberechnungen an. Es werden auch gelegentlich (so bei Conradt) methodische Anleitungen zur Auflösung schwierigerer Dreiecksaufgaben gegeben. Eine systematische Zusammenstellung von 305 solchen Auf-

gaben und ihren Lösungen gibt W. Madel. Dann schließt sich zuweilen die Polygonometrie an, die Berechnung von Vier- und Vielecken.

Bei der wirklichen Durchführung der Berechnungen spielt die rechnerische Praxis eine große Rolle. Man findet deshalb in älteren wie in neueren Lehrbüchern darauf großen Wert gelegt; besonders sind das umfangreiche Werk von Hammer und die neuerdings von Thieme herausgegebene Aufgabensammlung von Reidt zu nennen. Rechenschemata findet man in einer ganzen Anzahl von Lehrbüchern der Trigonometrie.

Es herrscht heute, wie das eingehender noch bei den Logarithmen zur Sprache kommen wird, die offensichtliche Tendenz, von dem früheren vielstelligen (meist 7-stelligen) Rechnen zu weniger genauem (4-stelligem, in manchen rein praktischen Fällen gar 3-stelligem) Rechnen überzugehen. Führer dieser Bewegung sind besonders A. Richter, Schülke und Thaer. Damit hängt es zusammen, wenn jetzt mehr Wert auf Abschätzungen der Genauigkeitsgrenzen und Fehlerbestimmungen bei den Rechnungen gelegt wird, die zwar schon früher zuweilen (z. B. bei J. G. F. Müller, Baltzer, Helmes) nicht fehlten, deren Wichtigkeit aber immer mehr anerkannt wird.

Alle diese Dinge haben eine weitergehende Bedeutung, wenn man sie unter dem Gesichtspunkt der praktischen Anwendungen in der Geometrie überhaupt betrachtet. Früher war der Glaube an den formalen Zweck des Mathematikunterrichtes, wie er sich etwa in der alten Fassung von Reidts Anleitung ausspricht, vorherrschend. Der mathematische Unterricht hatte nach dieser Ansicht die Aufgabe, die Fähigkeit zum logischen Denken und zur abstrakten räumlichen Anschauung heranzubilden und zu fördern; die Anwendungen kamen erst in zweiter Linie in Betracht. Zwar erklärte es Helmes für wünschenswert, zu zeigen, „daß man mit der Mathematik auch etwas machen kann“, und brachte also auch in der Trigonometrie Anwendungen aus den verschiedensten Gebieten, und selbst Wittstein, sonst einer der strengsten Verfechter des formalen Prinzips, meinte, es bedürfe kaum der Bemerkung „wie zweckmäßig es ist, statt der hier (in seinem Lehrbuch) gegebenen abstrakten Rechnungsbeispiele solche zu wählen, welche irgendwelchen Anwendungen der Mathematik entnommen sind, z. B. der praktischen Geometrie, der Geographie, der Astronomie etc.“ Er selbst verzichtete aber auf solche Beispiele, „weil dieselben zuviel erläuterndes Detail erfordert haben würden.“

In letzter Zeit hat sich in dieser Hinsicht ein entschiedener Umschwung vollzogen, eine Folge nicht zum wenigsten der modernen Entwicklung der Technik und des technischen Hochschulwesens und der damit Hand in Hand gehenden angewandten Mathematik. Man denkt auch in der Mathematik utilitaristischer. Es ist recht bemerkenswert, daß man gerade auf die Unterrichtsfächer hingewiesen hat, die in der Betonung formaler Ziele der Mathematik glichen, auf die alten Sprachen. „Obwohl die Beibehaltung der alten Sprachen häufig durch formale Bil-

dung begründet wird, so sorgen doch gerade die Vertreter dieser Fächer dafür, daß die Schüler eine Fülle von sachlichen Belehrungen aus dem Gebiete der Poesie, der bildenden Künste, der Geschichte, der Staatsverwaltung usw. erfahren. Deshalb dürfen die Anwendungen nicht allein die Einkleidung eines mathematischen Gedankens enthalten, sondern sie müssen auch für sich anregend und bedeutend erscheinen." (Schülke.)

In der Trigonometrie haben praktische Aufgaben wohl nie ganz gefehlt; arg vernachlässigt war dagegen lange Zeit die praktische Seite der planimetrischen Konstruktionsaufgaben. Wir wollen daher zunächst einiges über die praktische Anwendung der der trigonometrischen Aufgabe wesensverwandten planimetrischen Konstruktionsaufgabe nachtragen. In erster Reihe sind hier Kretschmer und Degenhardt zu nennen, wenngleich auch sie aus älteren Lehrbüchern schöpfen konnten, beispielsweise aus Rummer 1850 (dort findet sich ein umfangreicher Abschnitt über „praktische Geometrie").

Die geometrischen Konstruktionsaufgaben sollen im „Alltagsgewand" (Walther) erscheinen. Da wird schon in der Quarta beispielsweise die Frage aufgeworfen: Wie hoch ist ein Kirchturm? Die Länge des Kirchturmschattens und die Höhe der Sonne werden vom Schüler selbst gemessen, und danach wird in verkleinertem Maßstabe das gesuchte Stück konstruiert. Daß hier die Ähnlichkeitslehre hineinspielt, die der Schüler noch nicht kennt, macht nichts aus; er ist ja auch an Vergrößerung und Verkleinerung durch die parallelgehenden Figuren an der Wandtafel und in seinem Heft gewöhnt. In ähnlicher Weise liefert etwa ein Schülerausflug die Daten zu folgender (der sogenannten Hansenschen) Aufgabe: Von einer angenähert geradlinigen Chaussee sieht man zur Rechten zwei Kirchtürme. Wie kann man ihre Entfernung konstruieren, ohne die Chaussee zu verlassen?

Die Beispiele zeigen schon, daß besonders die Feldmeßkunst und die Höhenmessung geeignete Sachgebiete für solche Aufgaben sind.

Die Schulbücher tragen diesen Bestrebungen immer mehr Rechnung; besonders auf die praktische Bedeutung der verschiedenen Kongruenzfälle wird vielfach hingewiesen (z. B. Behrendsen-Götting, Bork-Crantz-Haentzschel, Walther). Dabei wird die Verwendung praktischer Maß- und Zeichenapparate im Unterricht gestreift; so berücksichtigte schon Helmes Winkelhaken, Nonius, verjüngten Maßstab (die Instrumente, die uns in den Geometriebüchern des 17. und 18. Jahrhunderts so häufig begegnen), dann in der Ähnlichkeitslehre den Storchschnabel, der, um auch neuere Beispiele zu nennen, bei Bork-Crantz-Haentzschel, bei Behrendsen-Götting u. a. besprochen wird. Besonders ausführlich kommt die Benutzung solcher Apparate natürlich in dem Lehrbuche von Henrici-Treutlein zu Wort, das von Anfang an die Beweglichkeit der Figuren in den Mittelpunkt stellt (vergl. Abschnitt 9).

Hand in Hand mit dem Eindringen der praktischen Anwendungen in die Planimetrie geht eine weitere Ausgestaltung der angewandten

trigonometrischen Aufgabe, in der Ebene wie auf der Kugel. Von den eifrigen Förderern dieser Bestrebungen seien genannt A. Richter, Schülke, Schuster und Martus (Raumlehre, 2. Teil). Die Aufgabensammlungen der erstgenannten sind bahnbrechend gewesen, haben sie doch die Aufgabensammlungen ganz allgemein dahin beeinflußt, daß die nach Sachgebieten geordneten Aufgabengruppen (vgl. etwa Schultze-Pahl, Müller-Kutnewsky) immer umfangreicher wurden. Andererseits haben einige Lehrbücher in der Weise reagiert, daß sie auch auf die Beobachtungsmethoden eingehen. So findet man Abbildungen von Theodoliten u. dgl. (Fenkner); Kreuschmer, der Herausgeber des für die Unterstufe bestimmten Lackemannschen Leitfadens, beschreibt sehr ausführlich für die Hand des Schülers bestimmte Winkelmeßapparate.[1]) Überhaupt wird mehrfach empfohlen, die Einführung in die Trigonometrie im Anschluß an Messungen im Freien oder auf dem Schulhof vorzunehmen (vgl. den Leitfaden von Rehfeld).

Die Anzahl der Anwendungsgebiete hat sich vermehrt. Ehedem waren es fast ausschließlich die Feldmessung und in der sphärischen Trigonometrie einige spezielle Aufgaben der mathematischen Himmelskunde, wobei denn gerade dieses Bindeglied von Mathematik und Physik eine weitere Ausgestaltung erfahren hat; besondere Lehrbücher für diesen Zweig, wie etwa das von Martus, geben davon Zeugnis. Um einen Begriff von der gegenwärtigen Mannigfaltigkeit zu geben, stelle ich nach Schülkes Sammlung einige Aufgabengruppen zusammen: Größe und Entfernung der Himmelskörper; Bewegung der Planeten; Konjunktion und Opposition; Auf- und Untergang der Planeten; tägliche Bewegung der Gestirne; jährliche Bewegung der Sonne; Stellung der Fixsterne; astronomische Ortsbestimmung. Aus der Physik wird in der Regel das Gesetz vom Kräfteparallelogramm ausgenutzt. Ziemlich jung ist die Heranziehung der Nautik, die zuerst A. Richter in seiner Sammlung in umfangreicherem Maße berücksichtigt hat.

In engster Beziehung steht die Trigonometrie in ihren Anwendungen mit der Stereometrie, der wir uns jetzt zuzuwenden haben.

14. Stereometrie: Lehrstoff.

Der Lehrstoff der Stereometrie zerfällt in zwei Gebiete, die man mit Focke-Kraß als die Lehre von den ungeschlossenen und von den geschlossenen stereometrischen Gebilden einander gegenüberstellen kann. Im ersten Teile sind die grundlegenden Sätze über die gegenseitigen Beziehungen von Ebenen und Geraden zu behandeln. Die Einleitung gibt, wie früher schon einmal erwähnt, einigen Autoren (z. B.

1) R. Kreuschmer, Der Universal-Winkelmeßapparat. Breslau. (Hirt.) 1903, vergl. auch Lackemann, Teil 2 und R. Kreuschmer, Das Additionstheorem der Winkelfunktionen und die Änderungen der Funktionswerte mit dem sich ändernden Argument am neuen Transporteur für Winkelfunktionen. Progr. Realschule Barmen 1909.

Thieme) erwünschte Gelegenheit, auf einige Axiome und damit auf die Axiomatik überhaupt hinzuweisen. Die überwiegende Mehrzahl der Bücher jedoch geht auf diese Dinge nicht ein, die Axiome werden ohne besondere Angabe der Anschauung entnommen oder durch die selbstverständliche Benutzung der Kinematik ersetzt; nur der später noch zu berührende Grundsatz des Cavalieri wird zumeist, ähnlich wie das Parallelenaxiom in der Planimetrie, als einziges Axiom angeführt.

Über den Inhalt des ersten Teiles orientiere etwa die Disposition des Wrobelschen Leitfadens: 1. Gerade und Ebene in ihren Beziehungen zueinander. a. Senkrechte, b. Geneigte, c. Parallele Gerade zu einer Ebene, d. Schnitt von zwei Ebenen, e. Parallele Ebenen, f. Drei Ebenen; 2. Körperliche Ecken.

Die Wertschätzung dieser Teile der Stereometrie ist bei den einzelnen Fachkollegen eine sehr verschiedene. Die einen verhalten sich mehr oder weniger ablehnend, weil sie zu abstrakt seien; andere sehen gerade das Üben an abstrakten geometrischen Gebilden als bestes Mittel an, die Fähigkeit der räumlichen Anschauung zu entwickeln. Daß die Förderung dieses Zieles der Mathematik eines der wichtigsten ist, darüber war man sich schon in der Zeit einer noch rein auf das Formale gerichteten Methodik einig, daß aber die Wertschätzung noch immer weiter gewachsen und durch den Hinweis auf die praktischen Anwendungen vertieft ist, wie das auch in den Lehrplänen zum Ausdruck gekommen ist, dürfte in erster Linie das große und bleibende Verdienst von Holzmüller sein. Auch die Vorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte[1]) haben wiederum nachdrücklichst auf „die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens" hingewiesen.

In der Lehre von den Körpern macht meist ein Abschnitt über allgemeine konvexe Körper den Beginn. Es wird hier der Eulersche Satz über die Invarianz von $e - k + f$, wo e die Zahl der Ecken, k die der Kanten, f die der Flächen bedeutet, für den einfachsten Fall bewiesen. Man schätzt diesen Satz nicht überall gleich ein (Reidt z. B. bringt den Abschnitt nur im Anhang), obwohl eine wichtige Folge daraus die Untersuchung der Anzahl regulärer (Platonischer) Körper ist. Die Gelegenheit, hier auf andere Gruppen von Polyedern hinzuweisen und so einen Ausblick auf die Analysis situs zu geben, wird von den Lehrbüchern selten ausgenutzt, Ansätze dazu finden sich z. B. bei Hauck-Kommerell und in dem älteren Leitfaden von Oppel.

Ist bisher von den „Gestalten des Raumes" die Rede gewesen, so wendet man sich jetzt den „Größen des Raumes" zu. Bei den speziellen Körpern wird in der Regel gleich die Berechnung der Oberflächen, der Inhalte, zuweilen auch der Neigungswinkel, Diagonalen u. dgl. in

1) Vergl. A. Gutzmer, Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Gesamtbericht. Leipzig. (Teubner.) 1908.

Angriff genommen. Eine Ausnahme machen Hauck und Kommerell, die sich übrigens bei den nicht von Ebenen begrenzten Körpern auf Umdrehungskörper beschränken: sie leiten zunächst einige allgemeine Eigenschaften der Körper ab.

Bei der Berechnung der Oberflächen und Inhalte tritt bekanntlich die Schwierigkeit auf, daß bestimmte Integrale in elementarer Weise auszuwerten sind. Bei Quadern u. dgl. und bei dem Übergang von dem dreiseitigen Prisma zur dreiseitigen Pyramide kommt man mit Zerlegungsgleichheit aus, die im Falle der erstgenannten Körper zuweilen (z. B. bei Bork-Nath, Hauck-Kommerell), im Falle der dreiseitigen Pyramide fast immer benutzt wird. Andere führen außerdem den Grenzübergang bei der Pyramide (aufeinander geschichtete immer kleiner werdende flache Prismen) direkt durch (z. B. Reidt, Boymann). Dabei empfiehlt es sich vielleicht, den Grenzübergang zunächst einmal am Dreieck (als Summe von Trapezen oder Recktecken) auszuführen.

Im weiteren wird dann von der einen Gruppe das sogenannte Cavalierische Prinzip[1]) angewandt (zwei Körper sind raumgleich, wenn sie zu einer Ebene in eine solche Lage gebracht werden können, daß die in beliebigen, aber gleichen Entfernungen von dieser Ebene konstruierten, der Ebene parallelen Durchschnittsfiguren einander gleich sind). Dieser Satz gestattet dann, nachdem zuvor der Zylinder- und Kegelinhalt erledigt, den sogenannten Archimedischen Satz über den Inhalt der Halbkugel zu beweisen. Ein anderer Weg, die Kugel der Berechnung zu erschließen, ist die Durchführung der Oberflächenintegration bei einer Kugelzone, indem man diese als Summe von Kegelstumpfmänteln ansieht. Diesen Weg gehen Koppe-Diekmann, Reidt, Schwering und viele andere. Die Beziehung zwischen Oberfläche O und Inhalt J der Kugel wird durch einen andern Grenzübergang hergestellt: man betrachtet die Kugel als Summe unendlich vieler Pyramiden mit dem Kugelradius als Höhe, deren Grundflächen die Oberfläche der Kugel bilden, und hat dann die Gleichung

$$J = \frac{O \cdot r}{3}.$$

Unter den besonderen Körpern, die neben Zylinder, Prisma, Kegel, Pyramide, Kegelstumpf, Pyramidenstumpf und Kugel noch betrachtet werden, kehrt in fast allen Lehrbüchern das Prismatoid wieder. Ein Prismatoid ist ein Polyeder, dessen Grundflächen zwei beliebige parallele

1) Eine allgemeinere Methode geometrischer Integration, die das Cavalierische Verfahren als Spezialfall in sich schließt, hat J. Finsterbusch, Geometrische Integrationen. (32. Jahresbericht des Vereins für Naturkunde zu Zwickau. Leipzig. (Teubner.) 1903.) entwickelt. Dabei vergleicht er nicht nur wie Cavalieri zwei Körperinhalte J_1 und J_2, von denen J_1 gesucht, J_2 bekannt ist, und wobei dann $dJ_1 = dJ_2$ ist, sondern drei, wobei etwa J_1 der gesuchte, J_3 der bekannte ist und J_2 so eingeschaltet wird, daß z. B. $dJ_1 - dJ_2 = dJ_3$ und gleichzeitig $J_1 : J_2$ bekannt, J_1 und J_2 also bestimmbar ist.

Polygone und dessen Seitenflächen im allgemeinen Dreiecke sind, welche mit je einer Grundfläche eine Seite und mit der anderen einen Eckpunkt gemein haben. Die Theorie dieses Körpers, den schon Steiner untersucht hat, ist von Wittstein entwickelt worden, und seitdem ist fast zugetroffen, was Wittstein hoffte, daß nämlich dieser Körper „ein unverlierbares Eigentum unserer Lehrbücher“ sein werde; ob auch des Unterrichts, lasse ich dahingestellt. In der Tat begegnet man dem Prismatoid heute noch außerordentlich häufig, ich nenne nur Kambly-Roeder, Koppe-Diekmann, Lieber-von Lühmann; ja Heinze hat, von einer Verallgemeinerung des Prismatoids, dem Zentralkörper[1]), ausgehend, eine allgemeine, wie er schreibt, genetische Stereometrie aufgebaut. Spezielle Fälle des Prismatoids sind der Sphenisk (Keil, eine Grundfläche ist in eine Gerade zusammengeschrumpft) und der manchmal recht ausführlich behandelte (z. B. bei Wrobel) Obelisk, von dem wieder der Pyramidenstumpf ein Spezialfall ist.

Für das Volumen des Prismatoids ergibt sich eine einfache Formel

$$V = \frac{h}{3}(M + 2D),$$

wo h die Höhe, M das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen und D der Mittelschnitt ist. Dieser unter dem Namen Newton-Simpsonsche Formel bekannte Ausdruck kehrt noch bei vielen anderen Körpern wieder. Das Prismatoid ist ein spezieller Fall des sogenannten Simpsonschen Körpers. Dieser ist ein (im allgemeinen) von zwei ebenen und parallelen Figuren als Grundflächen und von ebenen oder krummen Flächen als Seitenflächen begrenzter Körper der Art, daß der Flächeninhalt eines der einen Grundfläche parallelen Schnittes eine Funktion höchstens 3. Grades des Abstandes dieser Fläche von jener Grundfläche ist. Zu den Simpsonschen Körpern gehören u. a. die Rotationsellipsoide, — paraboloide und — hyperboloide, deren Volumen sich auf diese Weise berechnen läßt. Die Newton-Simpsonsche Formel findet sich in vielen Lehrbüchern. (Vgl. besonders Koppe-Diekmann und Holzmüller).

Ein weiteres Kapitel, das hier noch zu nennen wäre, ist die an die Guldinsche Regel[2]) anschließende Berechnung von Rotationskörpern (vgl. Bork-Nath, Koppe-Diekmann, Lieber-von Lühmann u. v. a.).

---

1) „Der Zentralkörper hat zwei parallele ebene Flächen als Grundflächen; jeder Eckpunkt der einen Grundfläche ist entweder nur mit dem korrespondierenden Eckpunkt der anderen oder sowohl mit dem korrespondierenden als auch mit dem benachbarten verbunden; die Seitenflächen entstehen dadurch, daß sich an je zwei benachbarten Seitenkanten Gerade parallel zu den Grundflächen fortbewegen. Die Seitenkanten sind gerade oder solche krumme Linien, die ein bestimmtes geometrisches Bildungsgesetz haben.“

2) Der Inhalt eines durch Drehung einer ebenen Fläche um eine in derselben Ebene liegende Gerade entstandenen Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der Fläche und dem von ihrem Schwerpunkt beschriebenen Kreise. Wird in entsprechender Weise eine ebene Linie um eine in derselben Ebene liegende Gerade gedreht, so ist die von ihr beschriebene Oberfläche wieder gleich dem Produkt aus der Länge der Linie und dem von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Kreise.

15. Stereometrie: Methode.

Nach diesen Andeutungen über den Lehrplan in der Stereometrie ist noch einiges über die Unterrichtsmethode hinzuzufügen. Wir haben früher gelegentlich der Propädeutik der ebenen Geometrie darauf hingewiesen, daß in diesem Kapitel in der Regel insofern eine Fusion mit der räumlichen Geometrie vorhanden ist, als auch räumliche Gebilde zur Sprache kommen. Von einer weiteren Beibehaltung ist nun in den heutigen Lehrbüchern nirgends die Rede (vgl. jedoch über eine Bemerkung von Henrici-Treutlein Abschnitt 9). Dagegen führen von den älteren deutschen Lehrbüchern einige die Fusion durch, nämlich C. A. Bretschneiders Lehrgebäude der niederen Geometrie[1]) und Frischaufs durchaus modern gehaltene Elemente der Geometrie[2]). Wenn heute derartige Lehrbücher ganz fehlen, so ist das eine Folge der Lehrplanbestimmungen. Für die Fusion, die bekanntlich in Italien recht viele und auch in Frankreich einige Anhänger zählt, hat sich in Deutschland neuerdings besonders Schülke ausgesprochen[3]). Tatsächlich wird ja schon der planimetrische, später dann der trigonometrische Unterricht vielfach Anwendungen auf Körperbegrenzungen, Körperdiagonalen u. dgl. heranziehen.

Von grundlegender Bedeutung für den Unterricht ist die mehrfach durch die Lehrpläne vorgeschriebene Gliederung des Stereometriepensums in eine Unterstufe und eine mehr systematische Oberstufe. In vielen Fällen wird auf der Unterstufe, für die zuweilen ganz ebenso wie in der Trigonometrie besondere kleine Leitfäden existieren, wie die von Reidt, Focke-Kraß, Schwering, nur von geschlossenen Körpern gehandelt. Ja, es wird manchmal (Schwering) gar auf eine regelrechte Ableitung der Inhalts- und Flächenformeln verzichtet, sie werden nur plausibel gemacht oder in anderen Fällen nachträglich „bestätigt". Wenn auf der Unterstufe auch auf die Beziehungen von Geraden und Ebenen eingegangen wird, so geschieht es meist ganz in propädeutisch-anschaulicher Form. Schwering greift die Lote auf Ebenen heraus, bei Schuster werden die Beziehungen erst an geeigneten Körpern aufgesucht und dann erst in losgelöster Form besprochen (z. B. Ebene und Lot dazu an Höhe und Grundebene einer Pyramide). Einige für Realschulen bestimmte Bücher über Stereometrie, wie die von Böttgers, Wehner, der zweite Teil der Lackemannschen Geometrie, übrigens auch Heinrich Müller, gehen allerdings schon auf der Unterstufe systematisch auf Gerade und Ebene ein.

Da „die Stereometrie ihrem Wesen nach einen durchaus anschaulichen Unterricht verlangt" (Schwering), so wird vielfach auf räumliche

---

1) Jena. (Manke.) 1844.

2) Leipzig. (Teubner.) 1877.

3) Schriften der Phys.-Ökonom. Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. 49 (1908), pg. 63. Auch Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 39 (1908), 442.

Modelle hingewiesen. Es ist hier nicht der Ort, darauf einzugehen, welche Modelle in den Schulen im Gebrauch sind.

Daneben kommen gerade hier Anwendungen auf das wirkliche Leben in Betracht. „In den sehr abstrakten Gebieten der Lage von Punkten, Geraden und Ebenen werden sowohl an das räumliche Anschauungsvermögen als an die logische Urteilskraft der Schüler höhere Anforderungen gestellt; deshalb wurden gerade hier gegen die Übung theoretischer Lehrbücher der Mathematik Hinweise auf Vorkommnisse und Anwendungen im Leben eingestreut... Dem einen werden freilich diese Einstreuungen als Entweihung der strengen Wissenschaft erscheinen, während ein anderer darin vielleicht bloß den dürftigen Versuch sieht, die graue Theorie mit dem grünen Baum des Lebens zu vereinen“ (Henrici-Treutlein).

Von manchen älteren Lehrbücherverfassern werden exakte Zeichnungen höher eingeschätzt als Modelle; Hauck meint: „Eine rationelle Darstellungsmethode scheint mir in dieser Beziehung noch wichtiger zu sein als Modelle“, und auch Helmes verwirft Modelle und weist gleichfalls auf Zeichnungen hin. Die räumliche Vorstellung sei „frei nach der Phantasie“! Immerhin kann man diesen Standpunkt wohl als veraltet bezeichnen. Bei der Besprechung der darstellenden Geometrie wird noch einmal auf die Zeichnung räumlicher Gebilde zurückzukommen sein.

Über die Beweise der stereometrischen Sätze ist Ähnliches zu berichten wie in der Planimetrie. Der Analyse von Beweisen (Kretschmer, Wehner), der Angabe von Beweismitteln (Fenkner) begegnen wir auch hier. Wichtig sind Hinweise auf Analogien zwischen ebenen und räumlichen Gebilden (Wehner).

Die stereometrische Aufgabe (eine der umfangreichsten Sammlungen ist die zuletzt von Much herausgegebene von Reidt) beschränkt sich vielfach auf die Ausführung von Berechnungen, wobei derartige Ansätze gern benutzten Anwendungsstoff für die Algebra (Gleichungen zweiten und dritten Grades, Maxima und Minima usw.) und die Trigonometrie geben. Daneben aber erscheint anderen die Ausführung geometrischer Konstruktionen wertvoller (z. B. Spieker); besonders die an die Konstruktion von Senkrechten zu einer Ebene, an die dreiseitige Ecke usf. anschließenden Aufgaben sind in den meisten Büchern vertreten. Wesentlich diesen für „die intensive Ausbildung des Anschauungsvermögens“ wichtigsten Aufgaben ist die von Thieme herausgegebene, teilweis auf Kretschmer zurückgehende Aufgabensammlung gewidmet. „Gerade die Fähigkeit klarer räumlicher Anschauung, die Fähigkeit exakter Zergliederung räumlicher Anschauungen ist es, welche die Studierenden der Mathematik, der Technik, der Naturwissenschaften und der Medizin brauchen, welche jeder braucht, der sich mit Naturwissenschaften beschäftigen will, und diese Fähigkeit wird nur gewonnen durch Lösen konstruktiver stereometrischer Aufgaben und durch Beweisen stereome-

trischer Lehrsätze". Praktische Anwendungen liefert für die Stereometrie vor allem die Kristallographie (siehe besonders das Lehrbuch von Sauerbeck). Umgekehrt wird natürlich auch der Unterricht in der Kristallographie gern auf die Stereometrie zurückgreifen. Eine gegenseitige Rücksichtnahme ist hier wie in allen solchen Fällen sehr angebracht.

Mit der Stereometrie in engster Verbindung steht die darstellende Geometrie, derart, daß im Unterricht sich beide gegenseitig ergänzen. Im Lehrbuch sind beide Gebiete meist getrennt behandelt, wohl eine Folge der geschichtlichen Entwicklung, welche die darstellende Geometrie erst sehr spät in den Lehrstoff der Schule hat eintreten lassen. Als Beispiel einer Vereinigung beider Gebiete weise ich auf das Lehrbuch von Heinrich Müller und A. Witting hin.

16. Darstellende Geometrie.

Der pflichtmäßige Unterricht der höheren Schulen beschränkt sich in der darstellenden Geometrie meist auf schräge und senkrechte Parallelperspektive, in manchen Fällen tritt die Zentralperspektive, auch die Schattenlehre hinzu. Bis zur Axonometrie wird man selten kommen; ein Kapitel über „die grundlegenden Konstruktionen der orthographischen Axonometrie" findet sich im dritten Teile der Elementarmathematik von Holzmüller.

Wie weit in die senkrechte Parallelperspektive einzudringen ist, die im Mittelpunkt des Unterrichts der darstellenden Geometrie zu stehen pflegt, darüber sind die Meinungen geteilt. Müller-Hupe z. B. schränkt das Pensum sehr ein, er verzichtet auf den Seitenriß und auf die Darstellung von Körpern, so daß also nur Geraden, Ebenen und ebene begrenzte Figuren behandelt werden: „Der Versuchung, den Gegenstand ausführlicher zu behandeln und die Aufgabe der Hochschule zum Teil vorweg zu nehmen, haben wir widerstanden in der Gewißheit, daß dabei der Mehrzahl der Schüler das Gefühl der Sicherheit nicht entstehen könne." Gercken geht wie die meisten Autoren bis zu den Körpern vor, beschränkt sich hier aber auf ebene Schnitte und verzichtet auf Durchdringungen. Er ist übrigens einer der wenigen, der neben Zentralperspektive auch einiges über Schattenkonstruktion bringt. Andere Autoren fügen schließlich noch einige wenige Körperdurchdringungen hinzu (z. B. Koppe-Diekmann, Thieme), in der Absicht, von diesen Aufgaben und ihrer Erledigung wenigstens einen Begriff zu geben. Das umfassendste Schulbuch über darstellende Geometrie ist C. H. Müller-Preslers Projektionslehre. Schmehls Elemente gehen etwas über den Lehrstoff der höheren Schulen hinaus.

Wie in der Trigonometrie und der Stereometrie, so haben wir auch hier eine Gliederung des Stoffes in Unter- und Oberstufe. Die Unterstufe umfaßt vor allem die schräge Perspektive; von einigen Körpern

werden wohl auch schon Grund- und Aufriß gezeichnet. In der Oberstufe tritt dann die Orthogonalprojektion in ihre Rechte, wobei zur Veranschaulichung stets die schräge Perspektive herangezogen wird. Für die realistischen Schulen liegt in Preußen die Unterstufe in Untersekunda (Beispiel eines Lehrganges: Bork-Nath, Schluß des 1. Teiles; für bayrische Realanstalten: F. Dicknether), für die gymnasialen Schulen in Prima (Beispiel eines Lehrganges: das Heft von Schütte). Die Oberstufe fällt für die Gymnasien fort, während sie in den Realanstalten in Prima oder auch in einzelnen Fällen in Abweichung von den offiziellen Lehrplänen in Obersekunda liegt.

Was die Art der Stoffbehandlung anlangt, so überwiegt die Darstellung an der Hand von Aufgaben. Nur selten wird besonderer Wert auf Herausarbeitung von Lehrsätzen gelegt. Alle Bücher geben die Fundamentalaufgaben in ausführlicher Darstellung, reiches Aufgabenmaterial enthält Beyel, der die gegebenen Größen, auf geeignete Koordinaten bezogen, in Zahlenwerten angibt. Dieses Buch legt Nachdruck auf exakte Ausführung der Zeichnungen (im Buche selbst ist keine einzige Zeichnung ausgeführt), es werden z. B. für einzelne Aufgaben Genauigkeitsproben angegeben.

Nach der Seite der Anwendungen ist das instruktivste Buch das von Müller-Presler. Ich gebe eine kleine Blütenlese der verschiedenen Sachgebiete. Bei Schrägbildern und Grundriß-Aufrißmethode werden Beispiele gewählt aus der Stereometrie, der Kristallographie, der mathematischen Erd- und Himmelskunde (Sonnenuhr, Drehung der Erde um die Sonne in schiefwinkliger Parallelperspektive, orthogonale und zentrale Kartenprojektionen bis zum Entwurf einer Merkatorkarte), aus der Botanik und Zoologie (Keilschnitt eines Laubholzes, Gefäße, Blattstellung, Bienenzelle) der Physik (Zungenpfeife, Strahlengang in einer Lochkamera, beim Prisma, Doppel ⊤-Anker, Tangentenbussole usw.), der Chemie (Gebilde aus der Stereochemie); Bergwerksaufgaben bieten Anwendungen für die Darstellung unbegrenzter Geraden und Ebenen. Aus dieser Aufzählung erhellt ohne viele Worte, daß das Buch ein „nützlicher Begleiter und Ratgeber für alle Fächer ist, in denen geometrische Zeichnungen gefordert werden."

Aber nicht nur der Schüler, sondern ebenso der Lehrer und der Schulbuch-Verfasser haben für ihre Zeichnungen von der darstellenden Geometrie zu lernen. Wieviel besonders die räumlichen Figuren auch mathematischer Schulbücher zu wünschen übrig lassen, ist von Kullrich in einem Aufsatze[1]) eindringlich dargestellt worden. Es gibt eine ganze Anzahl für Lehrer bestimmter Anleitungen zum Zeichnen räumlicher Gebilde; mehr praktischer Natur sind die Bücher von Holzmüller und Schoenflies, mehr theoretisch „Kreis und Kugel" von Richter. Einen

1) E. Kullrich, Bemerkungen über die Figuren des mathematischen Schulunterrichts. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 38 (1908), 16.

Überblick über das weite Gebiet der Anwendungen gibt dem Lehrer das sehr reich mit Abbildungen ausgestattete, auch durch seine Literaturangaben wertvolle Werk von Schilling[1]).

Es ist noch ein kurzes Wort über das Linearzeichnen zu sagen, genaueres wird wahrscheinlich ein besonderer Bericht der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission bringen. Es gibt Schulen, an denen die ganze darstellende Geometrie im Linearzeichnen, also an der Hand der praktischen Übungen gelehrt wird (z. B. die Sächsischen Oberrealschulen). Wo, wie das meistens der Fall, das Linearzeichnen wahlfrei ist und die darstellende Geometrie in den mathematischen Pflichtstunden erledigt wird, hat das Linearzeichnen zunächst die zeichnerische Durchbildung der Schüler zur Aufgabe. Gelegentlich begegnet man auf der Unterstufe auch einer Unterstützung des mathematischen Unterrichts durch Kurvenzeichnen u. dgl. (Bestimmung durch Punkte oder Tangenten in einem Koordinatensystem), zu dem die Untersuchung von Funktionen Anlaß gibt.

In der Oberstufe wird dann erheblich über das Pensum der darstellenden Geometrie in den Pflichtstunden hinausgegangen, besonders in der Lehre von den Durchdringungen, der Zentralperspektive, den Schattenkonstruktionen, wozu bisweilen noch einiges aus der graphischen Statik tritt.[2])

Neuerdings hat man in Preußen dem „mathematischen" Linearzeichnen ein „künstlerisches" zur Seite gestellt. Hier sollen unter Verzicht auf die mathematische Entwicklung (der Unterricht muß vom Zeichenlehrer, also in fast allen Fällen einem Nichtmathematiker, erteilt werden) Architekturzeichnen, Maschinenzeichnen, Terrainaufnahmen, Konstruktionen aus der graphischen Statik Lehrgegenstand sein. Die Frage des Linearzeichnens ist aber, wenigstens in Preußen, noch so sehr im Fluß, daß von einer Klärung der Ansichten noch keine Rede sein kann.[3]) Lehrbücher sind für das Linearzeichnen kaum in Gebrauch; eine Vorstellung von dem, was praktisch etwa geleistet wird, zeigen neben den ausführlichen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie (z. B. Müller-Presler) beispielsweise die Bücher von Eggers, welche Tafeln mit auszuführenden Zeichnungen — die man natürlich nicht mechanisch nachzeichnen lassen wird — enthalten.

1) F. Schilling, Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Leipzig. (Teubner.) 1904.

2) Vergl. z. B. R. Sellentin, Methodischer Lehrgang der Linearperspektive für höhere Lehranstalten. Progr. Oberrealschule Elberfeld 1903 und ders., Methodischer Lehrgang des Linearzeichnens für höhere Lehranstalten. Unterstufe. Progr. Oberrealschule Elberfeld 1904.

3) Vergl. über diese Frage: E. Kullrich und K. Wägler, Das Linearzeichnen. Progr. Realgymn. mit Realsch. Gera. 1909.

Dritter Teil.

Arithmetik, Algebra, Analysis.

17. Das System der Schularithmetik.

Von dem großen, Arithmetik, Algebra und Analysis umfassenden Gebiete wird für die ersten Schuljahre ein Abschnitt als Rechenunterricht abgespalten. Es handelt sich hier um das Rechnen mit ganzen natürlichen Zahlen und mit Brüchen unter Bevorzugung der Dezimalbrüche. Die Rechenoperationen beschränken sich auf die vier rationalen, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division. Aus der Zahlentheorie kommen die Gesetze über Teilbarkeit und das Dezimalsystem, zuweilen auch allgemeine Zahlensysteme hinzu. Das Rechnen läuft aus in die sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten (z. B. Mischungs-, Prozent-, Zinsrechnung), an die sich in realistischen Schulen, besonders in solchen, die sich in ihrem Charakter den Handelsschulen nähern, kaufmännisches Rechnen – in sächsischen Oberrealschulen z. B. bis Untersekunda – anschließt.

Wir wollen hier auf den Rechenunterricht, bei dem vor allem die methodische Behandlungsweise eine andere ist als in dem späteren mathematischen Unterricht, nicht eingehen; die Erwähnung war aber notwendig, da von hier aus eine Überleitung in den eigentlichen mathematischen Unterricht stattfindet, insofern in den Endphasen des Rechenunterrichts, besonders in der Zinsrechnung, ganz allmählich die Buchstabenformel auftritt. Der Rechenunterricht ist die Propädeutik der Arithmetik. Die in den höheren Schulen am meisten benutzten Rechenbücher sind die von Harms und Kallius, Schellen, Heinrich Müller-Pietzker, Günther und Boehm und Böhme.

Das ganze Gebiet der Arithmetik, Algebra und Analysis wird im Schulbetrieb bisweilen abweichend vom wissenschaftlichen Sprachgebrauch mit Arithmetik bezeichnet. Doch ist der Gebrauch sehr schwankend: Schwering z. B. nennt sein Lehrbuch „Arithmetik und Algebra“, seine Aufgabensammlung: „Aufgaben aus der Arithmetik“, obwohl natürlich auch hier die Gleichungen zu Wort kommen. Immerhin hat sich die Unterscheidung von Arithmetik und Algebra im wissenschaftlichen Sinne jetzt fast allgemein verbreitet. Gleich dort, wo der Funktionsbegriff auftritt, von Analysis zu sprechen, ist nicht üblich, im Schulgebrauch führen nur einige Kapitel (z. B. unendliche Reihen, Infinitesimalrechnung) den Namen Analysis, oft mit dem Zusatz „des Unendlichen“. Allgemein läßt

sich sagen, daß die drei Gebiete im Schulbetriebe stets ineinandergreifen, nie getrennt vorkommen, daß jedoch die systematischen Lehrbücher das Bestreben zeigen, die Trennung hervorzukehren.

Während in der Geometrie das System noch heute fast in denselben Linien sich bewegt wie vor 2000 Jahren, ist der Charakter der Schularithmetik ein durchaus moderner. Die Arbeiten Graßmanns[1]), Schroeders[2]) und besonders Hankels[3]) sind maßgebend für die heutige Systemgestaltung gewesen.

Die moderne Grundlegung der Arithmetik mit den Mitteln der Mengenlehre dürfte bis jetzt noch nicht Eingang in die Schulen gefunden haben. Zwar besitzen wir in dem Lehrbuch von Fr. Meyer ein Schulbuch, das durchaus dem „Cantorisme" huldigt, wie Poincaré einmal die Cantorsche Mengenlehre genannt hat. Da finden wir auf der dritten Seite z. B. den Lehrsatz „Eine wohlgeordnete Menge ist abzählbar auf jede Menge, welche durch Platzvertauschung zweier Elemente aus ihr entsteht" bewiesen, auf der sechsten Seite bereits die transfiniten Zahlen usf.; leider ist aber dem Buche nicht zu entnehmen, in welcher Weise der Verf. es seinem Unterrichte zugrunde gelegt hat.

Mir ist auch in einem Lehrbuche noch kein Versuch bekannt, die Mengenlehre der Oberstufe zu erschließen – während doch in der Geometrie der Oberstufe Hinweise auf die Axiomatik nicht fehlen. Daß aber gelegentliche Ausblicke auf diese Dinge möglich, ja vielleicht wünschenswert sind, hat ein Vortrag von H. Wieleitner[4]) auf der Erlanger Versammlung (1906) des Vereins zur Förderung des Unterrichts in Mathematik und Naturwissenschaft gezeigt. Von Darstellungen der Mengenlehre, die für Lehrer bestimmt sind, nenne ich Weber-Wellstein[5]) im 1. Band und auf endliche Mengen sich beschränkend im Anhang des 3. Bandes, und Kleins Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus[6]) im Anhang.

---

1) H. Graßmann, Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten, Berlin. 1861. „Tritt mit dem Anspruche auf, die erste streng wissenschaftliche Bearbeitung jener Disziplin zu sein, und mit dem noch weiter gehenden Anspruche, daß die darin befolgte Methode, wie sehr sie auch von der üblichen abweichen mag, dennoch in allen ihren wesentlichen Momenten nicht eine unter vielen möglichen, sondern die einzig mögliche Methode einer streng folgerichtigen und naturgemäßen Behandlung jener Wissenschaft sei". (Vorrede.)

2) Neben dem im Literaturverzeichnis genannten Schulbuche ist das gleichfalls mit dem ersten Band abgeschlossene Buch: E. Schroeder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 1. Bd. Leipzig. 1873. zu nennen.

3) H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme. Leipzig. 1867.

4) H. Wieleitner, Der Zahl- und Mengebegriff im Unterricht. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft. 12 (1906), 102.

5) Vergl. das Zitat in Abschnitt 5.

6) F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil 1: Arithmetik, Algebra und Analysis. Ausgearb. von E. Hellinger. Leipzig. (Teubner.) 1908.

Das Band, das sich durch das ganze System der Schularithmetik zieht, ist das von Hankel formulierte Permanenzprinzip; es kehrt immer wieder, bei jeder neuen Erweiterung des Zahlenbereiches und bei jeder Ausdehnung der Rechenoperationen auf die neuen Zahlen. Der Einblick in den gesetzmäßigen Aufbau des Zahlenbereiches wird ausdrücklich als eines der Ziele in den Lehrplänen angegeben. Wie man nach dem Permanenzprinzip verfährt, kann man etwa der Methodik der elementaren Arithmetik von M. Simon[1]) (für Schüler führt Pflieger diese Methode Simons durch) und dem Artikel von H. Schubert — der überhaupt sehr viel für das Eindringen dieser Lehren in die Schule getan hat — in der großen Enzyklopädie[2]) entnehmen, wobei zu bemerken ist, daß in beiden Fällen — absichtlich — über das auf der Schule Geleistete hinausgegangen wird. Dem Ausländer ist vielleicht noch die Angabe der Éléments d'Algèbre von O. Baer, eines für das französische Gymnasium in Berlin französisch geschriebenen Lehrbuches, erwünscht.

Das Schema der Rechenoperationen ist das folgende:

Rechenoperationen 1. Stufe:	1. Addition.	
	2. Subtraktion.	
2. Stufe:	3. Multiplikation.	
	4. Division.	
3. Stufe:	5. Potenzierung.	
	6. Radizierung.	
	7. Logarithmierung.	

Die Gesetze für diese Rechenoperationen (z. B. über Ausführbarkeit, Eindeutigkeit, Monotonie, das assoziative und das kommutative Gesetz bei der Addition) werden meist nicht als Axiome aufgestellt, sondern wie in der Geometrie aus der Anschauung, so hier aus Zahlenbeispielen erschlossen. — Das Prinzip der Permanenz führt bei den inversen Rechenoperationen 2, 4, 6, 7 zu neuen Zahlen, so daß für die allmähliche Erweiterung des Zahlbereiches sich das folgende Schema ergibt:

Positive ganze } relative oder „algebraische" } rationale } reelle Zahlen.
Null, Negative }
Gebrochene . . . . }
Irrationale . . . . }
Komplexe Zahlen.

In dem Schema sei als Abweichung vom wissenschaftlichen Sprachgebrauch die noch immer recht verbreitete (vergl. Fenkner, Mehler u. a.) gemeinsame Bezeichnung der positiven und negativen Zahlen als algebraische Zahlen noch einmal ausdrücklich bemerkt. —

1) M. Simon, Methodik der elementaren Mathematik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Leipzig. (Teubner.) 1906.

2) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. 1. Arithmetik und Algebra. 1898—1904. S. 1. Vergl. auch die wesentlich erweiterte Bearbeitung dieses Artikels durch Tannery und Molk in der Encyclopédie des Sciences Mathématiques. Éd. française. Tome 1. Volume 1. p. 1. (1904).

Auch einer Erweiterung des Schemas bei Heinrich Müller sei gleich hier gedacht; er führt in Anlehnung an den geschichtlichen Entwicklungsgang bei den gebrochenen Zahlen erst die Stammbrüche $1/n$, dann erst die allgemeinen gebrochenen Zahlen m/n ein.

Um an einem Beispiele einmal vollständig das Verfahren zu zeigen, wähle ich die negativen Zahlen. Man hat bei der Subtraktion gefunden, daß diese nur ausführbar ist, wenn der Minuend größer ist als der Subtrahend. Man führt jetzt neue Zahlzeichen ein derart, daß jede Subtraktion unter Hinzunahme der neuen Zahlzeichen ausführbar ist. Für diese neuen Zahlen, die Null und die negativen Zahlen, sind dann die Grundoperationen zu definieren. Das tut man so, daß die bisherigen Zahlgesetze sinngemäß erweitert werden. Wenn z. B. a^n für positives n definiert ist, wird $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ festgesetzt, und zwar gerade so, weil dann z. B. das Potenzgesetz $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ auch für die negativen Exponenten gilt. (Helmes sagt (1874): „Unabhängig von den besonderen Werten der Exponenten m und n wollen wir ganz allgemein den Quotienten $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ setzen, eine Bestimmung, die für $m > n$ den Lehrsatz ... ausspricht, für jeden anderen Fall aber die Bedeutung des Differenzexponenten verallgemeinert".)

Die Methode wird nicht immer so zum Ausdruck gebracht, wie es hier geschieht, vielleicht um die Zahl der Definitionen zu vermindern. Ich mache eine andere, im wesentlichen auf demselben Prinzip beruhende Form der Erweiterung nach Schwering an der Hand des Gesetzes über die Multiplikation von Brüchen klar. Es ist

$$ax = b \text{ gleichbedeutend mit } x = \frac{b}{a}$$

$$cy = d \quad - \quad y = \frac{d}{c}$$

folgl. $$a \cdot c \cdot x \cdot y = b \cdot d \quad - \quad x \cdot y = \frac{b \cdot d}{a \cdot c}.$$

Folglich ist $$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{b \cdot d}{a \cdot c}.$$

Der äußere Aufbau des Systems bietet Anlaß zu einiger Mannigfaltigkeit der Disposition, weil Erweiterung des Zahlbereiches und Erweiterung der Rechenoperationen ineinander greifen. Eine extreme Stellung nehmen diejenigen ein, welche, wie z. B. Wittstein und Fenkner, erst alle 7 Rechenoperationen an positiven ganzen Zahlen definieren — in der Schule wird man natürlich nie soweit gehen — und dann zu den Erweiterungen des Zahlbereiches übergehen. Ähnlich macht es Schüller, nur daß er die Logarithmierung zunächst fortläßt und sie dann am Schluß der ganzen, für die Unterstufe (bzw. Lehrerseminare) berechneten Arithmetik bringt. Übrigens kommt es öfter vor, daß der Logarithmierung eine Sonderstellung eingeräumt wird, auch wenn man sie als Umkehrung der Potenzierung definiert, z. B. bei Spieker.

Die in Frankreich übliche (auch geschichtlich erste) Definition auf Grund von Vergleichungen arithmetischer und geometrischer Reihen[1]), das sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, ist mir in einem deutschen Lehrbuche nirgends begegnet, doch wird in der Bardeyschen Aufgabensammlung (Neue Bearbeitung) in einem Kapitel „Verbindung von arithmetischen und geometrischen Reihen" die Frage wenigstens gestreift. Es wird dort z. B. die Frage aufgeworfen: Welche Reihe bilden die Logarithmen solcher Zahlen, die sich selbst in geometrischer Reihe folgen?

Die von Tannery[2]) und neuerdings bei uns von Klein[3]) angeregte Definition, welche die Hyperbelintegration benutzt, kommt für die erste Einführung der Logarithmen wohl kaum in Frage, doch ist ein Hinweis auf der Oberstufe angebracht, wie das Holzmüller[4]) auch in etwas veränderter Fragestellung getan hat.

Eine andere Gruppierung des arithmetischen Systems (Schwering[5])†) ist die, daß man erst die direkten Operationen einführt, dann schrittweis die Umkehrungen mit den zugehörigen Erweiterungen des Zahlkreises.

Der häufigste Fall ist eine Zweiteilung des Pensums in a) die vier ersten Rechenoperationen mit den negativen und gebrochenen Zahlen, b) die Rechenoperationen dritter Stufe mit den Irrationalzahlen und den komplexen Zahlen (z. B. Wrobel). Einen methodischen Einschlag bedeutet es, wenn zwischen beide Abschnitte als Vorbereitung des zweiten ein Kapitel „Quadratisches" eingeschaltet wird, wie das z. B. von Schubert geschieht.

Die Exaktheit in der Darstellung des Systemaufbaues läßt in den Einzelfällen noch zuweilen zu wünschen übrig. Daß zwischen Definition und Lehrsatz richtig unterschieden wird, ist nicht immer der Fall, oft hat man für beides auch den farblosen Ausdruck Rechenregel. Versuchen, $(-a)\cdot(-b)$ zu beweisen („folgt" aus

$$(m-a)\cdot(n-b) = mn - mb - an + ab$$

für $m = n = 0$) oder $a^0 = 1$ („folgt" aus

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

1) Vgl. E. Borel-P. Stäckel, Die Elemente der Mathematik. Bd. 1: Arithmetik und Algebra. Leipzig. (Teubner.) 1908.

2) J. Tannery, Notions de Mathématique. 2. Ed. Paris. (Delagrave.) Von dem Buche ist auch eine deutsche Bearbeitung erschienen: J. Tannery, Elemente der Mathematik. Deutsche Ausg. von P. Klaeß. Leipzig. (Teubner.) 1909.

3) F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I. Vergl. Zitat in Abschnitt 5.

4) Vergl. den Abschnitt „die Funktion $y = \frac{1}{x}$ und die Quadratur der Hyperbel durch den natürlichen Logarithmus" in Holzmüllers Lehrbuch. Teil III (nur in der 1. Aufl. von 1895!) S. 134 ff., auch desselben Aufsatz in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 27 (1896) S. 241.

5) Vgl. auch K. Schwering, Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer. Leipzig. (Teubner.) 1907.

für $m = n$) kann man noch immer gelegentlich begegnen. Erklärlich wird das, wenn man berücksichtigt, daß die meisten Arithmetikbücher nur Aufgabensammlungen sein wollen und daß im Unterricht zumal der Unterstufe oft mehr Gewicht auf das Lösen der Aufgaben als auf den Aufbau des Systems gelegt wird. Man begegnet aber leider denselben Fehlern auch manchmal noch in den im Anschluß an die Aufgabensammlungen erschienenen Lehrbüchern und in Leitfäden überhaupt. (In der Arithmetik ist recht häufig die Aufgabensammlung das primäre, an die sich dann Lehrbücher anschließen; besonders gut kann man das bei der Heisschen Sammlung verfolgen, auf die z. B. Boymann, R. W. Neumann, Wimmenauer zurückgehen.) Man hat auch den nach den Meraner Vorschlägen bearbeiteten Lehrbüchern (Behrendsen-Götting, Schwab-Lesser) den Vorwurf gemacht, daß sie z. B. bei der Potenzierung nicht mit der nötigen Strenge verführen.[1]) Hier spielt offenbar der gleiche Gegensatz, dem wir schon bei der Geometrie begegneten, hinein: Auf der einen Seite eine Bevorzugung rein anschaulicher Methoden, auf der andern die Forderung eines vollständigen, deduktiven Systems.

18. Methodische Bemerkungen zum arithmetischen Unterricht.

Den vorstehenden Ausführungen seien noch einige methodische Bemerkungen angefügt. Methodische Lehrbücher, die wenigstens andeutungsweise den wirklichen Unterricht wiedergeben, benutzen bei der Ableitung der Sätze in ausgedehntem Maße das Zahlenbeispiel. Daß z. B.

$$(2x + 3) \cdot (5x + 4) = 10x^2 + 23x + 12$$

ist, wird bei Schwering für $x = 0, 1, \ldots 4, \frac{2}{3}$ durchprobiert.

Nicht nur, daß bei der heuristischen Ableitung der Rechengesetze überall Beispiele mit natürlichen Zahlen die Leitlinien geben (vergl. etwa Schüller), auch Zahlenproben bei bewiesenen Sätzen sind immer und immer wieder am Platze (Schwering). „Was für die Geometrie die Anschauung, ist für die Arithmetik die Rechnung." Ja, Haacke stellt geradezu den Satz auf: „Die Kraft der Beweise verliert an Strenge nichts, wenn man sie statt an den allgemeinen an bestimmten Zahlen führt." Und Stäckel sagt in der Vorrede zu seiner Borel-Bearbeitung: „Ebenso wie man in der Geometrie einen allgemeinen Satz an

1) Das gleiche gilt von den französischen Schulbüchern, die einen Einfluß auch auf die Reformbewegung in Deutschland erlangt haben, vor allem von E. Borel, Algèbre 1. Cycle 1903, 2. Cycle 3. Éd. 1905 Paris. (Colin.); vergl. auch die bereits zitierte deutsche Bearbeitung von P. Stäckel. Übrigens meidet Borel die negativen Exponenten, bei ihm tritt das Gesagte besonders bei der Multiplikation zutage. Erheblich besser steht es mit der Strenge in dem vielbenutzten Buche von C. Bourlet, Précis d'Algèbre. Paris. (Hachette.) 1904. Will man ein ganz radikales Gegenbeispiel haben, so wende man sich an die Italiener, etwa an das Lehrbuch des kürzlich verstorbenen A. Faifofer, Elementi di Algebra. 17. Ed. Venezia. (Sorteni e Vidotti.) 1908.

einer besonderen Figur oder mehreren besonderen Figuren beweisen kann, so kann man auch in der Arithmetik einen allgemeinen Satz an einem besonderen Zahlenbeispiel oder mehreren gut gewählten Zahlenbeispielen beweisen, vorausgesetzt, daß man sich hier wie dort klar macht, daß die Beweisgründe, die in dem besonderen Fall ausreichen, allgemeine Gültigkeit besitzen."

Von vielen Autoren werden die negativen nicht vor, sondern hinter die gebrochenen Zahlen eingeschaltet. Man begründet das psychologisch-pädagogisch, indem man auf die Schwierigkeiten dieser Begriffsbildung hinweist, und kann dann auch die geschichtliche Entwicklung für sich sprechen lassen. Als Vertreter dieser Ansicht nenne ich Schwering, Spieker, Pietzker, Schülke und mit Berufung auf Dühring[1]) auch Haacke.

Im Anschluß an die gebrochenen Zahlen werden in den meisten Fällen die Proportionen in einem besonderen Kapitel behandelt.

Der Begriff der Irrationalzahl entzieht sich in seiner exakten Formulierung natürlich der Schule, z. B. ist Simons Darstellung der Reihenzahlen (in der Methodik der Arithmetik) nicht in das Schulbuch von Pflieger übergegangen. Man findet in der Wurzelrechnung, daß beispielsweise $\sqrt{2}$ sich nicht im Bereiche der rationalen Zahlen darstellen läßt. Man erweitert also das Gebiet, wobei man aber nicht exakt die Frage erledigt, um welche Zahlen man das Gebiet der rationalen Zahlen erweitert. Daß man auf diese Weise nur algebraische Zahlkörper, noch dazu nur zyklische oder aus solchen zusammengesetzte algebraische Zahlkörper trifft, kommt wohl gelegentlich einmal zur Sprache, wenn es sich um die Transzendenz von π handelt, ein Schulbuch, welches das tut, ist mir aber nicht bekannt. (Übrigens bringen Niemöller und Decker den Cantorschen Nachweis der Existenz transzendenter Zahlen.)

Die ganze Frage kann jedenfalls nicht vollständig erledigt werden. Wenn Netto[2]) noch dem Studierenden des ersten Semesters das Recht zugesteht, „an irrationale Zahlen zu glauben, das komplexe Gebiet als ein unentbehrliches Hilfsmittel dankbar und kritiklos hinzunehmen, jeden Grenzprozeß unbefangen mitzumachen und zum Unendlichen Stellung zu nehmen wie zum kleinen Einmaleins", so gilt das um so mehr vom Schüler.

Ein methodisch überaus fruchtbares Prinzip ist das der geometrischen Veranschaulichung arithmetischer Gesetze. Insbesondere sind hier anzuführen:

1. Die Darstellung der reellen Zahlen unter dem Bilde einer Geraden mit Nullpunkt. Als Muster nenne ich Behrendsen-Götting; zwar

1) Vgl. E. Dühring und U. Dühring, Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis, Algebra, Funktionsrechnung und zugehörigen Geometrie. Leipzig. (R. Reisland.) 1884; ein zweiter Teil erschien ebenda 1903. Die pädagogischen Ratschläge der Verfasser sind sonst wohl ohne Einfluß auf den Unterricht geblieben.

2) E. Netto, Elementare Algebra. Leipzig. (Teubner.) 1904.

erwähnt die Mehrzahl der Bücher die Zahlengrade, nutzt sie aber nicht so ausgiebig zur Versinnbildlichung der arithmetischen Operationen aus, wie das gerade Behrendsen und Götting tun.

2. Die Darstellung der komplexen Zahlen in der sogenannten Gaußschen Ebene.

3. Darüber hinaus werden auch Multiplikationsregeln, z. B. die Formeln für $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ und $(a+b)\cdot(a-b)$, sehr häufig, seltener der Algorithmus des Quadratwurzelziehens (Simon, Didaktik) unter dem Bilde von Flächen geometrisch versinnbildlicht. – Hier greift dann die Frage der graphischen Darstellung ein, die an späterer Stelle zur eingehenden Besprechung kommen soll.

Großen Wert legt der Unterricht auf die praktische Ausführung von Umformungen arithmetischer Ausdrücke. Die Klammerrechnung (man vergl. z. B. für solche Aufgaben Hofmanns Aufgabensammlung), das Heben und Erweitern der Brüche und der Exponenten nimmt einen sehr großen Teil der Aufgabensammlungen in Anspruch; man hat diesen „Reduktionen" (Bussler u. a.) eine Zeitlang wohl zu viel Wert beigemessen, sie sind oft zu „Knifftologien" ausgeartet; jedenfalls mehren sich die Stimmen gegen unvernünftige Klammerhäufungen u. dgl.; neuere Bücher schränken sie sehr ein.

Es bleiben noch einige Worte zu sagen über die Rolle der Arithmetik auf der Oberstufe. Das Rechnen mit komplexen Zahlen wird weiter ausgeführt und geht dann in algebraisch-analytische Problemstellungen ein.

Eine gegen das übrige Pensum ziemlich abgesonderte Stellung nimmt die Kombinatorik oder Syntaktik ein. Sie beschränkt sich in der Regel auf die Begriffe der Permutation, Kombination und Variation. In der Hauptsache ein Ausfluß des Regimes des formalen Zweckes der Mathematik, sucht sie sich, da die direkten Aufgaben (z. B. „Wie heißt die 38223te Variation zur 4. Klasse mit Wiederholung von den 25 Buchstaben des Alphabets") kaum in Betracht kommen, durch den Hinweis auf ihr vornehmlichstes Anwendungsgebiet, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, zu halten. Eine ausführliche, doch immer noch schulgemäße Darstellung dieses Gebietes findet man beispielsweise im ersten Bande von H. Schuberts Niederer Analysis.[1])

Im Anschluß an die Kombinatorik wird auch der binomische Lehrsatz (Ausdruck für $(a+b)^n$) für ganze Exponenten entwickelt, ein Satz, der in gleich unberechtigter Weise wie das Apollonische Berührungsproblem in der Planimetrie der Realanstalten vielfach noch als Gipfelpunkt der Mathematik am Gymnasium angesehen wird.

Von zahlentheoretischen Fragen kamen früher zwei zu ausgedehnterer Behandlung: die diophantischen Gleichungen und die Kettenbrüche.

1) H. Schubert, Niedere Analysis. 1. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen. 2. A. Leipzig. (G. J. Göschen.) 1908.

Heute dürften diese Gebiete aus dem obligatorischen Schulbetrieb fast ganz verschwunden sein, immerhin werden viele Schüler sie noch aus privater Arbeit kennen lernen. Die Lehrbücher haben nämlich diese Gebiete zum größten Teil noch beibehalten, ich nenne z. B. für die Kettenbrüche: Boymann, Focke-Krass, Kambly-Langguth, Lieber und von Lühmann, Reidt, Spieker, Wrobel, für die diophantischen Gleichungen dieselben Bücher und Bork-Nath, Heinrich Müller. Ausführlich ist die Darstellung in der oben zitierten Niederen Analysis von Schubert. Auf gewisse diophantische Gleichungen (z. B. auf $x^2 + y^2 = z^2$) wird wohl noch heute in jedem Unterricht eingegangen. (Dagegen werden die allgemeinen diophantischen Gleichungen zweiten Grades sehr selten und dann meist im Anhang erledigt; vgl. z. B. Bardey-Hartenstein). Die Zahlenkongruenzen werden bei Boymann kurz, etwas ausführlicher bei A. Hochheim und Niemöller-Dekker (hier z. B. auch die φ-Funktion) besprochen. Tellkampf geht bis zum Fermatschen Satz, Baltzer bis zu den quadratischen Resten.

Schließlich sei hier auch noch jenes Gebiet der Mathematik genannt, das eine so eigentümliche Stellung zwischen Geometrie, Arithmetik und Analysis einnimmt, die Kreisteilung. Für Schulen kommt hier die Konstruktion des Siebzehneckes in Frage, die, da eine rein geometrische Ableitung noch nicht bekannt, hier erwähnt werden muß. Ich habe diese Konstruktion in den Schulbüchern bei Holzmüller (im 3. Teil der Elementar-Mathematik) gefunden, wo die Lösung an die bei Schlömilch (Geometrie des Maßes) gegebene sich anschließt.

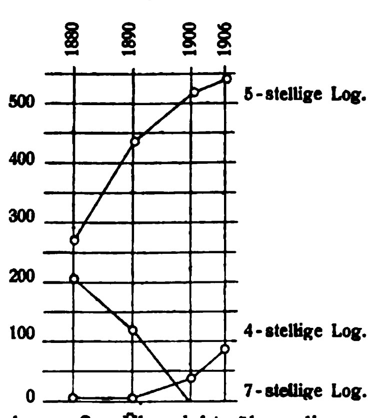
19. Numerisches Rechnen.

Wenn wir von dem Rechnen bis Quarta und dem kaufmännischen Rechnen in höheren Schulen absehen, so kommt hier zunächst der Algorithmus des Wurzelausziehens in Betracht. Das Quadratwurzelausziehen wird gewöhnlich bei Gelegenheit der Potenzrechnung in die Arithmetik eingeschoben. Das Kubikwurzelziehen wird im Unterricht nur noch selten geübt, doch gehen fast alle Bücher darauf ein. Die in den Schulen gebrauchten Tabellenwerke enthalten gewöhnlich auch eine Quadratwurzeltafel.

Für die praktischen Anwendungen ist von größter Wichtigkeit das abgekürzte Rechnen. Die Zahl der Rechenbücher, die dies Verfahren etwa in Quarta bringen, nimmt immer mehr zu. Zuweilen bringen auch die arithmetischen Lehrbücher eine Darstellung dieser Methode (z. B. Bardey, Boymann, Helmes, Wrobel, Haller von Hallerstein). Das Verfahren wird wie bei der Multiplikation und Division auch beim Quadratwurzelausziehen angewandt. Derjenige, der neuerdings auf das abgekürzte Rechnen mit größtem Nachdruck hingewiesen hat, ist Schülke. Es hängt das mit der ganzen Tendenz des Wirkens von Schülke zusammen, der der mathematischen Aufgabe die wirkliche Praxis erschließen will; es wird darauf später zurückzukommen sein.

Die graphischen Rechenmethoden, wie sie die Nomographie ausgebildet hat, sollen hier wenigstens Erwähnung finden. In die Lehrbücher haben diese Methoden meines Wissens bisher noch nirgends Eingang gefunden, ebensowenig wie etwa die Rechenmaschinen. Im Unterricht wird aber vielleicht auf einzelne einfache Fälle (Multiplikationsblätter u. dgl.) hingewiesen (vgl. eine Programmarbeit von Fürle[1]). Ebenso dürften die jüngst von Bennecke[2]) veröffentlichten graphischen Tafeln einer Art komplexer Logarithmen gelegentlich Erwähnung finden.

Über die Verwendung der verschiedenstelligen Logarithmen gibt das nebenstehende Schema ein Bild, das auf Grund der schon im ersten Teile benutzten Lehrbuchverzeichnisse im Zentralblatt (für 1880 und 1890) und bei Horn angefertigt ist und die Zahl der Anstalten in Preußen angibt, an denen 7-, 5-, und 4-stellige Logarithmen eingeführt sind.



Schema 3. Übersicht über die Zahl der Lehranstalten, an denen die verschiedenstelligen Logarithmen eingeführt sind.

1880 waren 5- und 7-stellige Logarithmen annähernd gleichmäßig vertreten. Die 7-stelligen Logarithmentafeln sind inzwischen – schließlich durch behördliche Verfügung – ganz verschwunden; die weitaus gebräuchlichsten 7-stelligen Tafeln waren die von v. Vega. Genauigkeitsfanatiker mögen auch heute noch existieren, jedenfalls spuken noch immer in manchen Büchern an versteckten Stellen die 7-stelligen Logarithmen; so in Spiekers Arithmetik (in Klammern sind allerdings die Resultate für fünfstellige Logarithmen angegeben) und in seiner Trigonometrie bei Aufgaben, „welche eine weitergehende Genauigkeit erfordern". In Koppe-Diekmanns Geometrie ist eine Bretschneider entlehnte Tafel von pythagoräischen Dreiecken gegeben, die siebenstellige Logarithmen voraussetzt und so zehntel Sekunden in den Winkeln gibt. Boymann rechnet (1907!) noch mit 7-stelligen Logarithmen, dabei treten gelegentlich hundertstel Sekunden auf! Bei den Gaußschen Additionslogarithmen – nur sehr wenige Autoren gehen darauf ein oder lassen sie doch in neueren Ausgaben fallen – gebraucht Boymann allerdings, weil er den Wittsteinschen Tafeln folgt, 5-stellige Logarithmen. Die Gründe für das Beibehalten der 7-stelligen Logarithmen muten oft recht sonderbar an, so meint Helmes: „Man möge dem Schüler in dem Asthma des Kalküls das Blättern in der Tafel wohl mal als Interstitien fürs Atemholen gönnen".

1) H. Fürle, Rechenblätter. Progr. der 9. Realschule zu Berlin 1902.

2) F. Bennecke, Eine konforme Abbildung als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen. Berlin. (Salle.) 1907.

Die 5-stelligen Tafeln haben heute das unbedingte Übergewicht. Die gebräuchlichsten sind: Schlömilch, August, Greve, Wittstein, F. G. Gauß in einer großen und einer kleinen Ausgabe und Bremiker; recht handlich sind die Tafeln von Adler. Einen Vermittlungsvorschlag zwischen 7- und 5-stelligen Logarithmen hat Bremiker seinerzeit mit der Herausgabe einer 6-stelligen Tafel gemacht, er hat damit aber in der Schule keinen Anklang gefunden, während die Tafeln von Astronomen und Physikern, wie die hohe Auflagenzahl zeigt, viel gebraucht werden.

Wieder ein Verdienst Schülkes, daneben von A. Richter, Treutlein, Thaer u. a., ist es, daß eine lebhafte Bewegung im Gange ist, die vierstelligen Tafeln an die Stelle der fünfstelligen treten zu lassen, weil vierstelliges Rechnen für die Praxis meist völlig ausreichend ist. Schülke hat einen praktischen Vorgänger in I. H. T. Müller gehabt, dessen vierstellige Logarithmentafel schon im Jahre 1880, für das zuerst unsere Tabelle Auskunft gibt, als weißer Rabe unter sieben- und fünfstelligen angegeben ist; sie war übrigens (die zweite Auflage stammt von 1861) schon früher mehrfach (so in Wiesbaden und auf Veranlassung von Baltzer an der Kreuzschule in Dresden) in Gebrauch. Auch Schlegel hat übrigens eine vierstellige Tafel herausgegeben; von 1892 ist eine von E. R. Müller. Heute ist die gebräuchlichste die Tafel von Schülke, daneben sind für Preußen etwa noch F. G. Gauß, C. Rohrbach, H. Schubert, P. Treutlein zu nennen. Die graphische Darstellung zeigt, daß die Zunahme der Anstalten mit vierstelligen Logarithmen stärker ist, als die der Anstalten mit fünfstelligen. In der Praxis werden übrigens wohl auch mehrfach vierstellige Logarithmen an Anstalten angewandt, wo fünfstellige Tafeln eingeführt sind. Einige mathematische (z. B. Schulte-Tigges-Mehler und Koppe-Diekmann), gelegentlich auch physikalische Lehrbücher geben am Schlusse ausreichende Tafeln vierstelliger Logarithmen. Immerhin ist auch diese Bewegung wieder ein Beispiel, wie langsam sich Neuerungen an Schulen durchzusetzen vermögen. Noch immer überwiegen die fünfstelligen Logarithmen ganz gewaltig.

In neuer Zeit begnügt man sich in speziellen Fällen, z. B. bei Berechnungen in den physikalischen Übungen, auch mit dreistelligen Logarithmen. Tafeln sind dabei wohl selten üblich (O. Richter hat eine solche hergestellt[1])), meist verwendet man die dreistelligen Logarithmen in der handlichen Form des Rechenschiebers. Auf den Rechenschieber ist schon vor langer Zeit von von der Heyden[2]) hingewiesen, immerhin ist er früher kaum benutzt worden. Daß heute die Sachlage sich geändert hat, liegt allgemein in der praktischen Tendenz des modernen

1) Vgl. auch O. Richter, Dreistellige Logarithmen. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 39 (1908), 373. Wittstein hat schon 1877 eine solche Tafel in Visitenkartenformat seiner Logarithmentafel beigegeben.

2) Von der Heiden, Das Rechenlineal. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 3 (1872), wieder abgedruckt in 27 (1896), 568.

Unterrichts; verdienstlich waren insbesondere die Hinweise von C. H. Müller[1]). Für die Schule geeignete Modelle erleichtern die Verwendung immer mehr; in den Lehrbüchern wird allerdings nur erst vereinzelt auf den Rechenschieber hingewiesen, so bei Bork-Crantz-Haentzschel, Kambly-Langguth, in der Schülkeschen und in der Adlerschen Logarithmentafel.

In den trigonometrischen Tafeln wird der Einteilung der Winkelminuten in Sekunden neuerdings immer mehr die Dezimalteilung vorgezogen. Schülke geht im Anschluß an Bremiker noch einen Schritt weiter und ersetzt auch die Minuten durch die Dezimalteilung des Grades; bei dem vierstelligen Rechnen berücksichtigt man dann höchstens hundertstel Grad.

Ich versage es mir hier, noch einige Angaben über die Ausstattung und Einrichtung der Logarithmentafeln zu machen, nur das sei gesagt, daß die guten Tafeln neben den dekadischen Logarithmen der natürlichen Zahlen, den Zahlenwerten der trigonometrischen Funktionen und deren Logarithmen regelmäßig noch astronomische, physikalische (einige besonders meteorologische), chemische und natürlich auch mathematische Konstanten-Tafeln enthalten, häufig auch kurze Ausführungen über die verschiedenen Methoden des logarithmischen und des trigonometrischen Rechnens und ihrer Anwendungen. Um die Genauigkeit von 5 bzw. 4 Stellen auch für Zinzeszinsrechnen zu gewährleisten, sind für die Zinsfaktoren stets Tafeln der Logarithmen mit größerer Stellenzahl (bei 5-stelligen Logarithmen meist 7, bei 4-stelligen meist 5 Stellen) vorhanden.

Die Logarithmentafel wird schon von Schülern benutzt, welchen die Kenntnis der Berechnungsweise der einzelnen Werte vollständig abgeht. Man hat es nun als eine unbedingte Forderung ausgesprochen, daß der Schüler auch auf dieser Stufe eine Einsicht wenigstens in die Berechnungsmöglichkeit – gleichgültig ob die betreffende Methode praktisch befolgt wird – der Logarithmen besitzt. Es gibt eine Fülle, besonders auch in Schulprogrammen niedergelegter Methoden, welche Wege zur elementaren Berechnung der Logarithmen angeben[2]). Von Lehrbüchern, welche eine elementare Berechnungsweise erwähnen, nenne

1) C. H. Müller, In Sachen des Rechenstabes. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 28 (1897), 180 und –, Der logarithmische Rechenstab und die Schule. Ebenda. 38 (1907), 526.

2) Ich nenne als Beispiele nur einige wenige Arbeiten: H. Schubert, Elementare Berechnung der Logarithmen, 1903, Leipzig. (Göschen.), und ein Abschnitt in desselben Verfassers „Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis". 3 Bände. 1905/06. Ebenda. A. Schmidt, Beiträge zum mathematischen Unterricht I. Die Berechnung der Logarithmen in Untersekunda. Progr. Prinz Heinrichs-Gymnasium Schöneberg. 1905. G. Mohrmann, Eine neue Art der Einführung der Untersekundaner in die Logarithmen-Lehre. Progr. Oberrealschule Barmen. 1902. Einen mehr historischen Charakter hat die auch auf die Berechnung der Sinusfunktion eingehende Abhandlung: M. Koppe, Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht. Progr. Andreas-Realgymnasium Berlin. 1893.

ich aus älterer Zeit Wittstein, Baltzer und Helmes, dann die Aufgabensammlung von Bardey, von neueren Heinrich Müller, Pietzker, Holzmüller.

20. Algebraische Gleichungen.

In den systematischen Lehrbüchern ein besonderer Abschnitt, in dem Unterricht — und damit auch in den methodischen Lehrbüchern — in den systematischen Aufbau der Arithmetik eingeschmolzen, bilden die Gleichungen einen wichtigen, auf der Unterstufe vielleicht den wichtigsten Konzentrationskern des algebraisch-arithmetischen Unterrichts. Von den algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten werden, wenn wir zunächst nur von rein algebraischen Lösungsmethoden sprechen, auf der Unterstufe diejenigen vom ersten und zweiten Grade behandelt, auf der Oberstufe diejenigen vom dritten, zuweilen auch (in den Lehrbüchern fast regelmäßig) vom vierten Grade.

Die Lösung der Gleichung zweiten Grades ist die übliche mit der sogenannten quadratischen Ergänzung, d. h. also die Zurückführung auf eine rein quadratische Gleichung. Daneben findet sich zuweilen auch eine trigonometrische Lösung (siehe Pietzker). Auf die Gleichung zweiten Grades werden andere Gruppen zurückgeführt, die Gleichungen der Form

$$x^{2n} + ax^n + b = 0,$$

kubische Gleichungen mit einer leicht erkennbaren Wurzel, reziproke Gleichungen usw.

Die Lösung der Gleichung dritten Grades geschieht je nach dem Vorzeichen der Determinante nach der sogenannten Cardanischen Formel oder, unter Benutzung des Moivreschen Theorems

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi,$$

in der trigonometrischen Form des Casus irreducibilis. In einzelnen Fällen (vergl. Schwab-Lesser) begnügt man sich zunächst mit der Methode von Viëta und Girard, welche die Beziehung

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

benutzt und ohne Verwendung der komplexen Größen zum Ziel führt.

Die Lösung der biquadratischen Gleichung erfolgt nach der Cartesischen, Eulerschen (siehe Pietzker) oder der Ferrari-Simpsonschen, auch nach Ferrari und Diekmann benannten Methode (Bardey-Hartenstein, Bardey, Heilermann-Diekmann), ohne daß natürlich die Frage der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Radikale allgemein in Angriff genommen wird. Alle diese Lösungen haben etwas Gekünsteltes an sich; dem abzuhelfen, hat Keferstein[1]) eine gemein-

1) H. Keferstein, Eine gemeinsame Methode zur Lösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37 (1906), 169.

same Methode der Lösungen von Gleichungen zweiten bis vierten Grades gegeben; ob sie sich einbürgern wird, erscheint fraglich; die allgemeine Tendenz geht wohl dahin, die Gleichungen vierten Grades ganz zu unterdrücken, diejenigen dritten Grades stark einzuschränken. – Von Gleichungen höheren Grades kommen die binomischen Gleichungen der Form

$$x^n - a = 0$$

im Zusammenhang mit der Kreisteilungsaufgabe zur Behandlung, wieder mit Benutzung des Moivreschen Satzes.

Gleichungen ersten Grades mit zwei oder mehreren Unbekannten spielen auf der Unterstufe eine Rolle. Eine Verallgemeinerung auf ein System von Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten ist zuweilen in der Schule durchgeführt. Hier greift die Bewegung ein, die Determinanten der Schule zu erschließen. Reidt, dann Diekmann haben das versucht; Reidt (1874) in einem mehr methodisch, Diekmann (1881) in einem mehr systematisch gehaltenen Buche. Eine ausführliche Darstellung der Determinantenlehre bringt auch Gallenkamp. Infolgedessen haben auch einige andere Lehrbücher die Determinanten aufgenommen (z. B. Heis, Hochheim). Heute befindet sich die Bewegung aber schon wieder auf der absteigenden Linie. Von neueren Lehrbüchern bringt, wenn ich von der Übersetzung des Mansionschen Büchleins absehe, soweit ich sehe, nur noch Pietzker die Determinanten $n$ten Grades. Selbst Heilermann-Diekmann hat sie in der neuesten Auflage fallen lassen, und Reidt geht in seiner Aufgabensammlung, ähnlich wie Spieker und Kambly-Langguth, nur noch bis zu den Determinanten des dritten Grades. Allerdings bringt auch das Lehrbuch von Schwab-Lesser neuerdings Determinanten zweiten und dritten Grades.

Im Anschluß an die quadratischen Gleichungen, in der Regel vor den Gleichungen dritten und vierten Grades, werden die Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten behandelt. Da die Auflösung im allgemeinen Falle auf Gleichungen vierten Grades führt, welche ja auf den Schulen meist nicht behandelt werden, so eröffnet sich hier das weite Gebiet der bei den Älteren sehr beliebten „schwierigeren" Gleichungen, wobei denn immer das wichtigste Ziel das ist, bei der Lösung mit Gleichungen zweiten Grades auszukommen. Die Sammlungen enthalten hier sämtlich reiches Material. Ein ausführliches, für Lehrer bestimmtes Buch über die Gleichungen zweiten Grades (mit einer, zwei und auch mehr Unbekannten) hat Bardey verfaßt[1]).

Aus der allgemeinen Theorie der algebraischen Gleichungen wird auf der Oberstufe der Fundamentalsatz der Algebra erwähnt, doch fast durchgängig ohne Angabe des Beweises. Ich habe, obwohl der von

1) E. Bardey, Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. 6. A. von F. Pietzker. Leipzig. (Teubner.) 1908. Dazu ders., Zur Formation quadratischer Gleichungen. 2. A., ebenda 1894.

H. Weber in der Enzyklopädie[1]) vereinfachte 1. Beweis von Gauß sehr wohl der Schule zugänglich ist, nirgends einen Beweis gefunden, abgesehen von Wittstein, der übrigens nicht in voller Strenge verfährt. Des weiteren werden im Unterricht, nachdem aus dem Fundamentalsatz die Zahl der Wurzeln festgestellt ist, die Beziehungen zwischen Koeffizienten und Wurzeln (mit der Anwendung auf das Erraten rationaler Wurzeln) festgestellt und die imaginären Wurzeln erörtert.

Bei der numerischen Berechnung von Wurzeln stehen die Regula falsi und die Newtonsche Näherungsmethode (siehe Abschnitt 24) im Vordergrund; wenn Kettenbrüche bekannt sind, tritt wohl auch die Lagrangesche Methode hinzu. Auf allgemeinere Sätze, wie z. B. die Cartesische Zeichenregel (bei Spieker), wird sehr selten eingegangen; daß der Unterricht bis zum Sturmschen Satz, wie Simon (Didaktik) meint, zuweilen vorgeht, ist mir für Norddeutschland nicht bekannt, die Lehrbücher bringen ihn meines Wissens nicht.

21. Die algebraische Aufgabe.

Wir wollen in diesem Kapitel ein Bild von dem Aufgabenmaterial in der Algebra geben, von den Sachgebieten, denen die „eingekleideten" Gleichungen u. dgl. entlehnt sind. Wir tun das in der Form, daß wir die alte Aufgabe der modernen Aufgabe gegenüberstellen. Zur Kennzeichnung des alten Zustandes halte ich mich absichtlich an die frühere Gestalt eines zu seiner Zeit „mustergültigen, nach seinem Inhalte unübertroffenen" Buches, das im laufenden Jahre von Grund aus neubearbeitet ist, die ehedem außerordentlich viel benutzte Heissche Sammlung; übrigens zeigt die Bearbeitung für die Nichtvollanstalten von Matthiessen (letzte Auflage 1905) noch heute den alten Zustand. Wir treten, wenn wir die Kapitel der eingekleideten Aufgaben durchblättern, in eine ganz eigene Welt. Da herrscht noch durchaus die gute alte Zeit, da wird noch in einzelnen Aufgaben nach Dukaten und nach preußischen Quart gerechnet, da erfreuen sich noch Hausfrauen der Mägde, die ihnen Garn und Flachs spinnen, da fährt noch die Postkutsche, und nur selten wagt sich einmal ein Fahrrad, oder gar ein Automobil oder „Kaiser Wilhelm der Große" dazwischen. Die Leute, mit denen wir umgehen, sind der kleine Kaufmann mit seinen zwei Tabakssorten, seinen drei Weinsorten, die Hökerfrau, die mit Vorliebe Eier verkauft; dann die prächtigsten Märchengestalten: der Vater, der seinen Söhnen eine Kiste mit Dukaten hinterläßt, oder der Mann, der zwei Bretter mit Ein- und Zweimarkstücken belegt. Überhaupt sind die Menschen Ideale, die Arbeiter entwickeln fast regelmäßig gleichen Fleiß, höchstens steht einmal bei zwei Maurern der „beiderseitige Fleiß in dem Verhältnis 4:5."

1) Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Bd. 1. 2. A. Leipzig. (Teubner.) 1906. S. 239.

Wesentlich ist, daß die Aufgabe aufgeht; sie gleicht darin dem Rätsel. Die Zahlenwerte werden eben so zugestutzt, gleichgültig, ob derartiges auch in der Wirklichkeit vorkommt, oder ob man die angegebenen Zahlen zu beobachten gewohnt oder überhaupt in der Lage ist. Da steigt ein Luftballon erst, fällt dann um $\frac{1}{4}$ seiner Höhe über Aufflugsort, steigt dann zu $\frac{1}{10}$ seiner neuen Höhe, fällt dann $\frac{19}{20}$ usf. Bei einem Neubau kosten die Erdarbeiten ausgerechnet $\frac{1}{128}$ der ganzen Summe usf. Gewiß ist es die Freude der Schüler am Rätsel, die derartige Aufgaben begreiflich erscheinen läßt. Zu den beliebtesten Aufgaben dieser Art zählen die altindischen: „die Quadratwurzel der Hälfte eines Wespenschwarmes ist ausgeflogen auf einen Jasmin“ usf. Welche sonderbaren Bestimmungen manchmal gegeben werden, erläutert das folgende Beispiel: Wenn ein Wagen 120 m vorwärts geht, dann machen die vorderen Räder 6 Umläufe mehr als die hinteren. Wenn jedes Rad aber um 1 m Umfang vergrößert würde (wie würde man das wohl anstellen?), so würden die Vorderräder auf der gleichen Strecke nur 4 Umdrehungen mehr machen als die Hinterräder.

Sehr beliebt sind, und das ist ja besonders für Gymnasien begreiflich, Aufgaben in historischem Gewande. Man wird solche alte Originalaufgaben durchaus gelegentlich gelten lassen: „Schwer bepackt ein Eselchen ging und des Eselchens Mutter . . .“ klingt einem noch heute in die Ohren, und die Originalaufgaben aus den alten Coss, die Heilermann-Diekmann in großer Zahl im Urtext geben, sind sicherlich für den Schüler sehr interessant. Menge und Werneburg haben geradezu eine Sammlung (für die Unterklassen bestimmter) antiker Rechenaufgaben herausgegeben: „Die Aufgaben der in unseren Gymnasien üblichen Rechenbücher sind oft wenig geeignet, das Interesse der Schüler und somit ihre Lust zur Lösung der Aufgaben zu erregen, weil sie Gebieten entnommen sind, die den Gedankenkreisen unserer Gymnasiasten fern liegen. Ein Ersatz dieser Aufgaben durch solche, die auf das unseren Schülern zunächstliegende Vorstellungsgebiet, nämlich das klassische Altertum sich beziehen, wird also voraussichtlich den Rechenunterricht auf dem Gymnasium fördern.“ Man wird vielleicht dann auf dieses Angebot eingehen können, wenn als Entgelt realistische Stoffe in der griechischen und lateinischen Lektüre geboten werden. In der Tat enthält z. B. von Wilamowitz-Moellendorfs Griechisches Lesebuch[1]) Abschnitte aus Euklid u. dgl. Aber abzulehnen ist jedenfalls das Umhängen eines fadenscheinigen antiken Mäntelchens um Alltägliches: Zu einer Mahlzeit gibt Cajus 7 Schüsseln, Sempronius 8; dann kommt Titus hinzu usf.

Sehr häufig begegnet man stillschweigend gemachten, aber durchaus nicht selbstverständlichen Voraussetzungen; die Arbeiter entwickeln,

1) 2 Bde. und 2 Bde. Erläuterungen. Berlin. (Weidmann.) 1902. Übrigens wird, wie ich höre, leider auf den Gymnasien meist nur der Band benutzt, der frei von mathematischen und naturwissenschaftlichen Stoffen ist.

wie schon gesagt, fast immer den gleichen Fleiß. Noch eine andere Aufgabe, die leicht zur Oberflächlichkeit erziehen kann: Vier Ursachen bringen einzeln in den Zeiten t_1, t_2, t_3, t_4 die Wirkungen e_1, e_2, e_3, e_4 hervor. In welcher Zeit bringen die 4 Ursachen gleichzeitig wirkend die Wirkung E hervor? Dabei ist offenbar als selbstverständlich vorausgesetzt, daß die Wirkungen sich arithmetisch addieren und daß sie proportional der Zeit sind.

Die Beispiele, die wirklich praktischen Stoffen entlehnt sind, sind dünn gesät; neben den berüchtigten Bewegungsaufgaben, (eine Systematik dieser und einiger anderer Aufgabengruppen gibt Walter) etwas Geometrie, dann wohl auch einmal eine Legierung oder ein spezifisches Gewicht; um so häufiger aber Wasserbehälter mit komplizierten Röhren, Weinsorten, Nußhaufen, Pferdehandel, Erbschaft, Spiel und dgl.

Der alten Aufgabe steht die moderne Aufgabe gegenüber. Auch der Inhalt der Aufgabe soll wertvoll sein, ebenso wie es der Inhalt der lateinischen, der griechischen Lektüre ist. Wir haben diese Richtung schon bei Gelegenheit der geometrischen Aufgabe gekennzeichnet. Die Tendenzen sind dieselben, aber die Ausdehnungsmöglichkeit ist für die arithmetische Aufgabe ungleich größer. Sachgebiete sind in erster Linie die Unterrichtsgegenstände der Schule: die Geometrie, das weite Feld der Physik und der Technik, die Chemie, die Astronomie, die Nautik usf. Schülke erinnert an einen Ausspruch Jägers, die Schule habe als Hauptaufgabe die Erziehung zum öffentlichen Leben; die Mathematik hat in der arithmetischen Aufgabe – natürlich nicht nur in dieser – Gelegenheit, dieser Verpflichtung gerecht zu werden. Also Wirtschaftsgeschichte und, um ein spezielles Kapitel zu nennen, Versicherungswesen. Man sehe in dieser Hinsicht etwa Müller-Kutnewsky, Schwab-Lesser, die neue Bearbeitung des Heis, des Kambly-Langguth durch; das ist ein Verdienst von M. Cantors Schrift „Politische Arithmetik[1])“, in neuerer Zeit auch eines Aufsatzes von O. Nitsche[2]).

Wie bei der trigonometrischen Aufgabe waren es wieder A. Richter und Schülke, die in ihren Aufgabensammlungen reiches Material von Anwendungen herangeschafft haben, meistens aus älteren Quellen das Nützliche sichtend; daneben ist besonders Fenkner zu nennen. Der Einfluß der modernen Anschauungen offenbart sich recht greifbar in unseren neueren Aufgabensammlungen (z. B. Müller-Kutnewsky, Schulze-Pahl); auch die älteren Sammlungen von Bardey und Heis tragen den neuen Forderungen in ihren Neubearbeitungen, wenn auch wohl nicht in hinreichendem Maße, Rechnung; andernfalls wären sie wohl über kurz oder lang des Schicksals des hundertjährigen Meyer Hirsch gewiß. Andere sind allerdings noch zurückhaltend, wie etwa Reidt, Wrobel, Schmehl: „Wenn der Unterricht der Mathematik und

1) M. Cantor, Politische Arithmetik des täglichen Lebens. 2. A. Leipzig. (Teubner.) 1903.

2) O. Nitsche, Lehrproben und Lehrgänge. 1907.

Physik sich nicht in den Händen desselben Lehrers befindet, so muß der Mathematiker, wenn er physikalische Aufgaben behandeln will, sich über die zur Lösung erforderlichen Kenntnisse der Schüler erst informieren und muß unter Umständen vielerlei sachliche Erklärungen voraus-schicken". Besonders der letzte Grund dürfte bei vielen entscheidend in die Wagschale fallen. Die alte Aufgabe ist für den Lehrer bequemer, vor allem aber auch nicht so zeitraubend – und zwar Zeit für das Nicht-Mathematische raubend.

Ein sehr beachtenswertes Moment spielt in der Aufgabensammlung von Schwering eine Rolle. Bei ihm reicht der Aufgabenstöff häufig in Gebiete der höheren Mathematik hinein: „Wenn zwei Aufgaben von gleicher Schwierigkeit vorliegen, eine mit, eine ohne wissenschaftlichen Hintergrund, so glaube ich erstere unbedingt vorziehen zu sollen, selbst wenn ich dem Tertianer nicht sagen kann, weshalb ich so verfahre". Dem Sekundaner kann man es beiläufig manchmal schon sagen. So spielen neben den gewohnten Sachgebieten auch Interpolation, Partialbruchzerlegung, ja sogar elliptische Koordinaten hinein, vor allem aber die Zahlentheorie (Kongruenzen, Potenzreste, Siebzehneck usf.).

22. Funktionsbegriff und graphische Darstellung.

Charakteristisch für die Lehre von den Funktionen im Schulbetrieb ist die Verknüpfung des arithmetischen Ausdrucks mit dem geometrischen; der Versuch, den rein arithmetischen Weg der Schule zu erschließen, den Lanner gemacht hat, darf wohl als mißglückt angesehen werden. Ein gleiches ist zu sagen von der Absicht M. Simons, der, wenn er 1884 in seinen „Elementen der Arithmetik als Vorbereitung auf die Funktionstheorie" als das dem arithmetischen Unterricht bislang fehlende „feste Ziel" den Funktionsbegriff bezeichnet, durchaus die Funktion der komplexen Variablen im Auge hat.

Der Funktionsbegriff beschränkt sich in der Schule auf reelle Variable und bildet mit der graphischen Darstellung ein gemeinsames Ganze. Im Unterricht werden Arithmetik und Algebra stets einander durchdringen und sich gegenseitig ergänzen, für die „Reformer" kommt zu diesem Bunde noch ein Drittes, die beiden andern beherrschende hinzu, der Funktionsbegriff. Im systematischen Lehrbuch werden allerdings alle drei Dinge scheinbar fremd nebeneinander hergehen können, und man hat daraus zuweilen auch auf den Unterricht geschlossen. Aber dann müßte man auch aus der Trennung von Arithmetik und Algebra im systematischen Buche auf eine strenge Scheidung der beiden Gebiete im Unterricht schließen.

Die Benutzung des Funktionsbegriffes und der graphischen Darstellung auf der Unterstufe geht einige Jahrzehnte zurück. Man findet z. B. die Begriffe Funktion, Stetigkeit, Ableitung in Frischaufs Arithmetik, ein kurzes Kapitel über graphische Darstellung im alten Bardey, ebenso

begegnet man zuweilen der Parabeldarstellung $y = x^2 + ax + b$ (z. B. bei Schüller). Baltzer geht recht ausführlich auf den Funktionsbegriff ein, der bei ihm schon in der Proportionenlehre, dann bei den Gleichungen ersten und zweiten Grades eine beherrschende Rolle spielt.

Grundlegend ist der Funktionsbegriff bei Gallenkamp, bei dem z. B. auf Funktionalgleichungen wie

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$
$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

u. dgl. hingewiesen wird. Bei diesen übrigens für die Oberstufe bestimmten Ausführungen fällt aber die Beschränkung auf „mathematische" Funktionen – die empirischen Kurven werden also nicht erwähnt – und das Zurücktreten der graphischen Darstellung ins Gewicht. Ganz ähnlich stellt sich auch Tellkampf zu der Frage, wenngleich bei ihm in der analytischen Geometrie der Anschluß an die geometrische Form der Funktion hergestellt wird; wir begegnen dort Aufgaben, Kurven

$$y = 7x^3 - 5x^2 + 3x - 10$$

usf. zu zeichnen.

Daß jetzt aber der Funktionsbegriff in fast allen Lehrbüchern Eingang zu finden beginnt, ist trotz dieser immerhin vereinzelten Vorgänger eine Frucht der Reformbewegung.[1]). Von systematischen Leitfäden und Lehrbüchern, die, soweit sie älteren Datums sind, um die Nebeneinanderbenutzung der alten und neuen Auflagen zu ermöglichen, meist den betreffenden Abschnitt im Anhang bringen, sind hier zu nennen Thieme, Pietzker, Kambly-Langguth, Schulte-Tigges-Mehler, Bork-Crantz-Haentzschel, Heinrich Müller, von Aufgabensammlungen in erster Linie Schülke, dann die neue Bearbeitung des Heis und Fenkner. Andere Lehrbücher und Aufgabensammlungen zögern noch oder bringen doch erst in der Oberstufe den Funktionsbegriff (z. B. Schmehl). Die zahlreichen, später noch zu besprechenden Lehrbücher der Infinitesimalrechnung, die in den ersten Jahren der Reformbewegung wie Pilze aus dem Boden geschossen sind, bringen fast sämtlich Einleitungen in die Analysis, die schon für die Unterstufe berechnet oder doch verwendbar sind. Eines dieser Ergänzungsbücher, das von H. Dreßler, sei schon hier erwähnt, weil es nicht bis zur Infinitesimalrechnung vordringt. Gutes und reichhaltiges Material für den Unterricht gibt dem Lehrer ein ausführliches Buch von Lesser[2]).

1) Auf die Geschichte der Reformbewegung usw. kann hier nicht eingegangen werden. Man vergl. A. Gutzmer, Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Leipzig. (Teubner.) 1908 und F. Klein und R. Schimmack, Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig. (Teubner.) 1907.

2) O. Lesser, Graphische Darstellungen im Mathematik-Unterricht der höheren Schulen. Leipzig u. Wien. (Freytag u. Tempsky.) 1908.

Diejenigen Lehrbücher, nach denen man sich bisher am besten über den bei der Darstellung des Funktionsbegriffes im Sinne der Reformbewegung eingeschlagenen Weg orientieren kann, sind die neuen Bücher von Schwab-Lesser und Behrendsen-Götting[1]), dazu vielleicht noch ein kleines Heft von Weill[2]). Das Charakteristische der Behrendsen-Göttingschen Methode ist, und insofern kann sie gegenwärtig als weitester Vorstoß der Reformbewegung gelten – die Unterstufe des Lehrbuches von Schwab-Lesser ist ein klein wenig konservativer –, daß der Funktionsbegriff und seine geometrische Deutung nicht wie bei den anderen älteren Lehrbüchern als ein bloßes accedens, eine neue Betrachtungsweise des in üblicher Weise schon behandelten Stoffgebietes hinzukommt, sondern daß er an der Spitze der einzelnen Abschnitte steht, daß er die Disposition beherrscht. Es ist wie in der Planimetrie mit der Geometrie der Lage: die einen benutzen die Methoden, behalten aber das System Euklids bei, die anderen dagegen lassen auch das System sich bestimmen nach den angenommenen Methoden. Der zweite Weg ist der befriedigendere, kommt aber naturgemäß oft in Konflikt mit den Rücksichten, die ein an konservativen Anstalten eingeführtes Schulbuch nehmen muß.

Einige Andeutungen über den Lehrstoff mögen genügen. Nach einer Einführung in den Koordinatenbegriff und den Begriff der graphischen Darstellung an der Hand empirischer Kurven gliedert sich der Lehrgang in zwei große Kapitel: Erstens wird die lineare ganze Funktion und ihre Darstellung durch eine Gerade betrachtet. Dabei werden insbesondere die ganze Proportionenlehre erledigt und natürlich die Gleichung ersten Grades und zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten. Das zweite Kapitel wird durch die Diskussion der Parabel $y = ax^2$ und ihre Verschiebung eingeleitet, wobei gleich auch die Parabel n^{ter} Ordnung $y = x^n$ gestreift wird. Hier lassen sich übrigens die Gleichungen der Form

$$x^n + ax + b = 0$$

anschließen. Man bringt eine feste Parabel n^{ten} Grades, die am besten auf durchscheinendes Papier gezeichnet ist (Heinrich Müller legt seiner Einführung, Müller-Witting seinem Lehrbuch eine solche Parabel zweiten Grades bei), zum Schnitt mit der Geraden

$$y + ax + b = 0.$$

---

1) Die nach Fertigstellung der Arbeit erschienene 13. Auflage von Heilermann-Diekmanns Algebra ist gleichfalls an dieser Stelle zu nennen. Auch hier ist der Funktionsbegriff und die graphische Darstellung in allen Kapiteln an die Spitze gestellt. Immerhin ist das Buch systematischer als das mehr methodische und deshalb zu einer Orientierung für den Außenstehenden geeignetere Lehrbuch von Behrendsen-Götting.

2) Im Anschluß an diese kleine Aufgabensammlung, die auch die Infinitesimalrechnung in sich begreift, sind von A. Weill sehr praktische „Graphische Hefte" herausgegeben. (Gebweiler, J. Boltze); eines für Mathematik und eines für Geographie, Wirtschaftslehre und Statistik. Die Hefte enthalten, mit weißem Papier durchschossen, Millimeterpapier, daneben auch einen durchscheinenden Bogen, und auf den ersten Seiten einige charakteristische Kurven.

In dem zweiten Kapitel werden dann weiter Potenzrechnung und Wurzelrechnung behandelt, die verschobene Parabel leitet zur allgemeinen Gleichung zweiten Grades über.

Die Methoden der graphischen Darstellung werden natürlich auch angewandt auf andere funktionale Zusammenhänge, insbesondere auf die trigonometrischen Funktionen, die logarithmische und die Exponentialfunktion. Diese Kurven bürgern sich immer mehr im Unterricht und deshalb auch im Lehrbuch ein, man begegnet ihnen jetzt zuweilen sogar schon in Logarithmentafeln.

23. Analytische Geometrie.

Auf der Oberstufe kommt die analytische Wechselbeziehung zwischen geometrischer und arithmetischer Darstellungsform in zweifacher Weise zu Wort. Das eine Mal ist der Ausgangsort die Geometrie; es werden für geometrisch definierte Gebilde arithmetische Ausdrücke gefunden, das ist in der analytischen Geometrie der Fall. Das andere Mal ist der arithmetische Ausdruck das Gestaltgebende, der geometrische der Hilfswert. Das ist dann die Fortführung der in der Unterstufe aufgenommenen Untersuchungen von Funktionen mit Hilfe der graphischen Darstellung. Das in der Oberstufe neu, wenn auch nicht unvermittelt auftretende Moment, liefern dabei infinitesimale Betrachtungen. Sie stellen ein zweites, großes Gebiet des Unterrichts der Oberstufe dar, die Infinitesimal-Analysis.

Die analytische Geometrie ist in den realistischen Anstalten schon stets gelehrt worden, in den Gymnasien Preußens hat sie sich erst 1892 ihren Platz im Lehrplan erworben. Der Stoff ist jetzt fast durchweg auf die analytische Geometrie der Ebene und hier auf die Kegelschnittlehre beschränkt. Früher wurden auf den realistischen Anstalten von der analytischen Geometrie des Raumes wenigstens einige Grundbegriffe gegeben, z. B. Ebene und Gerade im Raum, vgl. Erler; Rotations-Ellipsoide u. dgl. bei Servus; etwa ebensoweit ging Tellkampf. Erheblich mehr brachte dagegen Gallenkamp[1]), der sogar die Flächen zweiten Grades, ausgehend von der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit drei Variablen behandelte.

Früher hob sich die analytische Geometrie, die meist an das Ende des ganzen Schulunterrichts gestellt wurde, merklich von dem ganzen vorangehenden Stoffe ab durch das neue Moment der Verbindung arithmetischer und geometrischer Methode. Dort, wo die graphische Darstellung das Feld von der Unterstufe an vorbereitet hat, sind die Methoden nicht mehr neu, es findet vielmehr ein kontinuierlicher Übergang statt; wie dieser sich gestaltet, kann man etwa bei Dreßler nachlesen. Ein weiterer Erfolg der Reformbewegung scheint der zu sein,

---

1) Vergl. außer den Elementen auch W. Gallenkamp, Über die Flächen zweiten Grades. Progr. Friedrichs-Werdersche Gewerbeschule. Berlin. 1868.

daß heute mehr als früher Wert auf exakt ausgeführte Zeichnungen (häufig auf Millimeterpapier) gelegt wird.

Der übliche Lehrgang ist kurz der folgende (nach Gandtner; der hochschulmäßigen Behandlung stehen etwas näher die Bücher von Fuhrmann, sowie von Ganter und Rudio; mehr noch als alle diese die eben erschienene Analytische Geometrie von E. Lutz): 1. Rechtwinklige Koordinaten; der Punkt, Länge einer Strecke. 2. Die Gerade (schiefwinklige Koordinaten). 3. Der Kreis (Polarkoordinaten, Koordinatentransformationen). 4. Die Parabel (Gleichung auf Grund der Ortdefinition, Diskussion der Gleichung; Parabel-Sekante und -Tangente. Quadratur der Parabel – meist „elementare" Integration –). 5. Die Ellipse. (Ähnlich wie eben, konjugierte Durchmesser). 6. Die Hyperbel. (Ähnlich wie die Ellipse; Gleichung der Hyperbel bezogen auf die Asymptoten). Den Beschluß macht in der Regel ein zusammenfassendes Kapitel, in dem z. B. die Scheitelgleichungen der drei Kegelschnitte und die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten durchgeführt wird. Daß auch Pole und Polaren der Kegelschnitte mit einbezogen werden, dürfte seltener sein.

Der Stoff wird in dieser Reichhaltigkeit wohl nur an realen Anstalten behandelt, für den gymnasialen Kurs vergleiche man etwa das Heft von Schwering, der das ganze Gebiet in Aufgaben auflöst.

Die Aufgaben in der analytischen Geometrie haben in der Regel Berechnungen von Strecken, Winkeln, Flächen zum Gegenstand, jedes Lehrbuch gibt eine genügende Auswahl. Früher bevorzugte man dabei Buchstabenrechnung, mehr und mehr aber werden natürliche Zahlen benutzt und das Resultat dann durch die Zeichnung geprüft. Sehr fruchtbar sind Aufgaben, geometrische Örter analytisch aufzufinden; reichhaltig ist in dieser Hinsicht der Abschnitt in Koppe-Diekmanns Geometrie, deren Material teilweise auf einen Aufsatz von H. Pfaff[1]) zurückgeht (vgl. auch Bürklens Aufgabensammlung).

Auf die Kegelschnitte kommt man auch bei einem für die älteren rein algebraischen Problem, der Lösung von zwei Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten, deren graphisches Bild zwei sich schneidende Kegelschnitte sind (vgl. die ausführliche Darstellung in Schwab-Lesser). Allerdings benutzt man diese Darstellung häufig schon dann, wenn die Kegelschnitte noch nicht systematisch in der analytischen Geometrie behandelt sind. Man begnügt sich eben zunächst mit der durch Punktkonstruktion gefundenen Form der verschiedenen Kegelschnittarten.

24. Infinitesimalrechnung: Allgemeines; Differentialrechnung.

Es gab eine Zeit, in der, wenigstens in den Realanstalten Preußens, Differential- und Integralrechnung regelrecht im Unterricht betrieben wurden. Die Erlaubnis dazu wurde 1882 den Realgymnasien, 1892 auch

1) H. Pfaff, Geometrische Örter als Übungsstoff für die Prima. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37 (1906), 253 und 321.

den Oberrealschulen entzogen. Immerhin hat es, bis 1902 mit zwei Aufsätzen von Klein und Götting[1]) die Bewegung für die Infinitesimalrechnung erneut lebhaft einzusetzen begann, Anstalten gegeben, an denen sich die Differentialrechnung bis heute ununterbrochen gehalten hat. Aus der älteren und dieser Übergangszeit stammen u. a. verschiedene Veröffentlichungen von H. Seeger. Neben einem Leitfaden, der in der Form der Darstellung einem Buche für jüngere Semester gleicht, hat Seeger mehrere Programmabhandlungen[2]) verfaßt, um weitere Kreise mit seinen Anschauungen bekannt zu machen.

Neben diesen vereinzelt laut werdenden Bestrebungen, die Schulen wieder der Differential- und Integralrechnung zu öffnen, bestand eine starke Gegenströmung, den Schulen die infinitesimalen Probleme nur in „elementarer" Behandlung darzubieten. Man muß sich dabei vergegenwärtigen, daß Anwendungen infinitesimaler Methoden, so insbesondere die Lehre von den Maximis und Minimis und die unendlichen Reihen immer auf dem Lehrplan stehen geblieben sind, daß die Lehrpläne also geradezu die Forderung stellten, alles das mit elementaren Methoden zu behandeln. In der Mehrzahl waren das natürlich verschleierte Differentiationen und Integrationen, man nannte nur nicht diese Namen. Charakteristisch ist in dieser Hinsicht das Vorgehen Schellbachs in den Anhängen des auf Schellbachs Anregungen zusammengestellten Leitfadens von Mehler und in einem kleinen Lehrbuch über die Maxima- und Minima-Lehre. Hier wird in Wirklichkeit bis zum zweiten Differentialquotienten teilweise unter Heranziehung seiner Bedeutung in der Mechanik vorgegangen. Man hat fast den Eindruck, daß der Verfasser der Verfügung, Differential- und Integralrechnung aus dem Lehrstoff zu streichen, ein Schnippchen hat schlagen wollen. Dieses Verfahren hat sich dann als Schellbachsche Methode vielfach eingebürgert. (Vgl. z. B. Fenkner.)

Ganz im Gegensatz zu Schellbach nannte Gallenkamp, der die Infinitesimalrechnung auch für Gymnasien forderte[3]), die Dinge beim richtigen Namen. In einer umfangreichen „Einleitung in die höhere Analysis" im 3. Bande seines Leitfadens (1880) bringt er die Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung in ziemlich strenger Form, auch nicht in konsequenter Verbindung mit der graphischen Darstellung;

1) F. Klein, Über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Jahresb. d. Deutsch. Math.-Verein. 11, S. 128 und E. Götting, Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht der höheren Realanstalten. Ebenda 11, S. 189. Beide abgedruckt in F. Klein und E. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen. Leipzig. (Teubner.) 1904.

2) H. Seeger, Über die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu einem Beschlusse der letzten Berliner Schulkonferenz (Progr. Güstrow 1891) und besonders H. Seeger, Bemerkungen über Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechnung. Güstrow. (Opitz & Co.) 1894.

3) W. Gallenkamp, Über den mathematischen Unterricht im Gymnasium. Zeitschrift für das Gymnasialwesen. 31 (1877), 1.

als Anwendungen erscheinen eine wieder recht exakte Reihentheorie (z. B. mit Restgliedbetrachtungen), Diskussionen unbestimmter Ausdrücke, Maxima- und Minima-Untersuchungen, schließlich auch Kurvenbetrachtungen im Anschluß an die analytische Geometrie (Krümmungskreis).

Die Bewegung zur Einführung der Infinitesimalrechnung hat, zumal nach den Meraner Vorschlägen[1]), mit einer großen Zahl von Lehrbüchern eingesetzt. In einer ersten Periode waren es besonders Leitfäden der Infinitesimalrechnung für Schulen, die teilweis schon auf länger zurückliegende Erfahrungen zurückgriffen, übrigens in der ganzen Anlage sehr weit voneinander und auch von den Meraner Vorschlägen abwichen. Ich nenne aus dieser ersten Periode die Bücher von H. Grünbaum (mehr für mittlere technische Lehranstalten geschrieben), von Niemöller und Dekker (Heft IV), von Schröder, deren Verdienst zunächst einmal schon das ist, den Wahn zerstört zu haben, daß Differentialrechnung für Schüler unverständlich sei; im übrigen denken sich diese Bücher im Gegensatz zu den Meraner Vorschlägen die Infinitesimalrechnung als ein besonderes, der analytischen Geometrie und der sogenannten niederen Analysis angehängtes Lehrgebiet der Prima. 1906 folgen dann L. Tesař und O. Lesser, die beide schon erheblich mehr eine allmähliche Einführung der Infinitesimalbegriffe erkennen lassen; besonders Tesař scheint aber noch mehr auf die Belehrung des Lehrers als für den Schüler berechnet zu sein. Die Zahl der Aufgaben reicht jedenfalls nicht aus. So füllte 1907 das Heft von Schülke, das in der Hauptsache Aufgabensammlung ist, eine Lücke aus. Aus 1908 nenne ich noch schließlich Düsing, der die geometrisch-anschaulichen Ableitungen in den Vordergrund stellt, aber überall da, wo er damit nicht auskommt, für die höheren Schulen zu primitiv ist; sein Buch, das ursprünglich in etwas kürzerer Form in der Zeitschrift „Technik und Schule“ erschienen ist[2]), paßt auch wohl in erster Linie für technische Fachschulen.

Eine zweite Periode läßt sich charakterisieren durch die allmähliche Aufnahme des Stoffes in die alten Lehrbücher. Natürlich wird dabei oft das Neue zunächst als ein Fremdkörper erscheinen; denn die neue Auflage soll möglichst neben der alten gebraucht werden können, und zudem ist die Zahl der Konservativen sehr groß (haben doch z. B. am alten Kambly 1906 noch 67 Anstalten festgehalten, obwohl damals die Neubearbeitungen schon mehr als 5 Jahre zurücklagen). Von Lehrbüchern, welche auf die Reformbestrebungen in ihren neuesten Auflagen eingehen, nenne ich Kambly-Langguth (bearbeitet von A. Thaer), Heilermann-Diekmann, Heinrich Müller, von Aufgabensammlungen Müller-Kutnewsky, Heis.

1) Vgl. A. Gutzmers oben zitierten Bericht.
2) Technik und Schule. I. Band, 3. Heft (1907), 175.

Eine dritte Periode ist erst im Anfang; es ist, wenn wir von Müller-Witting, der sich in seinem arithmetisch-analytischen Teil fast vollständig an Heinrich Müller anschließt, absehen, erst ein einziges „modernes" Lehrbuch für die Oberstufe erschienen, dasjenige von Schwab und Lesser; das von Pietzker kann hier nicht in Betracht kommen, da Pietzker gegenüber der Differential- und Integralrechnung eine ablehnende Stellung einnimmt.

Wenn wir auch hier wieder einige in der Hand des Lehrers nützliche Bücher über Infinitesimalrechnung, die gelegentlich auch einmal ein Schüler bei privater Arbeit benutzen kann, anführen, so ist zwar für diesen Zweck die Auswahl an wissenschaftlichen Werken sehr groß, nicht aber die Zahl derjenigen, deren Darstellung schulgemäß ist. Selbst das Bändchen der allgemeinverständlichen Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt" von Kowalewski[1]) ist durchaus als rein wissenschaftlich anzusprechen. Dagegen ist nachdrücklich auf Burkhardts Differential- und Integralrechnung[2]), daneben auf die Einführung von Nernst und Schoenflies[3]) hinzuweisen.

Das, was von der Differentialrechnung in den Lehrbüchern gebracht wird, sind erstlich die Ableitungen einiger für den Unterricht wichtiger Funktionen (x^n, sin x, cos x, tan x, e^x, log x, arc tan x usw.) und einige Differentiationsregeln (Summe, Produkt, Quotient, Funktion einer Funktion, $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$); daran schließt sich dann die mehrfache Differentiation. Auf implizite Funktionen wird selten eingegangen, ebensowenig auf partielle Differentiation (die Aufgaben für die Reifeprüfungen zeigen jedoch, daß der Unterricht in einzelnen Fällen soweit geht). Die Ableitung der Resultate geschieht unter Benutzung des Grenzbegriffes im engsten Anschluß an die graphische Darstellung der Funktionen, auch für die Rechenregeln (z. B. $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$) ist man auf ein Zurückgehen auf die Anschauung bedacht, man beschränkt sich also von vornherein auf „vernünftige" Funktionen.

Die Frage, ob man Differentiale benutzen soll, ist noch als offene anzusehen; die einen vermeiden sie (Schroeder, Heilermann-Diekmann), andere benutzen sie (Schülke, Lesser, Kambly-Langguth). Ausschlaggebend für diese Frage ist wohl, ob man bis zur Integralrechnung vorgeht oder nicht.

Methodisches Prinzip der im Sinne der Meraner Vorschläge Arbeitenden ist es, den Schüler mit dem Begriff des Differential-

---

[1]) G. Kowalewski, Einführung in die Infinitesimalrechnung. Leipzig. (Teubner.) 1908.

[2]) H. Burkhardt, Vorlesung über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Leipzig. (Teubner.) 1907.

[3]) W. Nernst und A. Schoenflies, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. 4. A. München 1904.

quotienten allmählich vertraut zu machen, also ein erstes Mal bereits gelegentlich auf der Unterstufe im Anschluß an die dort behandelten Funktionen. So wird, um ein Beispiel dafür zu geben, von Schwab-Lesser bereits in Untersekunda an der die rationale ganze Funktion zweiten Grades darstellenden Kurve das sog. Schellbachsche Verfahren zur Bestimmung des Maximums oder Minimums durchgeführt. Auf der Oberstufe ist dann irgendwo eine Zusammenfassung und eine Vervollständigung dessen geboten. In den systematischen Lehrbüchern ist von dieser methodischen Forderung (die auch wohl noch nicht allgemeine Zustimmung gefunden hat), wie das in der Natur dieser Bücher liegt, kaum etwas zu merken.

25. Infinitesimalrechnung: Anwendung der Differentialrechnung, Integralrechnung.

Als Anwendungsgebiete der Differentialrechnung kommen in Betracht:

1. Die Kurvendiskussionen. In vielen Fällen beschränkt man sich auf Kegelschnitte und etwa Sinuskurven, wobei dann wenigstens die Tangenten, oft auch die Krümmungskreise und die Wendetangenten betrachtet werden. Schroeder geht darüber hinaus und betrachtet außerdem: Zissoide des Diokles, Zykloide, Lemniskate, Kardioide. Auch die neueste von Thaer bearbeitete Auflage der Kambly-Roederschen Stereometrie bringt einige höhere Kurven. Übrigens werden schon bei A. Wiegand (7. A. 1891) Kurven höherer Ordnung und transzendente Kurven mit Benutzung der Elemente der Differentialrechnung diskutiert, und Ähnliches geschieht vielfach im Unterricht.

Ganz erheblich weiter geht das Lehrbuch von Schwab-Lesser. Hier knüpft die ganze Behandlung der rationalen Funktion an die sie darstellenden Kurven an. Diese Kurven werden unter Benutzung des ersten und der höheren Differentialquotienten ausführlich diskutiert, insbesondere wird natürlich die ganze rationale Funktion dritten und vierten Grades untersucht.

Dort, wo Differentialrechnung nicht als solche betrieben wird, wo jedoch in der analytischen Geometrie die Ableitung der Tangentengleichung notwendig wird, führt man den Grenzübergang in möglichst einfacher Form jedesmal besonders durch. Holzmüller behandelt auch die Krümmungskreise der Kegelschnitte mit elementaren Methoden.

2. Die Lehre von den Maximis und Minimis wird dort, wo die Differentialrechnung den Schülern bekannt ist, in engster Anlehnung an die graphische Darstellung sehr schnell erledigt. Übel sind hier diejenigen daran, die sich ohne Differentialrechnung behelfen und auf ganz elementare Fälle beschränken müssen; deshalb ist gerade hier die Einführung des Differentialquotienten ad hoc, zumal wenn die graphische Darstellung und der Funktionsbegriff bekannt sind, recht häufig (Schulze-Pahl, Bork-Nath); die Regel, man solle $f(x_1) - f(x_2)$ bilden, durch $x_1 - x_2$ dividieren und zur Grenze übergehen, die in „elementar“ ver-

fahrenden Büchern immer wiederkehrt, (z. B. Lieber-von Lühmann, Kambly-Roeder, Stereometrie von 1896, in Anlehnung an graphische Darstellung), wird häufig als Schellbachsches Verfahren (Fenkner, Heinrich Müller) bezeichnet (siehe oben Abschnitt 23). Die Entscheidung, ob ein Maximum oder ein Minimum eintritt, auf Grund des Vorzeichens des 2. Differentialquotienten, wird auch Regel von Fermat[1]) genannt (Heinrich Müller, man vergleiche auch die von A. Schmidt stammende Methode bei Bork-Nath).

Ohne Differentiation kommt man ziemlich einfach in den Fällen aus, die auf rationale ganze Funktionen zweiten Grades führen, auf diesen Fall wird daher in den ohne Infinitesimalrechnung operierenden Büchern besonderer Wert gelegt (vgl. Holzmüller, Pietzker, auch Heinrich Müller, Bork-Nath). Daran schließen sich dann zuweilen noch andere auf elementarem Wege zu erledigende Probleme, insbesondere solche, wo die trigonometrischen Funktionen hineinspielen.

3. Als dritte Anwendung der Differentialrechnung im Unterricht nenne ich die Newtonsche Methode zur angenäherten numerischen Berechnung von Wurzeln. Das Problem wird von fast allen Büchern, die es bringen, in algebraischer Form angefaßt; dabei spielt die Ableitung der Funktion ihre Rolle, wird jedoch manchmal (z. B. bei Bardey-Hartenstein) nicht in Beziehung gesetzt zu ihrer in anderen Fällen, z. B. bei den Maximis und Minimis benutzten geometrisch-anschaulichen Bedeutung. Nur in wenigen Lehrgängen wird die gerade hier besonders aufklärende graphische Darstellung ausgenutzt; übrigens ergeht es der einfacheren regula falsi zuweilen ebenso. Im modernen Lehrbuch (Schwab-Lesser) wird dieses Kapitel im organischen Zusammenhang mit der graphischen Darstellung der rationalen ganzen Funktion stehen.

Auf die Anwendung der Differentialrechnung auf Mechanik gehen wir hier nicht ein, es sei nur bemerkt, daß viele Leitfäden der Infinitesimalrechnung dieses Gebiet berühren, daß aber von seiten der Physik noch kaum Anzeichen eines Reagierens vorliegen.[2]) Die Internationale

1) Diese Bezeichnung geht wahrscheinlich auf eine Bemerkung Fermats am Schlusse einer Abhandlung de maximis et minimis zurück (D. Petri de Fermat, Varia opera mathematica. Tolosae. (J. Pech.) 1669; Neue Ausgabe: Berolini (Friedländer.) 1861, pg. 69–73. = Oeuvres p. p. (Tannery I, pg. 166), auf die mich Herr Conrad Müller-Göttingen aufmerksam gemacht hat. Dort wird untersucht, wo bei einer Kurve ein Wendepunkt auftritt und diese Aufgabe auf ein Minimumproblem für den Winkel zwischen Kurventangente und y-Achse zurückgeführt. – Übrigens ist die Fermatsche Regel wohl zu unterscheiden von der Fermatschen Methode (dieser Ausdruck findet sich z. B. bei Heinrich Müller, Ausg. A, 2. Teil, 3. A.). Damit ist die Lösungsweise der Maxima- und Minima-Aufgaben gemeint, die Fermat im Anfang der eben genannten Abhandlung gibt.

2) In F. Poske, Oberstufe der Naturlehre. 2. A. Braunschweig. (Vieweg.) 1909 werden Geschwindigkeit und Beschleunigung exakt, jedoch in Limes-Schreibweise eingeführt. – Herr F. Poske schreibt mir dazu: „Die Physiklehrbücher können noch nicht reagieren, solange die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung nicht als allgemein bekannt vorausgesetzt werden können.

Mathematische Unterrichtskommission beabsichtigt über die Mechanik einen besonderen Bericht herauszugeben.

Als ein zweites Gebiet der Infinitesimalrechnung kommt für die Schule die Reihentheorie in Betracht. Es ist üblich, gewisse Gruppen endlicher Reihen, die arithmetischen und geometrischen, vorweg zu nehmen. Man teilt dabei gewöhnlich in einfache und in Reihen höherer Ordnung. Die erste, wichtigere Gruppe gibt Anlaß zu zahlreichen Anwendungen der Zinseszins- und Rentenrechnung; Stoff bringt hier jede Aufgabensammlung, es sei aber noch ausdrücklich auf eine Programmarbeit von Krug[1]) hingewiesen, die auch auf die möglichst praktische Anlage des Rechenschemas achtet. Die zweite Gruppe wird immer mehr eingeschränkt; hier werden die sogenannten figurierten Zahlen, die Polygonal- und Pyramidalzahlen und dgl. behandelt. (Man vgl. z. B. Spieker, Wittstein im Band über Analysis).

In der Lehre von den unendlichen Reihen wird zunächst der Begriff der Konvergenz besprochen, und man geht nun zur Aufstellung einiger Reihen über. Dort wo Differentialrechnung bekannt ist, wird die Mac Laurinsche und die Taylorsche Reihe abgeleitet und dann zur Reihendarstellung einzelner Funktionen geschritten. Betrachtungen des Restgliedes, wie sie sich, wie bereits erwähnt, bei Gallenkamp finden, fallen in der Mehrzahl der Fälle fort, man möchte eben nicht bis zum Mittelwertssatz vordringen. Man stellt sich deshalb auf einen mehr empirischen Standpunkt, indem man die Annäherung von Funktionen durch Polynome unter dem Bilde und unter steter Kontrolle durch die Annäherung einer Kurve durch Parabeln[2]) untersucht. (Siehe wieder Schwab-Lesser). Wo man nicht die Taylorschen Entwicklungen bringt, hilft meist die sogenannte Methode der unbestimmten Koeffizienten aus. Es ist merkwürdig, daß auch in einzelnen Fällen, wo neuerdings Differentialrechnung betrieben wird, ja wo die Taylorsche Reihe entwickelt wird, nicht von dieser Ableitungsmöglichkeit voller Gebrauch gemacht, sondern zunächst wenigstens andere Wege eingeschlagen werden (Heilermann-Diekmann).

Reihen werden entwickelt etwa für $(1+x)^n$, wo n eine beliebige rationale Zahl ist, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\log(1+x)$, $\operatorname{arc}\tan x$. Die Ableitung nach der Mac Laurinschen oder Taylorschen Reihe ergibt sich unmittelbar; einige Andeutungen seien jedoch gemacht über die üblichsten „elementaren" Herleitungen.

1) Krug, Die niedere Analysis auf der Unterstufe des Realgymnasiums. Progr. Kgl. Realgymnasium Stuttgart. 1903.

2) Vergl. W. Lorey, Über die Maclaurinsche und Taylorsche Entwicklung einer Funktion. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 39 (1908), 361 und R. Schimmack, Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen. Ebenda 39 (1908), 513. Leider sind diese Methoden noch recht wenig verbreitet. Nimmt doch A. Weill's Aufgabensammlung die Taylorsche Reihenentwicklung deswegen nicht auf, „weil sie in keine brauchbare Beziehung zur graphischen Abbildung gebracht werden konnte."

Der Ausdruck $(1+x)^n$ wird zunächst als Binomialsatz für positives ganzes n ausgesprochen (siehe Abschnitt 17) und da, sei es durch Schluß von n auf $n+1$, sei es unter Heranziehung der Kombinatorik bewiesen. Jetzt untersuchen die einen, was aus der Reihe wird, wenn n negativ oder gebrochen ist; unter Benutzung der Funktionalgleichung

$$f(n) \cdot f(m) = f(n+m)$$

wird dann der Satz auch für diese Exponenten bewiesen (vgl. etwa Lieber und von Lühmann, Heilermann-Diekmann). Ein anderer Weg ist der, daß die Potenzreihe mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt und dann differenziert wird (ohne daß das besonders gesagt wird; man bildet eben $(1+x)^n - (1+y)^n$ und dividiert durch $x-y$), dann kann man durch Koeffizientenvergleichung die Koeffizienten finden (z. B. Fenkner, Thieme).

Die Reihe für e wird durch Auswertung von

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

gefunden und ähnlich der Ausdruck für e^x. Von da aus erhält man dann durch einen Kunstgriff $\log(1+x)$; es ist

$$\lim_{n=0}\frac{(1+x)^n-1}{n} = \log\text{nat}\,(1+x).$$

Die Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ werden von den einen aus dem Moivreschen Theorem gewonnen, indem in

$$\cos x + i\sin x = \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n$$

zur Grenze $n=\infty$ übergegangen wird, andere benutzen wieder die Methode der unbestimmten Koeffizienten, da nach zweimaliger Differentiation (von der natürlich wieder nichts gesagt wird) die Reihe links wieder auftritt.

Die arc tan-Reihe erhält man entweder durch eine ziemlich komplizierte (verdeckte) Differentiation, welche die Regel $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$ benutzt (z. B. bei Spieker, Wrobel), und nachfolgende Koeffizientenvergleichung, oder dadurch, daß man unter Benutzung von

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

die Beziehung

$$\text{arc}\tan x = \frac{1}{2i}\log\text{nat}\,\frac{1+ix}{1-ix}$$

herleitet (vgl. Fenkner, Bork-Nath, Lieber-von Lühmann, in etwas anderer Form Bardey).

Zur praktischen Berechnung von Logarithmen und von π werden in der Regel noch einige schneller konvergierende Reihen abgeleitet, z. B. für

$$\log\text{nat}\,\frac{1+x}{1-x}$$

und

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tan } \tfrac{1}{2} + \text{arc tan } \tfrac{1}{3}$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ arc tan } \tfrac{1}{5} - \text{arc tan } \frac{1}{239}.$$

Schließlich sind noch einige Worte über die Stellung der Integralrechnung im Unterricht zu sagen. Sehen wir von den Integralprinzipien ab, die bei der Auswertung von Kurven, Flächen und Körpern in der Planimetrie und Stereometrie zur Anwendung kommen, so beschränkt sich der Mathematikunterricht der offiziellen Lehrpläne auf einige Kegelschnittquadraturen; die Mechanik hat etwa beim Begriff der Arbeit und des Trägheitsmomentes auf das Integral einzugehen. Die Zahl der Stimmen, die (also bei dem durch die Lage der Dinge gebotenen Festhalten an den offiziellen Lehrplänen) Integralrechnung einzuführen wünschen, ist deshalb geringer als bei der Differentialrechnung; Kambly-Langguth, Heilermann-Diekmann tun es nicht.

Die Leitfäden der Infinitesimalrechnung bringen hingegen meistens einen kleinen, oft vom bestimmten Integral ausgehenden Abschnitt, umfangreicher ist das Kapitel bei Lesser und bei Schwab-Lesser, die mit dem unbestimmten Integral beginnen. In der Schule wird man häufig einen Mittelweg einschlagen: man wird vor dem Begriff des bestimmten Integrals nicht zurückschrecken, jedoch die Berechnung von Integralen nicht in der Weise betreiben, wie etwa bei den Differentialquotienten. Die noch offene Kardinalfrage ist eben die, ob die Identität des als Summe definierten und des durch Umkehrung der Differentiation über das unbestimmte Integral hinweg definierten bestimmten Integrals nachgewiesen wird. Damit hängt dann auch wieder, wie gesagt, die Einführung der Differentiale in der Differentialrechnung zusammen. Alles in allem ist die unterrichtliche Behandlung der Integralrechnung und die Eingliederung in den bisherigen Stoffkreis heute noch so sehr im Werden, daß feste Formen sich bisher nicht in dem Maße ausgebildet haben, wie anderwärts.

26. Mathematik in der Reifeprüfung.

Es ist hier nicht der Ort, auf die Bestimmungen über Reifeprüfungen in den verschiedenen Staaten und Schulen einzugehen; ihnen allen ist eine schriftliche und eine mündliche Prüfung, diese mit zulässiger Befreiung der besseren Schüler, gemeinsam und ferner, daß diese Prüfungen im Gegensatz beispielsweise zu Frankreich und England von Lehrern der betreffenden Anstalt in Gegenwart eines staatlichen Kommissars abgehalten werden. Die mündliche Prüfung schließt sich deshalb naturgemäß eng an das im Unterricht Behandelte an. Die schriftliche Prüfung besteht in der Lösung einer Anzahl (etwa wie in Preußen 4) Aufgaben, die unter ständiger Aufsicht und ohne Benutzung anderer Hilfsmittel als der Logarithmentafel in vorgeschriebener Zeit (in Preußen

z. B. 5 Stunden) anzufertigen sind. An die Stelle einzelner Aufgaben treten zuweilen auch zusammenhängende Darstellungen irgendeines Kapitels aus dem Lehrstoff. Die gestellten Aufgaben werden meistenteils — in Preußen stets, doch z. B. nicht in Baden — in den jährlich erscheinenden Schulnachrichten (Programmen) der einzelnen Anstalten veröffentlicht. Sie in derselben Weise, wie das etwa in Frankreich geschieht, in den Schulzeitschriften zusammenzustellen, liegt kein Anlaß vor. Immerhin gibt es eine Anzahl von Sammlungen, die nur, oder doch fast nur aus Aufgaben bestehen, die in Reifeprüfungen gestellt sind. Die bekannteste unter ihnen ist die Sammlung von H. C. E. Martus, die fast ausschließlich preußische höhere Schulen berücksichtigt. Sie wird, wie die hohe Auflagenzahl der beiden ersten Teile zeigt, sehr viel von Lehrern benutzt, ist übrigens auch in einigen wenigen Anstalten offiziell eingeführt. In der Tat stellen ja diese 3000 meist schwierigeren Aufgaben eine ausgezeichnete Auswahl dar, da sie für die Zwecke der Prüfung von den einzelnen Fachlehrern mit besonderer Sorgfalt aufgestellt sind. Es existiert noch eine ganze Anzahl anderer derartiger Sammlungen, die aber alle nicht die Bedeutung derjenigen von Martus erreicht haben. So hat H. Berkenbusch Aufgaben aus den Abschlußprüfungen der sechsstufigen Anstalten (bes. Realschulen) in Preußen, Waldvogel die „Absolutorial-Aufgaben" an den humanistischen Gymnasien Bayerns seit 1867 veröffentlicht. Neueren Datums sind Zusammenstellungen der Aufgaben aus Baden (von Treutlein) und von den württembergischen Oberrealschulen (Sprenger). Diese württembergischen Oberrealschulen gehen übrigens in der darstellenden Geometrie, der Differential- und Integralrechnung, der analytischen Geometrie des Raumes sehr viel weiter, als man das in Norddeutschland gewohnt ist. — Über die Reifeprüfungsaufgaben einer einzelnen, gleichfalls Differential- und Integralrechnung treibenden Anstalt, der Oberrealschule in Breslau, berichtet ein Büchlein von Gutsche. Weiteres Material ist in zahlreichen Zusammenstellungen in Programmabhandlungen zerstreut.

Wenn man aus diesen Büchern einen Schluß auf die Stoffauswahl in den Schulen ziehen will, so ist dabei zu beachten, daß das in den Büchern benutzte Material zeitlich zum Teil recht weit zurückliegt und daß Reformen in der Stoffwahl sich erst verhältnismäßig spät unter den Aufgaben bei den Abgangsprüfungen bemerkbar machen werden. Wegen dieser zwiefachen Phasenverschiebung werden diese Bücher also nicht in der Lage sein, Auskunft über neuere Bestrebungen im Unterricht zu geben. Wenn man jedoch diese Einschränkung in Rechnung zieht, so sind diese Aufgabensammlungen noch am besten geeignet, dem allgemeinen Publikum ein Bild von den wirklich in den Schulen erzielten Resultaten zu geben. Immerhin ist das Bild ein einseitiges, es kommt hier nur die Fähigkeit der Schüler im Lösen von Aufgaben, noch dazu unter einschränkenden äußeren Bedingungen, zum Ausdruck.

Es wird überhaupt sehr schwer sein, sich vollkommen verläßlich über das in Wahrheit in der Schule Erreichte zu unterrichten. Jedenfalls fällt bei der Feststellung solcher auf die Gesamtschule bezogenen Durchschnittsresultate, sei es nun für den Abschluß der Schule oder für irgendeine beliebige Klassenstufe, immer ein Element ganz aus der Rechnung heraus — und doch ist es vielleicht das wichtigste — die Persönlichkeit des Lehrers. Wie der Lehrer zu seinen Schülern, zu seiner Wissenschaft steht, ob er wirklich oder nur dem Namen nach Lehrer ist, das ist zumal bei der freiheitlichen Auffassung, die über unsere Lehrpläne gestattet ist, und bei der Unmöglichkeit, methodische Unterrichtsweise in Paragraphen zu fassen, das in erster Linie Ausschlaggebende.

Literaturverzeichnis.

Vorbemerkung.

Aufgenommen in diese Liste wurden nur Schulbücher; diejenigen, die der Berichterstatter nicht für die vorstehende Arbeit einsehen konnte, sind mit einem* gekennzeichnet. Es ist durchaus nicht Vollständigkeit angestrebt, vielmehr sind mit wenigen Ausnahmen nur solche Bücher angeführt, die in dem Berichte erwähnt wurden.

A. Adler, Fünfstellige Logarithmen. Leipzig. (Göschen.) 1909.

I. Alexandroff, Aufgaben aus der niederen Geometrie. Leipzig. (Teubner.) 1903.

Th. Albrecht, siehe Bremiker.

G. Arendt, Géométrie dans L'Espace. Berlin. (F. A. Herbig.) 1878.

– Trigonométrie rectiligne. Ebenda 1876.

E. F. August, Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 27. A. Leipzig. (Veit u. Co.) 1905.

O. Baer, Éléments de la Géométrie plane. Berlin. (G. Reimer.) 1887.

– Éléments d'Algèbre. Ebenda. 1885.

H. Bach siehe Clasen.

Bahnson, Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie. 1. Teil. 4. A. Hamburg. (Rudolphi.) 1887.

R. Baltzer, Die Elemente der Mathematik. 1. Bd.: Arithmetik und Algebra. 7. A. 1885. 2. Bd.: Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie. 6. A. 1883. Leipzig. (S. Hirzel.)

E. Bardeys Aufgabensammlung. Neue Ausg. bearb. von F. Pietzker und O. Presler. 6. A. Leipzig. (Teubner.) 1908.

– – Neue Ausg. für bayersche Mittelschulen; bearb. von J. Lengauer. 2. Aufl. 1909. Ebenda.

– Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. Neue Ausg., bearb. von F. Pietzker und O. Presler. 3. Aufl. 1906. Ebenda.

– – Bearb. von H. Hartenstein. 1. Teil. 8. A. 1909. 2. Teil. 1907. Ebenda.

I. K. Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage streng deduktiv dargestellt. 1. Teil. Berlin. (Weidmann.) 1877.

F. Behl, Die Darstellung der Planimetrie nach induktiver Methode. Hildesheim. (Lax.) 1886.

O. Behrendsen und E. Götting, Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. A. Unterstufe. Leipzig. (Teubner.) 1909.

– – Ausg. f. höhere Mädchenlehranstalten. Ebenda. 1909.

H. Bensemann, Lehrbuch der ebenen Geometrie. Dessau. (P. Baumann.) 1892.

H. Berkenbusch, Mathematisches Übungsbuch. Aufgaben aus den Abgangsprüfungen sechsstufiger höherer Lehranstalten. Berlin. (L. Simion.) 1902.

H. Bertram, siehe Hirsch.

Chr. Beyel, Darstellende Geometrie. Leipzig. (Teubner.) 1901.

B. Biel, Mathematische Aufgaben. Ausg. f. Gymnasien. 1. Teil. 1903. 2. Teil. 1907. Leipzig. (G. Freytag.)

A. Bode, siehe Schellbach.

R. Böger, Elemente der Geometrie der Lage. Leipzig. (Göschen.) 1900.

A. Böhmes Rechenbücher. Neubearbeitung durch K. Schäffer und G. Weidenhammer. Bielefeld. (Velhagen u. Klasing.) 1905*.

H. Bork, Mathematische Hauptsätze. Herausgegeben von M. Nath. Ausg. f. Realgymnasien und Oberrealschulen. 1. Teil. 5. A. 1907; 2. Teil. I. Abt. 2. A. 1904. II. Abt. (von W. Gercken). 1903. Leipzig. (Dürr.)

H. Bork, P. Crantz und E. Häntzschel, Mathematischer Leitfaden für Realschulen. 1. Teil: Planimetrie und Arithmetik. 5. A. 1906. 2. Teil: Trigonometrie und Stereometrie. 4. A. 1908. Leipzig. (Dürr.)
H. Börner, Lehrbuch zur Einführung in die Geometrie. Leipzig. (Teubner.) 1879.
E. F. Borth, Die geometrischen Konstruktionsaufgaben. 13. A. Leipzig. (O. R. Reisland.) 1904.
A. Böttger, Die Stereometrie. Für den Unterricht an den Realschulen. 3. A. Leipzig. (Dürr.) 1908.
– Die ebene Geometrie. 2. A. Ebenda. 1899.
J. R. Boymann, Lehrbuch der Mathematik. Bearb. von Vering. 1. Teil: Geometrie der Ebene. 25. A. 1907. 2. Teil: Ebene Trigonometrie und Geometrie des Raumes. 17. A. 1907. 3. Teil. Arithmetik. 11. A. 1904. Düsseldorf. (L. Schwann.)
Bremikers Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Dezimalen. Neubearb. von Th. Albrecht. 12. A. Berlin. (Nicolai.) 1895.
– Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 5 Dezimalstellen. Berlin. (Weidmann.) 9. A. 1903.
– siehe auch von Vega.
F. I. Brockmann, Versuch einer Methodik zur Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben. Leipzig. (Teubner.) 1889.
– Materialien zu Dreieckskonstruktionen. Ebenda. 1888.*
– Planimetrische Konstruktionsaufgaben. Ebenda. 1889.*
O. Th. Bürklen, Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig. (Göschen.) 1905.
F. Busch, siehe Féaux.
F. Bußler, Die Elemente der Mathematik. Ausg. f. Realschulen. Dresden. (L. Ehlermann.) 1902.
– Mathematisches Übungsbuch. 1. Teil. 5. A. 1903. 2. Teil. 4. A. 1904. Ebenda.
R. Clasen und H. Bach, Aufgabensammlung im Anschluß an Herchers Lehrbuch der Geometrie. Heft 1–3. Leipzig. (P. List.) 1902.
F. Conradt, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Leipzig. (Teubner.) 1889.
P. Crantz, Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 120 u. 205). 1. Teil. 1906. 2. Teil. 1908. Leipzig. (Teubner.)
– Lehrbuch der Mathematik für höhere Mädchenschulen und Lyzeen. 1. Teil: Für höhere Mädchenschulen. 2. Teil: Für Lyzeen. Ebenda 1909.
– siehe auch Bork.
L. Cremona-M. Curtze, Elemente des graphischen Calculs. Leipzig. (Quandt u. Händel.) 1875.*
M. Curtze, siehe Cremona.
G. Degenhardt, Praktische Geometrie auf den Gymnasien. Frankfurt a. M. (F. B. Auffahrt.) 1898.
P. Dekker. siehe Niemöller.
F. Dicknether, Leitfaden der darstellenden Geometrie. München. (J. Lindauer.) 1899.
J. Diekmann, Anwendung der Determinanten und Elemente der neueren Algebra auf dem Gebiete der niederen Mathematik. Leipzig. (Teubner.) 1881.
– Übungen und Aufgaben für propädeutischen Unterricht in Geometrie. I. Teil: Vorübungen zur Euklidischen Geometrie. 1886. 2. Teil: Vorübungen zur synthetischen Geometrie. 1887. Breslau. (Hirt.)
– siehe auch Heilermann, Koppe.
H. Dobriner, Leitfaden der Geometrie für höhere Lehranstalten. Leipzig. (Voigtländer.) 1898.
H. Dreßler, Die Lehre von den Funktionen. Leipzig. (Dürr.) 1908.
A. Dronke, Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise. Leipzig. (Teubner). 1881.
J. Druxes, siehe Heis.

K. Düsing, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung in geometrischer Methode. Hannover. (M. Jänecke.) 1908.
W. Eggers, Lehrbuch des Projektionszeichnens. 3. A. Leipzig. (Seemann u. Co.) 1905.
– Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Teil: Die Elemente. 2. A. 1900. 2. Teil: Durchschnitte und Durchdringungen der Körper. 1900. Ebenda.
– W. Eichhorn, Arithmetisches Regelheft. 4 Hefte. Leipzig. (Teubner.) 1900.
A. Emmerich, Der Koordinatenbegriff und einige Grundlehren von Kegelschnitten. Essen. (G. D. Baedeker.) 1893.
W. Erler, Einleitung in die analytische Geometrie und in die Lehre von den Kegelschnitten. 2. A. Berlin. (F. Dümmler.) 1893.
– Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. 6. A. von L. Hübner. Leipzig. (Teubner.) 1903.
B. Féaux, Buchstabenrechnung und Algebra. 10. A. von F. Busch. Paderborn. (F. Schöningh.) 1903.
– Lehrbuch der elementaren Planimetrie. 9. A. von F. Busch. Ebenda. 1904.
– Ebene Trigonometrie und elementare Stereometrie. 7. A. von F. Busch. Ebenda. 1898.
A. Feld und V. Serf, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. 5. A. Wiesbaden. (C. G. Kunze.) 1907.
H. Fenkner, Lehrbuch der Geometrie. 1. Teil: Ebene Geometrie 5. A. 1906. 2. Teil: Raumgeometrie. 3. A. 1904. 3. Teil: Ebene Trigonometrie. 1908. Berlin. (O. Salle.)
– Arithmetische Aufgaben. Ausg. A. Teil 1. 6. A. 1909. Teil 2. 3. A. 1905. Teil 3. 2. A. 1907. Berlin. (O. Salle.)
K. Fink, Die elementare systematische und darstellende Geometrie der Ebene. 1. u. 2. Kurs 1896. 3. u. 4. Kurs 1897. Tübingen. (H. Laupp.)
R. von Fischer-Benzon, siehe Petersen.
E. Fischer, siehe Schellbach.
M. Focke und M. Kraß, Lehrbuch der Geometrie. 1. Teil: Planimetrie 15. A. 1906. 2. Teil: Stereometrie 9. A. 1906. Münster (Westf.) (Coppenrath.)
– Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 10. A. Ebenda. 1906.
– Leitfaden zur Einführung in die Stereometrie und Trigonometrie. 3. A. Ebenda. 1899.
R. Franz, siehe Uth.
J. Frischauf, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. 4. A. Graz. (Leuschner & Lubensky.) 1881.
– Elemente der Geometrie. 2. A. Leipzig. (Teubner.) 1877.
W. Fuhrmann, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Berlin. (Winkelmann & Söhne.) 1884.
– Einleitung in die neuere Geometrie. Leipzig. (Teubner.) 1881.
H. Funke, Methodisch geordnete Aufgaben. Berlin. (G. Reimer.) 1896.
W. Gallenkamp, Die Elemente der Mathematik. 1. Teil. 2 Hefte. (Arithmetik und Algebra 1. Abt.; Planimetrie.) 5. A. (Jahr nicht angegeben). 2. Teil. (Arithmetik und Algebra 2. Abt.; Stereometrie und Trigonometrie.) 4. A. 1879. 3. Teil. (Algebraische Analysis. Einleitung in die höhere Analysis. Analytische Geometrie.) 2. A. 1880. 4. Teil. (Synthetische Geometrie. 1. Abt. Die Kegelschnitte in elementar-synthetischer Behandlung. 2. Abt. Die Linien und Flächen zweiter Ordnung nach den Methoden der Geometrie der Lage.) 1880. Iserlohn. (J. Baedeker.)
– Sammlung trigonometrischer Aufgaben. 2. A. Berlin. (Plahn.) 1878.
J. O. Gandtner, Elemente der analytischen Geometrie. 13. A. Berlin. (Weidmann.) 1907.
J. O. Gandtner und K. F. Junghans, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. 1. Teil. 4. A. 1879. 2. Teil. 3. A. 1882. Berlin. (Weidmann.)
H. Ganter und F. Rudio, Die analytische Geometrie der Ebene. 6. A. Leipzig. (Teubner.) 1906.
F. G. Gauß, Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Halle. (Strien.) 88.–91. A. 1906.
– Kleine Ausgabe. 17.–20. A. Ebenda. 1904.
– Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Ebenda. 1900.

W. Gercken, Grundzüge der darstellenden Geometrie. Leipzig. (Dürr.) 1903.
A. Gille, Lehrbuch der Geometrie. 1. Teil: Ebene Geometrie. 2. Teil: Trigonometrie und Stereometrie. Halle a. S. (Waisenhaus.) 1895.
E. Götting, siehe Behrendsen.
H. Graßmann, Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. 1. Teil: Lehrbuch der Arithmetik 1861. 2. Teil: Lehrbuch der Trigonometrie. 1865. Berlin. (A. Enslin.)
A. Greve, Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 14. A. Bielefeld. (Velhagen & Klasing.) 1909.
H. Grünbaum, Lehr- und Übungsbuch der Differential-Rechnung. Würzburg. (J. Frank.) 1901.
F. Günther und F. Boehm, Rechenbuch für höhere Lehranstalten. 9. A. Berlin. (H. W. Müller.) 1906.
O. Gutsche, Mathematische Übungsaufgaben. Leipzig. (Teubner.) 1905.
F. Haacke, Entwurf eines arithmetischen Lehrganges für höhere Schulen. Leipzig. (Teubner.) 1904.
E. Haentzschel, siehe Bork.
Haller von Hallerstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Nach dem Lehrplan für das Königl. Preußische Kadetten-Korps bearb. von B. Hülsen. 1. Teil: 7. A. 1903. 2. Teil: 4. A. 1901. 3. Teil: 4. A. 1902. Berlin. (Nauck & Co.)
– Lehrbuch der Elementar-Mathematik (für die Portepeefähnrichsprüfung usw.). 11. A. bearb. von B. Hülsen. 1. Teil: Arithmetik. 2. Teil: Geometrie. Ebenda. 1906.
E. Hammer, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart. (Metzler.) 1885. 2. A. 1898.
O. Handel, Elementar-synthetische Kegelschnittlehre. 3. A. Berlin. (Weidmann.) 1906.
Chr. Harms und A. Kallius, Rechenbuch. 24. A. Oldenburg. (G. Stalling.) 1908.
H. Hartenstein, siehe Bardey.
G. Hauck und F. Kommerell, Lehrbuch der Stereometrie. 9. A. von V. Kommerell. Tübingen. (H. Laupp.) 1905.
R. Heger, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. 1. Teil: Planimetrie. 1882. 2. Teil: Trigonometrie. 1882. 3. Teil: Stereometrie. 1883. 4. Teil: Analytische Geometrie der Ebene. 1883. Breslau. (Trewendt.)
Heilermann-Diekmanns Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Algebra. 1. Teil. 13. A. von K. Knops. 1909. 2. Teil. 6. A. von K. Knops. 1907. Essen. (G. D. Baedeker.)
– siehe auch Knops.
K. Heinze, Genetische Stereometrie. Bearb. von F. Lucke. Leipzig. (Teubner.) 1886.
E. Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. 97. u. 98. A. Köln. (M. Du Mont-Schauberg.) 1898. 112. A. von J. Druxes. 2 Teile. Ebenda. 1908.
– siehe auch Matthiessen.
J. Helmes, Die Elementar-Mathematik. 1. Teil: Die Arithmetik und Algebra. I. Abteil. 2. A. 1873. II. Abteil. 2. A. 1874. 2. Teil: Die Planimetrie. I. Abteil. 2. A. 1874. II. Abteil. 2. A. 1876. 3. Bd.: Die ebene Trigonometrie. 2. A. 1881. 4. Bd.: Die Stereometrie und sphärische Trigonometrie. 2. A. 1896. Hannover. (Hahn.)
J. Henrici und P. Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 1. Teil. 3. A. 1897. 2. Teil. 3. A. 1907. 3. Teil. 2. A. 1901. Leipzig. (Teubner.)
G. Hessenberg, Ebene und sphärische Trigonometrie. Leipzig. (Göschen.) 1901.
Meier Hirsch, Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. 20. A. von H. Bertram. Altenburg. (Pierer.) 1890.
F. Hochheim, Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. Heft I. 6. A. von F. Hochheim. 1900. Heft II. 2. A. 1884. Berlin. (Mittler.)

G. Hoffmann, Anleitung zur Lösung planimetrischer Aufgaben. 5. A. Leipzig. (O. R. Reisland.) 1903.
F. Hofmann, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 1. Teil. 9. A. 1890. 2. Teil. 10. A. 1902. 3. Teil. 5. A. 1892. Bayreuth. (Grau.)
A. Holtze, siehe Köstler.
G. Holzmüller, Vorbereitende Einführung in die Raumlehre. Leipzig. (Teubner.) 1904.
– Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. Teil. 4. A. 1904. 2. Teil. 2. A. 1897. 3. Teil. 2. A. 1903. Ebenda.
– Einführung in das stereometrische Zeichnen. Ebenda. 1886.*
L. Hübner, siehe Erler.
B. Hülsen, siehe Haller von Hallerstein.
A. Hupe, siehe Heinr. Müller.
K. F. Junghans, Lehrbuch der ebenen Geometrie. 2 Teile. Berlin. (Weidmann.) 1879.
– siehe auch Gandtner.
L. Kambly, Die Elementarmathematik. 2. Teil: Planimetrie. 75.–81. A. Breslau. (Hirt.) 1886.
Kambly-Langguth, Arithmetik und Algebra. Ausg. B. Bearb. von A. Thaer. 39. A. Breslau. (Hirt.) 1908.
Kambly-Roeder, Planimetrie. Ausg. B. 23.–26. A. Ebenda. 1906.
– Trigonometrie. Ausg. B. 6. A. Ebenda. 1906.
– Stereometrie und sphärische Trigonometrie. 32. A. bearbeitet von A. Thaer. Ebenda. 1909.
K. Knops und E. Meyer, Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Mathematik an den höheren Mädchenschulen, Lyzeen und Studienanstalten. Bearb. nach Heilermann-Diekmanns Algebra und Koppe-Diekmanns Geometrie. Bisher erschien Heft 1 bis 4. Essen. (Baedeker.) 1909.
– siehe auch Heilermann, Koppe.
Koppe und Diekmanns Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. Ausg. für Realanstalten. Neue Bearbeitung von K. Knops. 1. Teil. 24. A. 1908. 2. Teil. 20. A. 1908. 3. Teil. 3. A. 1907. Essen. (Baedeker.)
– siehe auch Knops.
H. Köstler, Vorschule der Geometrie. 9. und 10. A. Halle a. S. (L. Nebert.)*
H. Köstler und A. Holtze, Leitfaden der ebenen Geometrie. 1. Heft: Kongruenz. 6. A. 1906. 2. Heft: Lehre vom Flächeninhalt. 4. A. 1905. 3. Heft: Ähnlichkeitslehre. 4. A. 1906. Ebenda.
E. Kretschmer, Geometrische Anschauungslehre. Posen. (J. Jolowicz.) 1877.
– Elemente der Stereometrie. Als Manuskript gedruckt. Posen. (E. Rehfeld.) 1882.
– siehe auch Thieme.
R. Kreuschmer, siehe Lackemann.
W. Krimphoff, siehe Schwering.
F. Kruse, Elemente der Geometrie. Berlin. (Weidmann.) 1875.*
M. Kutnewsky, siehe Heinr. Müller.
C. Lackemann, Die Elemente der Geometrie. 2 Teile. Bearb. von Kreuschmer. 1. Teil. 8. A. 1906. 2. Teil. 5. A. 1906. Breslau. (Hirt.)
– Die Elemente der Arithmetik. 4. A. Bearb. von Kreuschmer. Breslau. (Hirt.) 1905.
J. Lange, Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. 3. A. von P. Zühlke. Berlin. (H. W. Müller.) 1908.
H. Langguth, siehe Kambly.
A. Lanner, Neuere Darstellungen der Grundprobleme der reinen Mathematik. Berlin. (O. Salle.) 1907.
H. Leitzmann, siehe Matthias.
H. Lemkes, siehe Schellen.

J. Lengauer, Die Grundlehren der ebenen Geometrie. 6. A. Kempten. (J. Kösel.) 1899.
– Die Grundlehren der Stereometrie. Ebenda. 1896.
– Die Grundlehren der ebenen Trigonometrie. 2. A. Ebenda. 1901.
– siehe auch Bardey.
O. Lesser, Die Infinitesimalrechnung im Unterrichte der Prima. Berlin. (O. Salle.) 1906.
– Einführung in den geometrischen Unterricht. Dortmund. (Köppen.) 1898.
– Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht. Berlin. (O. Salle.) 1902.
– siehe auch Schwab.
H. Lieber und von Lühmann, Geometrische Konstruktionsaufgaben. 13. A. Berlin. (Simion.) 1908.
– Leitfaden der Elementar-Mathematik. Neu bearb. von C. Müsebeck. 1. Teil: Planimetrie. Ausg. A. 23. A. 1909. Ausg. B. 4. A. 1906. 2. Teil. Ausg. A. 10. A. 1907. 3. Teil. 14. A. 1909. Berlin. (Simion.)
F. Lucke, siehe Heinze.
F. von Lühmann, siehe Lieber.
E. Lutz, Analytische Geometrie der Ebene. Karlsruhe i. B. (G. Braun.) 1909.
W. Madel, Die wichtigsten Dreiecksaufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Berlin. (M. Rüger.) 1892.
G. Mahler, Ebene Geometrie. 4. A. Leipzig. (Göschen.) 1905.
A. Mahlert, siehe Heinr. Müller.
P. Mansion, Einleitung in die Theorie der Determinanten. Aus d. 3. franz. Aufl. übersetzt. Leipzig. (Teubner.) 1899.
P. Martin und O. Schmidt, Raumlehre. Heft 1. 3. A. 1896. Heft 2. 3. A. 1897. Heft 3. 2. A. 1898. Dessau. (R. Kahle.)
H. C. E. Martus, Astronomische Erdkunde. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Kleine Ausgabe. 2. A. Dresden u. Leipzig. (Koch.) 1902.
– Mathematische Aufgaben. 1. Teil: Aufgaben. 11. A. 1903. 2. Teil: Ergebnisse. 11. A. 1903. 3. Teil: Aufgaben. 2. A. 1904. 4. Teil: Ergebnisse. 2. A. 1906. Ebenda.
– Raumlehre für höhere Schulen. 2 Teile. 1890/92. Bielefeld. (Velhagen und Klasing.)
– Leitfaden für den Unterricht in der Raumlehre. 2 Teile. 1893. Ebenda.
J. A. Matthias, Leitfaden für einen heuristischen Schulunterricht. 12. A. Bearb. von H. Leitzmann. Magdeburg. (Heinrichshofen.) 1883.
L. Matthiessen, Übungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. Nach der Aufgabensammlung von Heis für Realschulen usw. 6. A. Köln. (Du Mont-Schauberg.) 1905.
F. G. Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik. Neubearb. von A. Schulte-Tigges. Ausg. A. 25. A. des Stammbuches. Berlin. (Reimer.) 1908.
F. G. Mehler – A. Schulte-Tigges, Hauptsätze der Elementar-Mathematik. Ausg. B. Unterstufe: Planimetrie und Arithmetik. 1908. Oberstufe. 1. Teil: Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Berlin. (Reimer.) 1907.
R. Menge und F. Werneburg, Antike Rechenaufgaben. Leipzig. (Teubner.) 1881.
E. Meyer, siehe Knops.
F. Meyer, Elemente der Arithmetik und Algebra. 2. A. Halle a. S. (H. W. Schmidt.) 1885.
A. Milinowski, Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. 1. Teil: Planimetrie. 2. Teil: Stereometrie. 2 Hefte. Leipzig. (Teubner.) 1881.
– Elementar – synthetische Geometrie der gleichseitigen Hyperbel. Leipzig. (Teubner.) 1883.
Mink, Lehrbuch der Geometrie. Gotha. (Ackermann.) 1908.
A. Much, siehe Reidt.
C. H. Müller und O. Presler, Leitfaden der Projektionslehre. Ausg. A. Leipzig. (Teubner.) 1903.

E. R. Müller, Planimetrische Konstruktionsaufgaben. 5. A. Oldenburg. (G. Stalling.) 1903.

– Vierstellige logarithmische Tafeln. Stuttgart. (J. Maier.) 1892.

Heinrich Müller, Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Ausg. A. Für Gymnasien und Progymnasien. 2 Teile. 1. Teil: Die Unterstufe. 4. A. Leipzig. (Teubner.) 1907.

– – 2. Teil: Die Oberstufe. 3. A. Ebenda. 1909.

– – Ausg. B. Für reale Anstalten und Reformschulen. 2 Teile. 1. Teil: Die Unterstufe. 5. A. Ebenda. 1907.

– – 2. Teil: Die Oberstufe. Unter Mitwirkung von A. Hupe. 2 Abteilungen. Abt. 1. Planimetrie, Algebra, Trigonometrie und Stereometrie. 3. A. Ebenda. 1907.

– – Abt. 2. Geometrie der Kegelschnitte. Darstellende Geometrie. 3. A. Ebenda. 1909.

– – Ausg. für bayerische Lehranstalten. Herausgegeben von M. Zwerger. 2 Teile. Ebenda. 1906.*

– Aufgaben zu planimetrischen Konstruktionen und graphischen Darstellungen. Ebenda. 1909.

– und M. Kutnewsky, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. Ausg. A. Teil I. 5. A. 1909. Teil II. 3. A. 1909. Ebenda.

– – Ausg. B. Teil I. 4. A. 1906. Teil II. 2. A. 1907. Ebenda.

– – Ausg. für bayerische Lehranstalten. Hrsg. v. M. Zwerger. 1906. Ebenda.

– und A. Mahlert, Mathematisches Lehr- und Übungsbuch für höhere Mädchenschulen. Teil I: Arithmetik und Algebra. Teil II: Planimetrie und Körperberechnungen. 2. A. Leipzig. (Teubner.) 1909.

– – für das Lyzeum. Teil I: Arithmetik und Algebra. Teil II: Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie. Ebenda. 1909.*

– – für Studienanstalten. Ausg. A. Für gymnasiale Kurse. Arithmetik und Algebra. Teil I. Ebenda. 1909. Geometrie. Teil I. Ebenda. 1909.*

– – Ausg. B. Für Oberrealschul- und realgymnasiale Kurse. Arithmetik und Algebra. Teil I. Geometrie. Teil I. Ebenda. 1909.

– und F. Pietzker, Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten. Ausg. A. 3. A. Ebenda. 1906.

– und A. Witting, Lehrbuch der Mathematik für die oberen Klassen der höheren Lehranstalten. Ebenda. 1907.

Hubert Müller, Leitfaden der ebenen Geometrie. 1. Teil. 1. Heft. Die geradlinigen Figuren und der Kreis. 3. A. 1899. 2. Heft. Anhang. Erweiterung zu Teil 1 und Einleitung in die neuere Geometrie. 2. A. 1878. 2. Teil: Die Kegelschnitte und die Elemente der neueren Geometrie. 1875. Leipzig. (Teubner.)

– Die Elemente der Planimetrie. 7. A. Metz. (G. Scriba.) 1899.

– Die Elemente der ebenen Trigonometrie. 5. A. Ebenda. 1905.

– Die Elemente der Stereometrie. 4. A. Ebenda. 1908.

I. H. T. Müller, Vierstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und Winkelfunktionen. Halle. (Waisenhaus.) 2. A. 1861.*

C. Müsebeck, siehe Lieber.

C. Musmacher, Leitfaden und Aufgabensammlung für den propädeutischen geometrischen Unterricht. Leipzig. (Renger.) 1903.*

M. Nath, siehe Bork.

K. W. Neumann, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra. 7. A. Leipzig. (Heinsius.) 1899.

F. Niemöller und P. Dekker, Arithmetisches und algebraisches Unterrichtsbuch. 4 Hefte. Breslau. (Hirt.) 1899–1904.

G. Noodt, Mathematische Unterrichtsbücher für höhere Mädchenschulen. Bisher sind erschienen: Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra. 1908. Leitfaden der ebenen Geometrie. 1. Teil. 1909. 2. Teil. 1909. Bielefeld. (Velhagen u. Klasing.)

J. J. Oppel, Leitfaden für den geometrischen Unterricht an Gymnasien und ähnlichen Lehranstalten. 2. A. Frankfurt a. M. (Winter.) 1879.
F. Otto und P. Siemon, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik und Algebra für höhere Mädchenschulen. Leipzig. (Hirt.) 1907.
F. Pahl, siehe Schulze.
J. Petersen, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. 2. A. 1891. Lehrbuch der Stereometrie 1885. Die ebene Trigonometrie und die sphärischen Grundformeln 1885. Deutsch von R. von Fischer-Benzon. Kopenhagen. (A.F.Höst u. Söhne.) 1891.
— Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben. Deutsch von R. von Fischer-Benzon. Ebenda. 1879.
W. Pflieger, Elemente der Arithmetik. Straßburg. (F. Bull.) 1896.
F. Pietzker, Lehrgang der Elementar-Mathematik. Teil 1. Unterstufe 1906. Teil 2. Oberstufe 1908. Teil 3. Kegelschnittlehre 1908. Leipzig. (Teubner.)
— siehe auch Bardey, Heinrich Müller.
O. Rausenberger, Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene. Leipzig. (Teubner.) 1887.
E. Rehfeld, Leitfaden für die propädeutischen Kurse in Stereometrie und Trigonometrie an Realanstalten. Berlin. (Reuther und Reichard.) 1902.
F. Reidt, Vorschule der Theorie der Determinanten. Leipzig. (Teubner.) 1874.
— Aufgabensammlung zur Arithmetik und Algebra. 8. A. Berlin. (Grote.) 1905.
— Elemente der Mathematik: 1. Teil: Arithmetik und Algebra. 10. A.; 2. Teil: Planimetrie. 18. A.; 3. Teil: Stereometrie. 12. A.; 4. Teil: Trigonometrie. 14. A. 1908. Ebenda.
— Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. I. Trigonometrie. 5. A. Bearb. von H. Thieme. 1907. II. Stereometrie. 4. A. Bearb. von A. Much. 1897. Leipzig. (Teubner.)
Th. Reishaus, Vorschule zur Geometrie. 1. Abt. Lehrbuch. 2. Abt. Wiederholungs- und Aufgabenbuch. Leipzig. (Teubner.) 1879.
A. Reum, Der mathematische Lehrstoff für den Untersekundaner. Essen. (Baedeker.) 1894.
J. Reusch, Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung. Leipzig. (Teubner.) 1904.
A. Richter, Arithmetische Aufgaben. Leipzig. (Teubner.) 1898.
— Trigonometrische Aufgaben. Ebenda. 1898.
O. Richter, Kreis und Kugel in senkrechter Projektion. Leipzig. (Teubner.) 1908.
— Dreistellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Ebenda. 1907.
H. Röder, siehe Kambly.
F. Roese, Elementargeometrie. Wismar. (Hinstorff.) 1890.
C. Rohrbach, Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 5. A. Gotha. (Thienemann.) 1908.
F. Rudio, siehe Ganter.
F. Rummer, Lehrbuch der Trigonometrie. 2. A. Heidelberg. (J. C. B. Mohr.) 1867.
— Lehrbuch der Elementargeometrie. 2. Teil. 2. A. Ebenda. 1850.
J. Sachs, Leitfaden zum Unterricht in der projektivischen Geometrie. Bremerhaven. (L. von Vangerow.) 1907.
J. Sassenfeld, Hauptsätze der Elementar-Mathematik für das Gymnasium. 2. A. Unterstufe. 1906. Oberstufe. 1906. Trier. (Fr. Lintz.)
P. Sauerbeck, Lehrbuch der Stereometrie. Stuttgart. (A. Bergsträßer.) 1900.
K. Schaeffer, siehe Böhme.
P. Schafheitlin, Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig. (Teubner.) 1907.
K. H. Schellbach, Mathematische Lehrstunden. Aufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten. Bearb. von A. Bode und E. Fischer. Berlin. (Reimer.) 1860.

H. Schellen, Aufgaben zum Gebrauche beim Rechenunterricht. Ausg. A. Bearb. von H. Lemkes. 1. Teil. 30 A. 1902. 2. Teil. 8. A. 1900. Münster. (Coppenrath)*.
E. Schindler, Die Elemente der Planimetrie in ihrer organischen Entwicklung. Berlin. (Springer.) 4 Stufen. 1883.
— Das natürliche System der Elemente der Geometrie, der Normalunterrichtsgegenstand für unsere höheren Schulen. Leipzig. (Dürr.) 1898.
V. Schlegel, System der Raumlehre. 1. Teil: Geometrie. 1872. 2. Teil: Die Elemente der modernen Geometrie und Algebra. 1875. Leipzig. (Teubner.)
— Lehrbuch der elementaren Mathematik. 1. Teil: Arithmetik und Kombinatorik. 1878. 2. Teil: Geometrie 1879. 3. Teil: Trigonometrie. 1880. 4. Teil: Stereometrie und sphärische Trigonometrie. 1880. Wolfenbüttel. (Zwißler.)
O. Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maßes. 1. Heft: Planimetrie. 7. A. 1888. 2. Heft: Ebene Trigonometrie. 6. A. 1883. 2. Teil: Geometrie des Raumes. 3. A. 1874. Leipzig. (Teubner.)
— Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 19. A. Braunschweig. (Vieweg.) 1905.
O. Schmidt, siehe Martin.
Chr. Schmehl, Arithmetik und Algebra nebst Aufgabensammlung. Teil I. Teil II. Ausg. A. für die Obersekunda und Prima der Gymnasien. Ausg. B. für die Obersekunda der realistischen Anstalten. Gießen. (Roth.) 1907/08.
— Sammlung von Aufgaben aus der Algebra und algebraischen Analysis. Für die Prima realistischer Anstalten. Ebenda. 1909.
— Die Elemente der darstellenden Geometrie. 2 Teile. Gießen. (Roth.) 1899.
A. Schoenflies, Einführung in die Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden. Leipzig. (Teubner.) 1908.
E. Schroeder, Abriß der Arithmetik und Algebra. 1. Heft. Leipzig. (Teubner.) 1874.
R. Schröder, Die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung. Leipzig. (Teubner.) 1905.
Th. E. Schröder, siehe Wöckel.
H. Schubert, Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. 3. A. Leipzig. (Göschen.) 1905.
— Vierstellige Tafeln und Gegentafeln. 3. A. Leipzig. (Göschen.) 1908.
— und A. Schumpelick, Arithmetik für Gymnasien. 1. Heft: Für mittlere Klassen. 1907. 2. Heft: Für obere Klassen. 1908. Leipzig. (Göschen.)
A. Schülke, Vierstellige Logarithmentafeln. 6. A. Leipzig. (Teubner.) 1907.
— Aufgabensammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie. 1. Teil. Für die mittleren Klassen. 1906. 2. Teil. Für die oberen Klassen. 1902. Leipzig. (Teubner.)
— Differential- und Integralrechnung im Unterricht. Ebenda. 1907.
W. J. Schüller, Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 2. A. Leipzig. (Teubner.) 1897.
E. Schulze und F. Pahl, Mathematische Aufgaben. Ausgabe für Realgymnasien und Oberrealschulen. 1. Teil. 1908. 2. Teil. 1908. Leipzig. (Dürr.)
A. Schulte-Tigges, Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. (F. G. Mehler, Hauptsätze. Ausg. B. Oberstufe. 1. Teil.) Berlin. (Reimer.) 1907.
— siehe auch Mehler.
E. Schumann, Lehrbuch der ebenen Geometrie für die ersten drei Jahre geometrischen Unterrichts. Stuttgart. (Grub.) 1904.
A. Schumpelick, siehe Schubert.
M. Schuster, Geometrische Aufgaben. Ausg. A. für Vollanstalten. 1. Teil: Planimetrie. 2. A. 1903. 2. Teil: Trigonometrie. 1903. 3. Teil: Stereometrie. 2. A. 1908. Leipzig. (Teubner.)
F. Schütte, Anfangsgründe der darstellenden Geometrie für Gymnasien. Leipzig. (Teubner.) 1905.

K. Schwab und O. Lesser, Mathematisches Unterrichtswerk zum Gebrauche an höh. Lehranstalten. Im Sinne der Meraner Lehrpläne bearbeitet. I. Bd. Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. 1. Teil. (Unterstufe.) 2. A. 1909. 2. Teil. (Ausg. A. Oberstufe.) 1909. Wien u. Leipzig. (Tempsky u. Freytag.)
K. Schwering, Analytische Geometrie. 2. A. Freiburg i. Br. (Herder.) 1904.
– Trigonometrie. 3. A. Ebenda. 1907. Daraus: Anfangsgründe der Trigonometrie. 2. A. 1900.
– Stereometrie für höhere Lehranstalten. 3. A. Ebenda. 1909.
– Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten. 3. A. Ebenda. 1906.
– Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. 2. A. 1. Lehrg. 1902. 2. Lehrg. 1903. 3. Lehrg. 1904. Ebenda.
– und W. Krimphoff, Ebene Geometrie. 6. A. Ebenda. 1908.
H. Seeger, Die Elemente der Geometrie. 3. A. Wismar. (Hinstorff.) 1887.
– Leitfaden für den arithmetischen Unterricht in der Prima einer neunklassigen Realschule. Teil I. Elemente der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Teil II. Anwendungen der elementaren Infinitesimalrechnung auf die Mechanik. Wismar. (Hinstorff.) 1894.
H. Servus, Die analytische Geometrie der Ebene. Leipzig. (Teubner.) 1890.*
P. Siemon, siehe Otto.
M. Simon, Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie. Straßburg. 1890.
– Die Elemente der Arithmetik als Vorbereitung auf die Funktionentheorie. Straßburg. (R. Schultz & Co.) 1884.
Th. Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie. Ausg. A. 30. A. 1908. Ausg. B. 12. A. 1908. Ausg. C. 4. A. 1908. Potsdam. (Stein.)
– Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 7. A. Ebenda. 1907.
– Lehrbuch der Stereometrie. 5. A. Ebenda. 1907.
– Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 5. A. 1. Teil. 1903. 2. Teil. 1904. Ebenda.
C. Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie. 10. A. Leipzig. (C. F. Winter.) 1899.
Sprenger, Mathematische Aufgaben aus den Reifeprüfungen der württembergischen Oberrealschulen. 1. Teil. Leipzig. (Quelle u. Meyer.) 1908.*
H. Steckelberg, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig. (Teubner.) 1906.
A. Tellkampf, Vorschule der Mathematik. 6. A. Berlin. (Rücker u. Püchler.) 1864.
L. Tesař, Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig. (Teubner.) 1906.
A. Thaer, siehe Kambly.
H. Thieme, Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. Unterstufe. 2. A. 1905. Oberstufe. 2. A. 1907. Leipzig. (G. Freytag.)
– Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie. Im Anschluß an nachgelassene Papiere des Oberlehrers Dr. Kretschmer. Leipzig. (Teubner.) 1885.
– siehe auch Reidt.
P. Treutlein, Vierstellige logarithmische und goniometrische Tafeln. Braunschweig. (Vieweg.) 1896.
– Mathematische Aufgaben aus den Reifeprüfungen der badischen Mittelschulen. 1. Teil: Aufgaben. 2. Teil: Auflösungen. 1907. Leipzig. (Teubner.)
– siehe auch Henrici.
K. Uth, Planimetrie. 7. A. von R. Franz. Kassel. (E. Hühn.) 1904.
G. von Vega, Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Bearb. von C. Bremiker. 78. A. Berlin. (Weidmann.) 1900.
Vering, siehe Boymann.
K. J. Volk, Die Elemente der neueren Geometrie. Leipzig. (Teubner.) 1907.
J. Waldvogel, Lösungen der Absolutorial-Aufgaben aus der Mathematik an den humanistischen Gymnasien Bayerns seit dem Jahre 1867. 3. A. München. (E. Pohl.) 1903.

Th. Walter, Algebraische Aufgaben. 1. Bd. Stuttgart. (W. Spemann.) 1889. 2. Bd. Stuttgart. 1891. (Union. Deutsche Verlagsgesellschaft.)
F. Walther, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Unter- und Mittelstufe. Berlin. (Salle.) 1907.
H. Wehner, Leitfaden für den stereometrischen Unterricht an Realschulen. 2. A. Leipzig. (Teubner.) 1901.
G. Weidenhammer, siehe Böhme.
A. Weill, Sammlung graphischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen. I. Mathematik. Gebweiler. (Boltze.) 1909.
F. Werneburg, siehe Menge.
K. W. Wiecke, Abriß der Elementarmathematik. Frankfurt a./O. (Hoffmann.) 1839.
A. Wiegand, Analytische Geometrie. 7. A. Halle a./S. (H. W. Schmidt.) 1891.
E. Wienecke, Der geometrische Vorkursus in schulgemäßer Darstellung. Leipzig. (Teubner.) 1904.
Th. Wimmenauer, Die Elemente der Mathematik für Gymnasien. 1. Teil: Arithmetik. 2. A. Breslau. (Hirt.) 1892.
A. Witting, siehe Heinr. Müller.
Th. Wittstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. Bd. 1. Abt. Arithmetik. 9. A. 1895. 2. Abt. Planimetrie. 20. A. 1908. 2. Bd. 1. Abt. Ebene Trigonometrie. 8. A. 1896. 2. Abt. Stereometrie. 9. A. 1897. 3. Bd. 1. Abt. Analysis. 2. A. 1880. 2. Abt. Analytische Geometrie. 2. A. 1886. Hannover. (Hahn.)
– Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 23. A. Ebenda. 1906.
L. Wöckel, Geometrie der Alten. Bearb. von Th. E. Schröder. 14. A. Nürnberg. (F. Korn.) 1901.
H. Wolff, Sätze und Aufgaben der Geometrie für Realanstalten. 1. Teil: Unterstufe. 1908. 2. Teil: Oberstufe. 1909. Leipzig. (Teubner.)
E. Wrobel, Leitfaden der Stereometrie. 3. A. Rostock. (H. Koch.) 1906.
– Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra. 1. Teil. 11. A. 1906. 2. Teil. 6. A. 1906. Anhang für höhere realistische Lehranstalten. 4. A. 1906. Ebenda.
P. Zühlke, siehe Lange.
M. Zwerger, siehe Heinr. Müller.

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND I HEFT 2

DIE ORGANISATION DES MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS AN DEN HÖHEREN KNABENSCHULEN IN PREUSSEN

VON

DR. WALTHER LIETZMANN
OBERLEHRER AN DER OBERREALSCHULE IN BARMEN

MIT 18 FIGUREN IM TEXT

TG

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

VORREDE.

Der vorliegende, durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission veranlaßte Bericht stellt sich die Aufgabe, ein Bild von der gegenwärtigen Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preußen zu geben. Im Gegensatz zu meinem ersten, in diesen Abhandlungen erschienenen Lehrbuchbericht (Bd. I, Heft 1) geht der neue ganz und gar von der äußeren Organisation der Knabenschulen überhaupt und von der durch die Lehrpläne gegebenen inneren Organisation des mathematischen Unterrichts aus. Auch hier aber handelt es sich im Grunde wieder um Stoff und Methode der Schulmathematik, nur in anderer Einstellung als dort. So werden, hoffe ich, die beiden Berichte, die übrigens durchaus unabhängig voneinander sind, sich gegenseitig ergänzen, indem sie einen und denselben Gegenstand von ganz verschiedenen Seiten aus betrachten.

Das Material für die Darstellung boten neben der Zeitschriften- und Buchliteratur in erster Linie die Programme der preußischen höheren Lehranstalten. Die Benutzung dieser Jahresberichte ist, zumal wo es sich um die neueren Strömungen im mathematischen Unterricht handelt, bei den vielen Zufälligkeiten, die bei ihrem Zustandekommen mitspielen, nicht ganz unbedenklich. Außerdem konnten nur die bis Ostern 1909 vorliegenden Veröffentlichungen berücksichtigt werden; es ist recht wahrscheinlich, daß bereits die inzwischen erschienenen neuen Programme von 1910 eine beträchtliche Verschiebung des Bildes ergeben. Ich hoffe später meine Angaben ergänzen zu können und bin auch für die Angabe jeder nicht in den Programmen zum Ausdruck kommenden Abweichung von den hier gegebenen Daten sehr dankbar.

In den anderen Staaten Deutschlands sind die Unterlagen für die entsprechenden Berichte durch eine Fragebogenenquete ergänzt worden. Eine solche war zunächst auch für Preußen geplant; es wurde jedoch davon auf einen Wunsch aus dem Unterrichtsministerium hin Abstand genommen. Dagegen war es mir vergönnt, mit Genehmigung des Herrn Ministers auf einer Unterrichtsreise eine größere Anzahl preußischer Anstalten kennen zu lernen. Die dabei gemachten Beobachtungen sind mit Erlaubnis des Herrn Ministers in diesem Bericht, möglichst ohne subjektive Färbung, aufgenommen. Es war so möglich, den an und für sich recht spröden Stoff durch eine Reihe wirklich authentischer

Beispiele aus Unterricht und Reifeprüfung zu beleben. – Ich möchte auch an dieser Stelle für das liebenswürdige Entgegenkommen, das ich auf dieser Reise allseitig gefunden habe, den Herren Direktoren und Kollegen meinen verbindlichsten Dank sagen.

Man wird trotz solcher Unterbrechungen durch praktische Unterrichtsproben bei der Lektüre meines Berichtes hier und da auf unliebsame Häufungen von Lehrplänen stoßen; ich kann dann nur raten, zunächst die Einzelheiten dieser Pläne zu überschlagen. Aber anderseits dürfte dieser Bericht gerade durch seine Ausführlichkeit neben einer bloßen Darstellung der gegenwärtigen Unterrichtsverhältnisse vielleicht das weitergehende Ziel anstreben, objektiv vorgetragenes Material für zukünftige Lehrplangestaltung, sei es nun an einzelnen Anstalten, sei es für ganze Schulgattungen, zu bieten.

Bei der Korrektur meiner Arbeit durfte ich mich wieder der gütigen Unterstützung einer großen Anzahl von Herren erfreuen; vielfache Anregung schulde ich Herrn Geheimen Regierungs- und Vortragendem Rat im Unterrichtsministerium Dr. Norrenberg, den Mitgliedern und Mitarbeitern der deutschen Unterkommission der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission. Ihnen allen bin ich zu großem Danke herzlich verpflichtet.

Es kann kaum etwas Trockneres geben, zumal für den dem Schulbetriebe Fernerstehenden, als Lehrpläne, wenn man sie nur eben äußerlich betrachtet. Dieser Bericht könnte über den engeren Bereich der höheren Schule hinaus wirksam sein, wenn auch weitere Kreise dadurch angeregt würden, dem inneren Wesen mathematischen Unterrichts näher zu treten. Auch Lehrpläne sind

gemalte Fensterscheiben!
Sieht man vom Markt in die Kirche hinein,
Da ist alles dunkel und düster;
Und so sieht's auch der Herr Philister;
Der mag dann wohl verdrießlich sein
Und lebenslang verdrießlich bleiben.
Kommt aber nur einmal hinein . . .
Da ist's auf einmal farbig helle,
Geschicht' und Zierat glänzt in Schnelle,
Bedeutend wirkt ein edler Schein . . .

Barmen, im Juli 1910. W. LIETZMANN.

INHALTSÜBERSICHT.

III. Teil.

Der Einfluß der Reformbewegung auf die Lehrpläne.

TABELLENVERZEICHNIS.

Erster Teil.

Die allgemeine Organisation des Unterrichts an den höheren Knabenschulen.

1. Kurzer Rückblick auf den Entwicklungsgang des höheren Schulwesens in Preußen.

Man unterscheidet gegenwärtig in Preußen drei Arten von höheren Schulen: die Gymnasien, die Realgymnasien und die Oberrealschulen. Neben diesen neunklassigen Vollanstalten existieren noch sogen. Nichtvollanstalten, die nur die sechs ersten Klassen umfassen; das sind in entsprechender Reihenfolge die Progymnasien, die Realprogymnasien und die Realschulen. Ehe wir uns einer Charakterisierung dieser einzelnen Schulgattungen zuwenden, werfen wir einen kurzen Blick auf die Geschichte des höheren Schulwesens in Preußen.[1])

1) Die beste Darstellung der Geschichte des höheren Schulwesens gibt F. Paulsen, Geschichte des gelehrten Unterrichts auf den deutschen Schulen und Universitäten vom Ausgang des Mittelalters bis zur Gegenwart. 2. Aufl. Bd. 1. 1896. Bd. 2. 1897. Leipzig (Veit u. Co.). Dazu vgl. man F. Paulsen, Das deutsche Bildungswesen in seiner geschichtlichen Entwicklung. (Aus Natur und Geisteswelt, 100. Bändchen.) 2. Aufl. herausgeg. von W. Münch, Leipzig (Teubner) 1909, das nur die wesentlichen Züge der Entwicklung gibt und auch die Elementarschulen mit berücksichtigt.

Kurze, übersichtliche Darstellungen geben A. Matthias in dem Sammelwerk Die Kultur der Gegenwart, herausgegeben von P. Hinneberg; Teil I. Abteil. 1: Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart. Leipzig (Teubner) 1906, und C. Rethwisch in dem Sammelwerk Die Reform des höheren Schulwesens in Preußen, herausgegeben von W. Lexis, Halle a. S. (Waisenhaus) 1902.

Speziell mit Rücksicht auf den mathematischen Unterricht ist das geschichtliche Kapitel in F. Klein-R. Schimmack, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen. Teil 1: Von der Organisation des mathematischen Unterrichtes. Leipzig (Teubner) 1907, geschrieben. Weiter ist auch der Abschnitt zu vergleichen: F. Klein, Der Unterricht in der Mathematik in dem eben zitierten Werke von W. Lexis. (Wiederabgedruckt unter dem Titel: Hundert Jahre mathematischer Unterricht an den höheren preußischen Schulen in F. Klein und E. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Leipzig (Teubner) 1904.

Eine allgemeine Geschichte des mathematischen Unterrichts in Deutschland ist noch nicht vorhanden, steht aber, wie mir mitgeteilt wird, in Aussicht. Manches Material findet sich in M. Simon, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. 2. Aufl. München (C. H. Beck) 1908. Wertvoll ist auch die Arbeit: F. Pahl: Die Entwicklung des mathematischen Unterrichts an unseren höheren Schulen. Teil I 1898, Teil II 1899 Programm Städtisches Realgymnasium Charlottenburg. Verhältnismäßig kurz kommen die deutschen Schulen zur Sprache in Alwa

1788. In der Mitte des 18. Jahrhunderts sind als Vertreter des höheren Schulwesens die Lateinschulen anzusehen, von denen man zur Zeit Friedrichs des Großen etwa 80 fünfklassige und gegen 300 dreiklassige zählte. Diese Schulen waren in ihren Leistungen recht verschieden, einige von ihnen, wie etwa in Berlin das Joachimsthalsche und das Friedrichs-Werdersche Gymnasium, kann man mit Fug und Recht als Musteranstalten bezeichnen, andere wiesen nur sehr geringe Lehrerfolge auf. 1788 wurde dann für die Lateinschulen das Abiturientenexamen geschaffen. Die abgehenden Schüler erhielten damit die Berechtigung zum Besuche der Universität; übrigens blieb der Universität noch das Recht, die Abiturienten zu prüfen, auch durfte sie Nichtabiturienten zum Studium zulassen, das Reifezeugnis war also weder notwendig, noch immer hinreichend.

So ist in Preußen von vornherein, im Gegensatz zu vielen anderen außerdeutschen Ländern, die höhere Schule mit dem Berechtigungswesen aufs engste verwachsen. Unzweifelhaft ist dadurch das Bildungsniveau der Gesamtheit außerordentlich gehoben und Ansehen und Einfluß der höheren Schulen dauernd befestigt worden. Andererseits jedoch war die Berechtigungsfrage nicht selten ein Hemmschuh für die Leistungsfähigkeit und die Entwicklungsmöglichkeit des höheren Schulwesens: viele Schüler besuchen die Berechtigungen verleihenden Schulen nicht um ihrer selbst, sondern um eben der Berechtigungen willen, und neue Schulgattungen können sich erst allmählich und in hartem Kampfe gegen bisherige Privilegien Geltung verschaffen.

1812. Die Berechtigungen, die das Abiturientenexamen mit sich brachte, erfuhren 1812 durch die „Instruktionen für die Entlassungsprüfungen“ eine erste Erweiterung: Von jetzt an war für alle zur Universität gehenden Schüler höherer Lehranstalten das Abiturientenexamen notwendiges Erfordernis für das Universitätsstudium. Nur Nichtschüler konnten nach wie vor von einer Universitätskommission ein zum Studium berechtigendes Zeugnis erhalten.

1816. Ein erster, wenn auch nicht bindender, vielmehr nur als „Muster für die Grundlinien der Lehrverfassung“ gedachter Lehrplan wurde 1816 von von Süvern aufgestellt. Den Hauptkern des Lehrstoffes geben für die höhere Schule die alten Sprachen ab, doch ist auch die Mathematik mit 60 Stunden – der Lehrgang ist noch zehnjährig –

Walker Stamper, A History of the Teaching of Elementary Geometry. Columbia University. Teachers College Series Nr. 23. 1906. Wertvolle Vorarbeiten für eine Geschichte des mathematischen Unterrichts werden die in allen Ländern durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission veranlaßten Abhandlungen sein.

Über das gesamte Unterrichtswesen geben Auskunft: W. Rein, Enzyklopädisches Handbuch der Pädagogik. 2. Aufl. 8 Bände. Langensalza (H. Beyer u. Söhne) 1903 bis 1908; K. A. Schmid, Enzyklopädie des gesamten Erziehungs- und Unterrichtswesens. 2. Aufl. 10 Bände. Leipzig (R. Reisland) 1876 bis 1887; A. Baumeister, Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen. 4 Bände (auch in Abteilungs- und Sonderausgaben). Z. T. 2. Auflagen. München (C. H. Beck).

gut ausgestattet, weniger sind es die Naturwissenschaften. Ganz fehlen die neueren Sprachen.

1834. Ein neues „Reglement für die Prüfung der zu den Universitäten abgehenden Schüler" legt endlich den heute fast ausnahmslos geltenden Zustand fest, daß für das Studium an den Universitäten die Reifeprüfung notwendige und hinreichende Vorbedingung ist.

Damit ist nun in Preußen ein System in volle Wirkung getreten, das sich wesentlich von dem anderer Länder unterscheidet. Wie anders z. B. in England, wo Oxford und Cambridge[1]) alljährlich ihre schriftlichen Aufnahmeprüfungen abhalten und mit ihnen den gesamten Unterricht der höheren Schulen beherrschen, oder in Frankreich, wo ein schriftliches und mündliches Examen von Dozenten und allerdings auch Schulmännern abgehalten wird, wo aber eine langjährige Unterrichtserfahrung mit den Schülern bei der Beurteilung ihrer Reife nicht mit in die Wagschale geworfen werden kann, weil der Schüler der Prüfungskommission ganz fremd ist.

1837. Die ersten, wirklich verbindlichen Lehrpläne von 1837 gehen auf Joh. Schulze zurück. Die Anstalten werden jetzt allgemein neunstufig; die Stundenzahl wird stark herabgesetzt – die Überbürdungsbewegung zeigt ihre erste Wirkung – Mathematik z. B. sinkt bis auf 33 Stunden. Als neues Pflichtfach wird Französisch aufgenommen. Der allgemeine Charakter des Gymnasiums ist schon hier festgelegt und hat sich seitdem kaum geändert: Übergewicht der alten Sprachen Latein und Griechisch, eine verhältnismäßig gute Berücksichtigung der mathematischen, weniger der naturwissenschaftlichen Fächer, eine Beachtung auch der neueren Sprachen; zu alledem eine nationale Grundlage.

1856. Die Änderungen, die der auf L. Wiese zurückzuführende Lehrplan und die Reifeprüfungsordnung von 1856 dem Gymnasium brachte, waren geringfügiger Art. Nur kam in der Betonung des Religionsunterrichtes, der Herunterschraubung der Naturwissenschaften, der stärkeren Vertretung der Regierung bei der Reifeprüfung und ähnlichen kleinen Zügen die Reaktion auf die achtundvierziger Jahre zum Ausdruck.

1859 tritt zum ersten Male eine neue Gattung höherer Schulen auf den Plan, das nachmalige Realgymnasium, zunächst unter dem Namen Realschule I. Ordnung.

1) Übrigens sind die Anforderungen dieser Prüfungen mit denen unserer Reifeprüfung kaum in Parallele zu stellen. So geht z. B. aus dem Schedule of mathematics required in the previous examination of the University of Cambridge, das C. Godfrey seinem Vortrage The teaching of mathematics in english public schools for boys auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom anfügte, hervor, daß etwa das Geometriepensum der Obertertia, das Arithmetikpensum der Untersekunda unserer Gymnasien ausreicht. Vgl. Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici, Roma 6–11 Aprile 1908. Vol. III. Roma (Accad. dei Lincei) 1909. S. 449 ff.

Es hatte schon im 18. Jahrhundert neben den Gymnasien Realschulen gegeben, 1706 hatte Semler, 1747 Hecker eine solche Schule gegründet, sie blieben aber vereinzelt und waren noch mehr oder minder kurzlebig. Erst allmählich nahm ihre Zahl zu, und eine gewisse Einheitlichkeit der bisher recht verschiedenartig ausschauenden Schulen wurde durch die „vorläufige Instruktion für die an den höheren Bürger- und Realschulen anzuordnenden Entlassungsprüfungen" von 1832 bedingt. Diese Verfügung rührt von C. W. Kortüm her, der aus dem Rheinlande in das Ministerium berufen war, wie denn überhaupt die Förderung des Realschulwesens stark vom Westen ausgeht. Man gab den Realschulen die Berechtigung zum einjährigen Dienst und die Zulassung zu einigen technischen Fächern (z. B. Post-, Forst-, Baufach); diese letzteren Berechtigungen fielen später wieder weg.

Die Realschulen lehrten zu einem großen Teile auch Latein. L. Wiese hat nun 1859 aus ihnen die neunstufigen Anstalten, die sämtlich Latein haben, und zwar mit Stundenzahlen, die denen für Mathematik etwa gleichkamen, als Realschulen I. Ordnung ausgesondert und in der „Unterrichts- und Prüfungsordnung der Real- und höheren Bürgerschulen" für sie das Abiturientenexamen eingeführt.

Mit dem Reifezeugnis eines Realgymnasiums war die Zulassung zu allen höheren Berufsarten gegeben, „für welche das Universitätsstudium nicht Vorbedingung war". So setzt gleich hier der Kampf der Schulgattungen wider einander ein, der Kampf für und wider neue Berechtigungen. Erst 1870 erhielten die Abiturienten vom Realgymnasium die Berechtigung zum Studium der Mathematik, der Naturwissenschaften und der neueren Sprachen, aber noch bis 1886 mit der Einschränkung, daß nur die Anstellungsfähigkeit für Realanstalten damit erworben wird.

Diejenigen Realschulen, die nicht neunstufig waren, wurden als Realschulen II. Ordnung und höhere Bürgerschulen bezeichnet; ein großer Teil von ihnen war siebenstufig. Diese Schulen behielten die Abschlußprüfung mit der Berechtigung zum einjährigen Dienst bei.

1878. Ehe 1882 die nächsten Lehrpläne für höhere Schulen erschienen, war zu den beiden bisher vorhandenen Schultypen noch eine neunstufige Schule getreten, die lateinlose Oberrealschule. Unter jenen Realschulen II. Ordnung, die siebenstufig waren, gab es zunächst nur sehr wenige lateinlose. Das wurde anders, als 1866 die neuen Provinzen hinzukamen, mit ihnen eine ganze Reihe solcher Schulen in Kassel, Wiesbaden, Hannover, Frankfurt a. M. In Frankfurt a. M. standen z. B. seinerzeit einem Gymnasium sechs lateinlose höhere Schulen gegenüber.[1]) Es kamen Neugründungen im Industriezentrum

1) P. Bode, Die Entwicklung des lateinlosen höheren Schulwesens in Frankfurt a. M. Progr. Adlerflychtschule, Frankfurt a. M. 1901.

hinzu[1]), in Köln, Dortmund, Düsseldorf, weiter in Magdeburg, vereinzelt auch im Osten, in Stettin, Königsberg. Von allen diesen lateinlosen Schulen wurden 1878 zunächst drei neunstufig, die Friedrichs-Werdersche und die Luisenstädtische Gewerbeschule in Berlin und die Guericke-Schule in Magdeburg.

Die Gewerbeschulen hatten, wenn sie auch stets einen starken, für unsere heutigen Anschauungen sogar sehr starken allgemeinbildenden Charakter besessen haben, die besondere Aufgabe gehabt, auf den Besuch des 1821 gegründeten Königl. Gewerbeinstituts in Berlin vorzubereiten. Daneben dienten die „Provinzial-Gewerbeschulen" natürlich in gleichem, an vielen Orten sogar in vorherrschendem Maße der Ausbildung des gewerblichen Mittelstandes. Zuweilen wurde sogar jener erstgenannte Zweck nur in besonderen Klassen verfolgt; so bestand noch 1849 an der Provinzial-Gewerbeschule in Hagen eine sog. Berliner Klasse.[2])

Zuerst 1878 waren also aus einigen derartigen Fachschulen auch dem Namen nach allgemeinbildende Schulen geworden. 1880 – die entsprechenden Beschlüsse datieren zum Teil schon aus dem Jahre 1879 – kamen acht weitere Anstalten hinzu, nämlich Breslau, Brieg, Gleiwitz, Cöln, Elberfeld, Coblenz, Crefeld, Halberstadt. Die übrigen Gewerbeschulen wurden zum Teil zu sechsklassigen lateinlosen höheren Bürgerschulen, manche von diesen hatten noch lange (die Barmer z. B. bis 1896) angegliederte maschinentechnische oder ähnliche Fachklassen.

1882. Die 1882 erschienenen „Lehrpläne für die höheren Schulen" und die „Ordnung der Entlassungsprüfungen", die den Altphilologen Bonitz[3]) zum Urheber hatten, beschäftigten sich also zum ersten Male mit allen drei Arten höherer Schulen. Eine Tendenz der neuen Lehrpläne ist die Annäherung von Gymnasium und Realgymnasium. Beim Gymnasium wurden die Stundenzahlen für die alten Sprachen herabgesetzt (– 11), eine Vermehrung erfuhren die modernen Sprachen (+ 4) sowie Mathematik und Naturwissenschaft (+ 4). Das Realgymnasium erhielt auf der anderen Seite 10 Lateinstunden mehr, 7 mathe-

---

1) Mit Recht heißt es in der Orientierung für die Besucher der Ausstellung der Oberrealschule Bochum auf der Weltausstellung in St. Louis 1904: „Die Oberrealschulen sind nicht vom Staate, sondern von den städtischen Gemeinden in Preußen geschaffen worden, und zwar besonders in denjenigen Gegenden, in welchen Industrie und Handel aufgeblüht sind, vor allem im Westen der Monarchie."

2) Die Geschichte einer Gewerbeschule, die später in eine Realschule umgewandelt wurde, lese man z. B. nach in W. Zehme, Die Erlebnisse der Gewerbeschule zu Barmen in den Jahren 1863 bis 1888. Barmen (Wiemann) 1888. In E. Hintzmann, Oberrealschule in Elberfeld, Zur Geschichte der Schule, Festschrift zum 75 jährigen Bestehen der Anstalt. Progr. Ostern 1900, handelt es sich um eine der 1880 in eine Oberrealschule umgewandelten Gewerbeschulen. Die Schrift hat über den Rahmen der Anstalt hinaus Interesse; sie gibt eine große Zahl von Verfügungen und Denkschriften über die Gewerbeschule wieder.

3) H. Bonitz kam aus Wien nach Berlin; von ihm in Verbindung mit Exner rühren auch die vorzüglichen österreichischen Lehrpläne von 1849 her.

matische und naturwissenschaftliche Stunden weniger. Trotzdem blieben erhoffte weitere Berechtigungen für das Realgymnasium aus. Es wurde der Allgemeine deutsche Realschulmänner-Verein gegründet, der fortan für die Gewährung von Berechtigungen an das Realgymnasium kämpfte.

An den neugegründeten Oberrealschulen stehen die neueren Sprachen und die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer im Vordergrunde. Die Berechtigungen der Oberrealschulen waren zuerst fast gleich Null. Hier Wandel zu schaffen, war zunächst das Bemühen eines Kreises von Männern, an deren Spitze Gallenkamp stand. Die Bestrebungen nimmt dann der von Holzmüller 1889 ins Leben gerufene „Verein zur Förderung des lateinlosen höheren Unterrichts" auf.[1])

1890. Die auf Anregung des Kaisers einberufene sog. Dezemberkonferenz[2]) sprach sich für die Beseitigung des Realgymnasiums aus, dann auch gegen eine gemeinsame Unterstufe für Gymnasien und Realanstalten. Außerdem wünschte sie beim Abschluß der Unterstufe, also nach dem sechsten Jahrgange (vgl. Abschnitt 2), eine Abschlußprüfung, die die Vorbedingung für das zum einjährigen Dienst in der Armee berechtigende Zeugnis sein sollte. Eine Folge dieser Beschlüsse, welche die nachfolgende Zeit zum großen Teile als verfehlt erwiesen hat, war die rapide Abnahme der Zahl der Realgymnasien, die bis dahin, zumal 1877 auch das Kadettenkorps auf realgymnasiale Grundlage gestellt worden war[3]), bereits eine mächtige Entwicklung genommen hatten. Das schnelle Vordringen des Reformschulwesens (vgl. Abschnitt 3) hat jedoch diese Einbuße wieder wett gemacht (vgl. die Tabelle in Abschnitt 2).

1892. Der Dezemberkonferenz folgten die „Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen", die „Ordnung der Reifeprüfung" und die „Ordnung der Abschlußprüfungen". Die Lehrpläne brachten allgemeine Abstriche in den Stundenzahlen, woran besonders Latein beteiligt war. Die auf die Vollanstalten vorbereitenden Anstalten wurden sämtlich auf sechs Stufen reduziert, so insbesondere die bisher noch siebenstufigen Realschulen, soweit nicht deren Ausbau zu Ober-

---

1) Organ dieses Vereins ist die von Holzmüller gegründete Zeitschrift für lateinlose höhere Schulen. Die im 21. Jahrgange stehende, in Monatsheften erscheinende Zeitschrift wird gegenwärtig von Schmitz-Mancy herausgegeben (Verlag Teubner-Leipzig).

2) Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts. Berlin, 4.–17. Dezember 1890. Im Auftrage des Ministers der geistlichen Angelegenheiten. Berlin (W. Hertz). 1891.

3) Über den Lehrstoff, den die Kadettenschulen in Mathematik behandeln, orientiert man sich am besten an der Hand des an diesen Schulen eingeführten, recht ausführlichen Buches: Haller von Hallerstein, Lehrbuch der Elementarmathematik. Nach dem Lehrplan für das Königl. Preußische Kadetten-Korps bearbeitet von B. Hülsen. 1. Teil: 7. A. 1903. 2. Teil: 4. A. 1901. 3. Teil: 4. A. 1902. Berlin (Nauck & Co.).

realschulen ins Werk gesetzt wurde. Auch die höheren Bürgerschulen erhielten den Namen Realschulen.

Diesmal waren auch schon sog. Reformschulen zu berücksichtigen, doch wollen wir diese an anderer Stelle (Abschnitt 3) zusammenhängend behandeln.

Die Berechtigungen blieben meistenteils die alten. Das Realgymnasium erhielt keine neuen, die Oberrealschule endlich diejenigen des Realgymnasiums bis auf das Studium der neueren Sprachen.

1900. Ein neues Stadium der Schulpolitik, in dem wir uns gegenwärtig noch befinden, datiert von der sog. Junikonferenz[1]) im Jahre 1900. Ihr wichtigstes Ergebnis ist die grundsätzliche Gleichberechtigung aller drei Arten von höheren Schulen. Der allerhöchste Erlaß, der diesen Beschluß zur Ausführung brachte, folgte noch 1900, die neuen Lehrpläne 1901.

2. Charakterisierung der drei Schularten.

Die sämtlichen drei Schularten haben 9 Klassen, die jede einen unter normalen Umständen einjährigen Schulbesuch erfordern. Die 6 ersten Klassen kehren in den Nichtvollanstalten wieder, wobei jedoch anzumerken ist, daß sich in Preußen die Realschule nicht ganz mit der Unterstufe der Oberrealschule deckt (vgl. Abschn. 21). Dem Eintritt in die höhere Schule gehen in der Regel drei Vorbereitungsjahre voraus. Über die Klassenbezeichnung gibt die folgende Tabelle Auskunft.

In den letzten drei Spalten sind als einzig möglicher Maßstab für eine internationale Vergleichung Angaben über das Lebensalter der Schüler beim Eintritt in die betreffenden Klassen (als Eintrittstermin ist der 1. April angesehen) gemacht.

Spalte 1 gibt das Minimalalter beim Eintritt in die betreffende Klasse an, das übrigens, abgesehen vom Eintritt in die Sexta, gelegentlich, wenn auch selten, unterschritten werden kann.

In Spalte 2 ist das wirkliche Durchschnittsalter der Schüler an einem Großstadtgymnasium zu Beginn des Schuljahres 1908 als Beispiel einer Schule mit niedrigem Durchschnittsalter angegeben.

Spalte 3 enthält ebenso als Beispiel einer Schule mit etwas höherem Durchschnittsalter die Angaben für ein kleineres Provinzial-Gymnasium.

Spalte 2 und 3 sollen nicht die extremsten Werte geben; in besonderen Fällen, wenn z. B. eine Oberprima aus fünf oder sechs sehr jungen Schülern besteht, oder wenn in einer anderen Prima zwei oder drei Schüler sitzen, die, nachdem sie vielleicht bereits das erste Examen der Elementarlehrer erledigt haben, noch das Abiturientenexamen

1) Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts. Berlin, 6. bis 8. Juni 1900. Nebst einem Anhange von Gutachten herausgegeben im Auftrage des Ministers der geistlichen Angelegenheiten. Halle a. S. (Waisenhaus) 1901.

als 24- oder 25jährige junge Leute machen wollen, können sich weit extremere Werte ergeben.

Stufen:		Realschule:	Vollanstalten:	Durchschnittsalter		
Unterstufe	oder Unterstufe	Sexta (6) Quinta (5) Quarta (4)	Sexta (VI) Quinta (V) Quarta (IV)	9 10 11	9,5 10,5 11,7	9,6 11,2 12,0
	Mittelstufe	Tertia (3) Sekunda (2) Prima (1)	Unter-Tertia (U III) Ober-Tertia (O III) Unter-Sekunda (U II)	12 13 14	12,9 14,0 14,8	12,9 14,6 15,5
Oberstufe	Oberstufe		Ober-Sekunda (O II) Unter-Prima (U I) Ober-Prima (O I)	15 16 17	15,8 16,7 17,9	16,9 17,4 19.7

Übersicht über die Klassen und ihr Durchschnittsalter.

Das Alter der Abiturienten (ohne die sogenannten Extraneer, vgl. Abschnitt 11) im Schuljahr 1907/08 ergibt sich aus der nachfolgenden Zusammenstellung:

Es hatten von den Abiturienten ein Alter von

	17	18	19	20	21 u. mehr Jahren:
Gymnasiasten	4,9 %	26,6 %	30,2 %	20,0 %	18,4 %
Realgymnasiasten	4,1 „	30,1 „	34,8 „	18,6 „	12,4 „
Oberrealschüler	3,6 „	26,4 „	34,4 „	23,9 „	11,8 „

Zur Vergleichung des deutschen Klassensystems mit demjenigen einiger anderer Länder diene die folgende Tabelle, bei der auf Grund der Altersverhältnisse Preußen, Österreich, Frankreich, Italien und die Vereinigten Staaten nebeneinandergestellt sind.[1])

Preußen		Österreich		Frankreich		Italien		Vereinigte Staaten	
3 Vorschulklassen		4 Jahre Volksschule		Divis. prépar. 1. Jahr		Etwa 3 Jahre Vorbereitung		I. Grade	Grades oder Commonschool
				— 2. Jahr				II. „	
				Huitième				III. „	
VI	Unterstufe			Septième		I	ginnasio	IV. „	
V		I	Unterstufe	Sixième	Première Cycle	II		V. „	
IV		II		Cinquième		III		VI. „	
U III		III		Quatrième		IV		VII. „	
O III		IV		Troisième		V		1. Jahr	High School
U II		V	Oberstufe	Seconde	Seconde Cycle	I	liceo	2. Jahr	
O II	Oberst.	VI		Première		II		3. Jahr	
U I		VII		Phil. od. Math.		III		4. Jahr	
O I		VIII							

Vergleichende Darstellung der Klassen in verschiedenen Ländern.

1) Die Angaben sind zum Teil den Stundenplänen entnommen, die in E. Horn,

Auf die höhere Schule bereitet im allgemeinen die Volksschule vor.[1]) Schüler, welche mindestens drei Jahre die Volksschule besucht haben, müssen sich jedoch einer Aufnahmeprüfung unterziehen.[2])

Das höhere Schulwesen der Staaten Europas, 2. Auflage, Berlin (Trowitsch und Sohn) 1907 angegeben sind. Die Verhältnisse in Amerika sind an den verschiedenen Schulen verschieden; ich folge den Angaben, die in dem später noch öfter zu nennenden Buche J. W. A. Young, The Teaching of Mathematics in the higher schools of Prussia, New York (Longmans, Greens and Co.) 1900 gemacht werden.

Für Österreich hat F. Marotte, L'Enseignement des sciences mathématiques et physiques dans l'enseignement secondaire des garçons en Allemagne, Paris (Imprimerie nationale) 1905, S. 5, von den obigen abweichende Angaben gemacht, wonach die Reife ein Jahr früher erreicht wird. Diese Angaben sind in H. Hahn, Die Lehraufgaben des physikalischen und chemischen Unterrichts an den höheren Schulen Frankreichs, Programm Dorotheenstädtisches Realgymnasium Berlin, Ostern 1906, und in das oben genannte Werk von E. Horn übergegangen. Die Richtigkeit der hier eingesetzten Daten wird durch das statistische Material erwiesen, das G. Junge, Der neue österreichische Lehrplan für Mathematik, Pädagogisches Archiv 1910, S. 159 ff., erbringt.

1) Auf die Volksschulen Preußens werden spätere Berichte in diesen Abhandlungen eingehen. Hier sei nur einiges wenige zum Verständnis notwendige gesagt. Man kann vier Arten von Volksschulen unterscheiden:

1. Die einklassigen Volksschulen; alle Kinder der Schule werden in einem Raum von einem Lehrer gleichzeitig unterrichtet. Derartige Schulen finden sich fast ausschließlich in kleinen Landgemeinden.
2. Die Halbtagsschulen. Die Schülerzahl ist für einen gemeinsamen Unterricht zu groß; der einzige Lehrer unterrichtet also in zwei getrennten Abteilungen. Auch von diesen Schulen liegen 99 % auf dem Lande.
3. Die Schulen mit zwei Lehrern; hier ist es möglich, zwei oder drei getrennte Klassen einzurichten. Von diesen Schulen gehören nur etwa 6 bis 7 % der Stadt an.
4. Die mehrklassigen Schulen – es sind bis zu 8 Klassen vorhanden – finden sich zum allergrößten Teile in den städtischen Gemeinden.

Einen Überblick über die Zahl der Schulen und der Schüler gibt die folgende, den Stand vom Jahre 1901 wiedergebende Tabelle, die ich K. Knabe, Das deutsche Unterrichtswesen der Gegenwart, Leipzig (Teubner) 1910, entnehme:

Klassenzahl	Schulen	Schüler
1	13615	704409
Halbtagsschulen	7873	669033
2	3976	487830
3	5258	910989
4	1834	503585
5	968	344547
6	1613	910125
7	1336	911279
8	283	229073
Zusammen	36756	5670870

2) Eine noch in Geltung befindliche Verfügung über die Aufnahme in die höheren Schulen vom Jahre 1837 schreibt als Anforderungen im Rechnen vor:

Diese Prüfung fällt weg für Schüler der Vorschulen, die manche höhere Schulen sich angegliedert haben. Der Lehrgang der Vorschule unterscheidet sich von dem der Volksschulen hauptsächlich darin, daß mehr auf das Einsetzen der fremden Sprachen in Sexta vorgearbeitet wird, also besonders in der deutschen Grammatik weitergehende Kenntnisse angestrebt werden.

Die Vorschulen sind als antisozial vielfach verworfen worden — häufig treten allerdings bei ihrem Wegfall Privatunternehmungen an die Stelle. Die Zahl der Vorschulen ist seit den siebziger Jahren trotz der gewaltigen Zunahme der Anstalten (vgl. die Tabelle am Schlusse dieses Abschnittes) ungefähr die gleiche geblieben (es sind etwa 250). Im Westen ist ihre Zahl geringer (in Westfalen gab es bis vor kurzem gar keine, in Hessen-Nassau, der Rheinprovinz und Hannover nur wenige), im Osten stärker.[1])

Den Eintritt von Schülern in höhere Klassen ermöglichen die in kleineren Städten ohne höhere Lehranstalt existierenden Rektoratsschulen, höhere Privatschulen u. dgl., die den Lehrplan der höheren Schulen (meist der Gymnasien oder der Realschulen) etwa bis Quarta oder Untertertia durchführen.

Wenn derartige Schulen nicht vorhanden sind, geschieht der Übergang häufig auch von gehobenen Volksschulen aus, in Preußen auch Mittelschulen[2]) oder Bürgerschulen genannt, die dann eine wahlfreie oder verbindliche oder gelegentlich gar zwei wahlfreie Fremdsprachen haben. Doch muß, da das Fortschreiten in den Sprachen fast immer sehr langsam ist, meist noch Privatunterricht in den Fremdsprachen nebenhergehen, soll der übertretende Schüler nicht mit einer gar zu niedrigen Klasse beginnen.[3])

Alle diese Schwierigkeiten werden behoben durch die vom 3. Februar 1910 datierte Neuordnung des Mittelschulwesens[4]), die allgemeine Stunden- und Lehrpläne für diese Schulgattung vorschlägt. Insbesondere sind Unterrichtspläne für Mittelschulen vorgesehen, die auf die

---

„Praktische Geläufigkeit in den vier Spezies mit unbenannten Zahlen und in den Elementen der Brüche." Tatsächlich wird aber die Bruchrechnung, die erst Pensum der Quinta ist, nicht verlangt. Damit werden einige Schlüsse bei H. Morsch, Das höhere Lehramt in Deutschland und Österreich. Ergänzungsband. Leipzig (Teubner) 1907 (pag. 18) und 2. Aufl. 1910 S. 126, 127 hinfällig.

1) Über die Vorschulen vgl. H. Morsch, l. c. 2. Aufl. S. 117 ff.

2) In Bayern und Österreich gebraucht man hingegen den Ausdruck im Sinne unserer höheren Schulen; wir werden den Ausdruck seiner Mehrdeutigkeit wegen vermeiden.

3) Nach einer Statistik, die K. Knabe l. c. wiedergibt, zählte man 1901 insgesamt 456 öffentliche Mittelschulen, Bürger-, Rektorats-, höhere und gehobene Stadtschulen einbegriffen. Davon waren 217 allein für Knaben, 137 allein für Mädchen, 102 für beide Geschlechter bestimmt. In 3759 Klassen wurden 134740 Schulkinder von 3571 Lehrern und 1192 Lehrerinnen unterrichtet.

4) Bestimmungen über die Neuordnung des Mittelschulwesens in Preußen vom 3. Februar 1910. Berlin (Cotta) 1910.

Obertertia der Gymnasien oder die Untersekunda der Realanstalten vorbereiten. Dabei erscheint der Stoff von fünf Klassen der höheren Schulen auf sechs Klassen der Mittelschulen verteilt.

Schließlich ist, zumal im Osten Preußens, die Vorbereitung lediglich durch Privatunterricht – von besonderen Hauslehrern, oft auch vom Pfarrer des Ortes erteilt — überall da noch gang und gäbe, wo die örtlichen Schulen nicht in Betracht kommen (Dörfer, Rittergüter u. dgl.). Übrigens wird die Zahl der Fälle, in denen die Schüler erst in späteren Klassen der höheren Schulen eintreten, meist um sie noch länger im Elternhause zu halten, mit dem Wachsen der Anzahl der höheren Schulen und mit zunehmender Verbesserung der Verkehrsverhältnisse immer geringer.

Allen höheren Schulen gemeinsam ist die durch die Fächer Deutsch, Geschichte, Religion gegebene, auch durch alle anderen Unterrichtsfächer unterstützte nationale und ethische Erziehung.

Das Gymnasium ist durch die beiden alten Sprachen, Lateinisch und Griechisch, gekennzeichnet. Von neueren Sprachen ist verbindlich nur Französisch, das neuerdings mehrfach auf der Oberstufe durch Englisch ersetzt wird. Wahlfrei ist von O II an zweistündig Englisch (bzw., wenn Englisch auf der Oberstufe verbindlich, Französisch) und ebenso Hebräisch.

Am Realgymnasium ist von alten Sprachen nur das Latein vertreten, dafür sind zwei neuere Sprachen verbindlich, Französisch und Englisch. Mathematik und Naturwissenschaft sind besser ausgestattet als am Gymnasium. Wahlfrei ist das Linearzeichnen (zwei Wochenstunden in den letzten fünf Klassen).

Bei der Oberrealschule fällt von den alten Sprachen schließlich auch noch das Latein weg – die Mehrzahl der Anstalten gibt allerdings von O II an Gelegenheit zu wahlfreiem Unterricht. Dagegen ist das Lehrziel der neueren Sprachen und der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer gegenüber dem des Realgymnasiums gehoben. Wahlfrei ist Linearzeichnen wie beim Realgymnasium.

Über die Zahl der Wochenstunden, wie sie sich in den verschiedenen Lehrplänen im Laufe der Jahre gestellt hat, gibt die folgende Tabelle Auskunft.[1]) Dabei sind überall unberücksichtigt geblieben Turnen (jetzt in jeder Klasse wöchentlich 3 Stunden) und Singen (in den unteren Klassen für alle Schüler 2 Stunden verbindlich, in den mittleren und oberen nur für die gesanglich beanlagten verbindlich). Nicht mitgezählt sind ferner die wahlfreien Fächer, dabei kommen

1) Über die Gesamtstundenzahl, die in Deutschland gegenwärtig zwischen 246 (Gymnasien Bayerns) und 316 (Johanneum Lübeck) schwankt, vgl. P. Treutlein, Über das Maß und die Austeilung der Unterrichtszeit an unseren höheren Schulen. Progr. Realgymnasium Karlsruhe 1906.

außer den oben genannten Fächern noch die meist wahlfreien praktischen Übungen in Physik, Chemie und Biologie in Frage.[1])

Schule	Stundenbezeichnung	1816	1837	1856	1859	1868	1882	1892	1902
Gymnasium	Gesamtzahl....	320	258	268	–	–	268	252	259
	davon: Mathematik......	60	32	32	–	–	34	34	34
	Naturwissenschaft	20	16	14	–	–	18	18	18
	Alte Sprachen ...	126	128	128	–	–	117	98	104
	Neue Sprachen ..	–	12	17	–	–	21	19	20
Realgymnasium	Gesamtzahl....	–	–	–	285	–	280	259	262
	davon: Mathematik......	–	–	–	47	–	44	42	42
	Naturwissenschaft	–	–	–	34	–	30	29	29
	Alte Sprachen ...	–	–	–	44	–	54	43	49
	Neue Sprachen ..	–	–	–	54	–	54	49	47
Oberrealschule	Gesamtzahl....	–	–	–	–	326	276	258	262
	davon: Mathematik......	–	–	–	–	76	49	47	47
	Naturwissenschaft	–	–	–	–	46	36	36	36
	Alte Sprachen ...	–	–	–	–	–	–	–	–
	Neue Sprachen ..	–	–	–	–	80	80	72	72

Stundenverteilung bei den verschiedenen Schularten.

Die einzelnen Rubriken beziehen sich auf die verschiedenen Lehrpläne (vgl. Abschnitt 1), also 1816 auf den noch zehnstufigen von Süvernschen Plan, 1837 den von Joh. Schulze, 1856 von L. Wiese für Gymnasien, 1859 für die damaligen Realschulen I. Ordnung. Aus dem Jahre 1868 ist der Lehrplan der Friedrichs-Werderschen Gewerbeschule als Beispiel jener Vorgänger der Oberrealschulen eingeschaltet. Dabei ist zu beachten, daß der Plan zwar zehnstufig ist, aber doch nur siebenjährig. Die vier oberen Klassen (Ober- und Unterprima, Ober- und Untersekunda) haben einjährige Kursusdauer, die sechs unteren (Ober- und Untertertia, Ober- und Unterquarta, Quinta und Sexta) nur halbjährige. – Schließlich folgen 1882, 1892 und 1902 die letzten drei Lehrpläne.

Aus dem, was die Tabelle lehrt, sei nur eines hervorgehoben: Die Unterschiede der verschiedenen Schularten liegen bei den Sprachen; hinsichtlich der Mathematik und der Naturwissenschaften sind sie verhältnismäßig gering. So ist also die Mathematik auch an den Gymnasien noch recht gut vertreten, andererseits fehlt eine spezifisch mathematisch-naturwissenschaftliche Schulgattung. Um das noch etwas

1) Über die gegenwärtige Verbreitung der praktischen Schülerübungen gibt die auf amtlichem Material fußende Zusammenstellung Auskunft: J. Norrenberg, Die naturwissenschaftlichen Schülerübungen an den höheren Lehranstalten Preußens. Monatsschrift für höhere Schulen. 8 (1909), S. 481 ff. Über die Schülerübungen selbst und über den naturwissenschaftlichen Unterricht überhaupt gibt eine zusammenfassende Darstellung: B. Schmid, Der naturwissenschaftliche Unterricht. Leipzig (Teubner) 1907.

plastischer hervortreten zu lassen, stelle ich die prozentuale Beteiligung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtes an der Gesamtstundenzahl in Preußen (ohne Turnen, Singen und wahlfreie Fächer) und Frankreich gegenüber (Lehrplan von 1902; ohne wahlfreie Fächer); dabei ist die zeitlich etwa unserer Oberprima entsprechende Classe de mathématiques spéciales nicht einbegriffen, anderenfalls würde der Gegensatz noch verschärft.

Die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer haben

in Preußen

an den Gymnasien . . . . . 20,1 %
an den Realgymnasien . . . 27,1 %
an den Oberrealschulen . . . 31,7 %

in Frankreich

in der Division A . . . . . 13,3 %
in der Division B . . . . . 40,6 %.

Die Berechtigungen, die die einzelnen Schulen verleihen, sind äußerst mannigfaltiger Art, ihre Aufzählung würde mehrere Seiten erfordern.[1]) Wir merken nur an, daß das Reifezeugnis aller drei Schularten den Zugang zu allen Studien eröffnet, nur ist den Oberrealschülern das Studium der Theologie und der Eintritt in den Bibliothekar- und Archivdienst zurzeit noch verschlossen. Im übrigen vermitteln Vorkurse an den Universitäten die Übergänge dort, wo sie fehlen. Eine Ungleichheit besteht allerdings immer noch insofern, als die Hochschulen fast durchgängig in den den Gymnasien spezifischen Fächern an das Maximum, bei den den Realanstalten spezifischen Fächern an das Minimum des auf den höheren Schulen Geleisteten anschließen.

Auf Grund der deutschen Wehrordnung hat der Reichskanzler über die Anerkennung derjenigen Anstalten zu befinden, welche Zeugnisse über die wissenschaftliche Befähigung für den einjährig-freiwilligen Heeresdienst ausstellen dürfen. Dieses Zeugnis wird von den höheren Schulen nach erfolgreichem Besuch der UII der Vollanstalten, der I der Nichtvollanstalten erteilt.

Die Reichsschulkommission hat die Aufgabe, den Reichskanzler in seinen Funktionen zu unterstützen, indem sie die neuen Anträge auf Erteilung der Berechtigung zur Ausstellung von Einjährigenzeugnissen begutachtet. Von den sechs Mitgliedern der Kommission vertritt je eines ständig die Staaten Preußen, Bayern, Sachsen, Württemberg; die beiden anderen sind, in vorgeschriebener Reihenfolge wechselnd, die Vertreter von je zwei der übrigen Bundesstaaten. Die Kommission tagt in der Regel jährlich zweimal.

---

1) Vgl. die im einzelnen angeführten Verfügungen bei A. Beier, Die höheren Schulen in Preußen und ihre Lehrer. 2. Aufl. Halle a. S. (Waisenhaus) 1902.

Das in einem Staate des Deutschen Reiches abgelegte Abiturientenexamen gibt entsprechende Berechtigungen auch in den anderen Staaten. Darüber besteht eine Vereinbarung zwischen den Bundesregierungen, die im Jahre 1909 erneuert worden ist und seitdem auf alle drei Arten höherer Schulen sich bezieht.[1])

Von den als selbständige Anstalten bestehenden Unterstufen der höheren Schulen haben die Progymnasien nur Bedeutung als Vorstufen der Vollanstalten. Der Schüler, der nach dem Besuche eines Progymnasiums ins praktische Leben treten wollte, hat in den realen Fächern nur eine geringe Ausbildung erhalten, mit seinen Kenntnissen in Latein wird er wenig, mit denen in Griechisch nichts anfangen können.

Aus diesen Gründen ist an manchen gymnasialen Unterstufen — nicht bloß an Progymnasien, sondern auch an Gymnasien, denn gleiches gilt für Schüler, die mit dem Einjährigen-Zeugnis (U II) vom Gymnasium abgehen — sog. Ersatzunterricht eingeführt. 1902 hatten 25 Anstalten die Erlaubnis zur Einrichtung von Ersatzunterricht, doch machen nicht alle von dieser Erlaubnis Gebrauch.[2]) Die Schüler können an Stelle des Griechischen Englisch wählen, und da die hierfür anzusetzende Stundenzahl geringer als die für Griechisch in Wegfall kommende ist, so werden noch einige weitere frei, von denen wenigstens einige auch dem Mathematikunterrichte zugute kommen. (Vgl. die Abschnitte 7 und 19.)

Die Realprogymnasien waren in ähnlicher, wenngleich infolge des Fortfalles von Griechisch etwas besserer Lage wie die Progymnasien. Neuerdings ist ihre Lebensfähigkeit durch die Umwandlung vieler Anstalten in Reformanstalten (vgl. Abschnitt 3) gehoben.

Für die nach sechsjährigem Besuche der höheren Schulen mit der Berechtigung zum Einjährigen-Dienst ins praktische Leben tretenden Schüler kommen in erster Linie die Realschulen in Betracht. Bei ihnen sind die Lehrpläne mehr auf diesen Abschluß zugeschnitten als bei den anderen Nichtvollanstalten. In der Tat ist der Prozentsatz der von der Realschule zur Oberrealschule übergehenden Schüler sehr gering. So erklärt sich die große Zahl von Realschulen, verglichen einmal mit den Progymnasien und Realprogymnasien, verglichen aber auch mit den Oberrealschulen.

Eine Gattung für sich bilden die Berliner Realschulen. Sie sind den Berliner Gemeindeschulen angeglichen, um einen Übergang von der einen zur anderen Schulart zu erleichtern. Die Fremdsprachen beginnen deshalb später als an den anderen Realschulen, Französisch erst in Quarta, Englisch in Sekunda (= O III der Oberrealschulen).

---

1) Vgl. z. B. den Abdruck dieser Vereinbarung in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 40 (1909), S. 531 ff.

2) Über Geschichte und Statistik der Anstalten mit Ersatzunterricht vgl. man H. Begemann, Der Ersatzunterricht für Griechisch in den Gymnasien. Monatsschrift für höhere Schulen 2 (1903), S. 606 ff.

Damit wird dann in den untersten Klassen Raum frei, der wesentlich auch der Mathematik zugute kommt (vgl. dazu besonders die Abschnitte 15 und 20).

Übrigens nähern sich einige Realschulen den Fachschulen. Das gilt insbesondere von den sog. Handelsrealschulen.[1] So hat z. B. die Oberrealschule zu St. Petri und Pauli in Danzig eine der Oberrealschul-Untersekunda parallelgehende Handels-Untersekunda mit gleichen Berechtigungen. Die Schüler der Handelsklasse haben 1 Stunde Mathematik und 2 Stunden Physik weniger, dafür kaufmännisches Rechnen, Handelswissenschaft und wahlfrei Stenographie. Auf anderem Wege wird das Ziel in Frankfurt a. M. und Köln erreicht. Dort sind an die Realschule besondere Handelsklassen angeschlossen. In Frankfurt hat der Unterbau, die Handelsrealschule, einen zwar der Realschule ähnlichen, doch durch Aufnahme von Handels- und Wechsellehre, Korrespondenz und Buchhaltung, Stenographie abweichenden Lehrgang. Daran schließt sich dann eine zweistufige höhere Handelsschule. Auch die Unterstufe der Kölner Schule, die „Handelsschule", weicht in der gleichen Richtung von der Realschule ab und setzt dann eine einjährige Handelsklasse auf.

Es gibt noch eine Reihe anderer Fachschulen, die die Berechtigung zum Einjährigen-Dienst erteilen und sich am meisten dem Realschultypus des höheren Schulwesens nähern; wir sehen hier von ihnen ab.

	Es gab in Preußen	Gymnasial			Realgymnasial			Realistisch			Insgesamt
		Gymnasien	Pro-gymnasien	Zusammen	Real-gymnasien	Realpro-gymnasien	Zusammen	Ober-realschulen	Realschulen	Zusammen	
Anstalten:	S. S. 1860	136	24	160	32	–	32	–	–	–	192
	S. S. 1880	249	35	284	84	–	84	3	–	3	371
	S. S. 1890	268	46	314	87	86	173	19	20	39	526
	S. S. 1900	295	59	354	76	21	97	37	138	175	626
	W.S. 1907/08	332	40	372	124	39	163	75	171	246	781
Schüler:	S. S. 1860	38078	2100	40178	11058	–	11058	–	–	–	51226
	S. S. 1880	75190	4094	79284	27066	–	27066	1656	–	1656	108006
	S. S. 1890	77811	5445	83256	26272	8858	35130	4177	6940	11117	129503
	S. S. 1900	89257	7097	96354	21433	1815	23248	15134	30149	45283	164885
	W.S. 1907/08	101094	4946	106040	37683	4225	41908	30702	33465	64167	212115

Zahl der Anstalten und ihrer Schüler.

1) Vgl. L. Voigt, Die Handelsrealschule. Progr. der Städt. Handelslehranstalt Frankfurt a. M. Ostern 1909 und die Programme der außerdem noch genannten Anstalten; ferner die Veröffentlichungen des deutschen Verbandes für das kaufmännische Unterrichtswesen, insbesondere 42. Bd.: Entwurf eines Normallehrplans für Handelsrealschulwesen. Leipzig (Teubner) 1909. – Auf die Fachschulen werden spätere Hefte dieser Abhandlungen eingehen.

Über die Zahl der Anstalten und ihrer Schüler geben die vorstehende und folgende Tabelle Auskunft.[1]) Bei den Gymnasien ist eine langsame aber stetige Zunahme vorhanden; die Realgymnasien weisen nach anfänglich schneller Zunahme eine plötzliche Abnahme, die Folgeerscheinung der Beschlüsse auf der Dezemberkonferenz 1890, dann wieder eine rasche Zunahme auf (Gründung von Reformanstalten). Außerordentlich schnell ist das Anwachsen der Real- und Oberrealschulen. Dabei ist übrigens zu bemerken, daß die Realschulen II. Ordnung und die höheren Bürgerschulen der sechziger, siebziger und achtziger Jahre nicht aufgenommen sind.

Einen Überblick über die relative Beteiligung der einzelnen Anstalten an der Gesamtschülerzahl gibt die nach der obigen Tabelle berechnete Übersicht:

Schüler auf:	Gymnasien und Progymnasien	Realgymnasien und Realprogymnasien	Oberrealschulen und Realschulen
S. S. 1860	78,4 %	21,6 %	0 %
S. S. 1880	73,4 %	25,1 %	1,5 %
S. S. 1890	64,3 %	27,1 %	8,6 %
S. S. 1900	58,4 %	14,1 %	27,5 %
W. S. 1907|08	50,0 %	19,8 %	30,2 %

Zahl der Schüler an den einzelnen Anstaltsarten in Prozenten.

Die Zahlen verschieben sich allerdings ganz beträchtlich, wenn man nur die neunstufigen Vollanstalten in Rechnung setzt. In der Tat gibt eine Zusammenstellung der Zahl der Abiturienten ein ganz anderes Bild:

Im Jahre:	Gymnasien	Realgymnasien	Oberrealschulen	Zusammen
1890	3657	539	18	4214
1900	4646	709	315	5670
1907/08	5622	1183	779	7584

Von den Anstalten sind vielfach mehrere unter einem Direktor vereinigt. Jede derartige Anstalt im allgemeineren Sinne[2]) gibt jährlich einen Jahresbericht (= Programm) heraus, der über die Unterrichtsverteilung, den durchgenommenen Lehrstoff, die Abiturienten und die Themen ihrer Arbeiten, die Schulgeschichte des vergangenen Jahres

1) Das Material für die Tabellen gaben bis 1900 die Statistiken in dem Werke von Lexis, l. c. S. 411 ff. Im übrigen ist auf die „Statistischen Mitteilungen über das höhere Unterrichtswesen in Preußen“, eine jährliche Beilage zum Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung, zu verweisen.

2) Solcher Anstalten gibt es gegenwärtig (S. S. 1909) 711, von denen 82 noch in der Entwicklung begriffen sind. Von ihnen sind 250 staatlich oder werden vom Staate verwaltet.

berichtet, auch die für die Allgemeinheit wissenswerten Verfügungen der vorgesetzten Behörden und einige statistische Angaben über Zahl, Konfession, Alter u. dgl. der Schüler bringt. Durch eine Ministerialverfügung ist neuerdings eine Einschränkung solcher Angaben, die alljährlich unverändert wiederkehren (z. B. über den Lehrstoff), empfohlen worden.

Den Programmen liegen in vielen Fällen wissenschaftliche Abhandlungen von Lehrern der Anstalt bei. Die Programme werden zwischen den einzelnen Anstalten ausgetauscht.[1])

Ein Überblick über die vorhandenen Anstalten läßt sich am besten an der Hand des alljährlich erscheinenden sog. Kunze-Kalenders[2]) gewinnen, dessen Hauptteil eine Dienstaltersliste der an den höheren Lehranstalten Norddeutschlands wirkenden akademisch gebildeten Lehrer ist. Nicht so in die Einzelheiten geht das Statistische Jahrbuch der höheren Schulen, dafür berücksichtigt es aber ganz Deutschland und dazu noch Luxemburg und die Schweiz. Neben den höheren Schulen in unserem Sinne werden auch die Volksschullehrerseminare, die Anstalten mit Mittelschulcharakter, die Fachschulen aufgeführt.

3. Die Reformanstalten.

Die Reformanstalten[3]) setzen sich zum Ziel, die Spaltung des höheren Schulwesens in verschiedene Schulgattungen aus den untersten Klassen möglichst weit hinaufzuschieben. Da die Veranlagungen der einzelnen Schüler sich nicht bereits im 9. Lebensjahre, sondern meist erheblich später, nach der Ansicht der Psychologen sogar erst in der Pubertät deutlicher zeigen, sind solche Reformanstalten nötig, sobald man die Forderung stellt, daß „die durch die Organisation diktierte Bildungsarbeit (der einzelnen Schulgattungen) auch den besonderen Begabungen ihrer Schüler gerecht werden" soll (Kerschensteiner).

1) Der Austausch geschieht durch die Firma B. G. Teubner-Leipzig, die alljährlich vor Ostern ein Verzeichnis der in Aussicht gestellen Programme und Abhandlungen herausgibt. Im Buchhandel erscheinen diese Veröffentlichungen bis auf wenige Ausnahmen nicht, sie sind jedoch durch Antiquariate erhältlich.

Eine Zusammenstellung der tatsächlich erschienenen Programmabhandlungen in Deutschland und Österreich bringt jährlich das Statistische Jahrbuch der höheren Schulen Deutschlands, Luxemburgs und der Schweiz, zuletzt 30. Jahrgang. Leipzig (Teubner) 1909.

Über die früher erschienenen Abhandlungen gibt Auskunft: R. Klussmann, Systematisches Verzeichnis der Abhandlungen usw. 1. Bd. 1876 bis 1885; 2. Bd. 1886 bis 1890; 3. Bd. 1891 bis 1895; 4. Bd. 1896 bis 1900. Leipzig (Teubner).

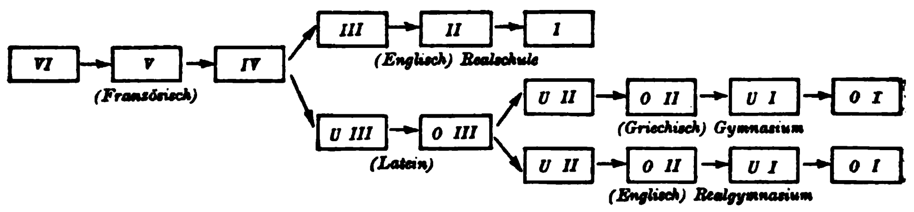
2) Der letzte Jahrgang ist: K. Kunze, Kalender für das höhere Schulwesen Preußens und einiger anderer deutscher Staaten. Schuljahr 1909. 16. Jahrg. Herausgegeben von Toeplitz und Malberg. 2. Teil. (Der 1. Teil ist ein Kalendarium mit Schülerlisten u. dgl.) Breslau (Trewendt & Granier) 1909.

3) Über die Reformanstalten vgl. Liermann, Reformschulen nach Frankfurter und Altonaer System. Teil 1. Berlin (Weidmann) 1903.

Es handelt sich in der Tat hierbei nicht um eine einzelstaatliche Bewegung; man begegnet ähnlichen Bestrebungen in der Schulpolitik fast aller Länder.

In Preußen wurden solche Pläne sofort laut, als dem vorher alleinberechtigten Gymnasium Realanstalten zur Seite traten. Bereits 1849 beschäftigte sich eine unter dem Vorsitz von Kortüm tagende, aus Schulmännern sich zusammensetzende Landesschulkonferenz mit der Frage. Sie wünschte als Unterstufe ein lateintreibendes, dreistufiges Untergymnasium und darauf aufbauend einmal das fünfstufige Obergymnasium, andererseits das lateinlose (ev. auch Latein zulassende) Realgymnasium. Diese Beschlüsse sind niemals, auch nur probeweise nicht, zur Ausführung gekommen.

Auf der von Schulmännern und interessierten Vertretern anderer Lebensstellungen gebildeten Oktoberkonferenz 1873 stand ein Vorschlag von Ostendorf zur Erörterung. Er dachte sich den Schulaufbau[1]) so:



Plan von Ostendorf.

Ein wesentliches Kennzeichen der Pläne für die Reformanstalten ist, daß sie ganz und gar von den Rücksichten auf den sprachlichen Unterricht diktiert sind; insbesondere ist für alle hier in Betracht kommenden Typen charakteristisch, daß als erste Fremdsprache eine neue Sprache gewählt ist.

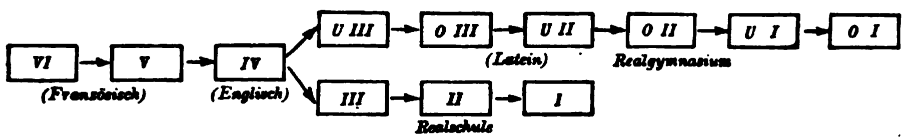
Die Ostendorfschen Pläne blieben zunächst noch auf dem Papier (vgl. jedoch das Schema des Frankfurter Systems). Ein erster praktischer Versuch im Sinne der Reformanstalten wurde 1878 von Schlee in Altona gemacht.[2]) Das Altonaer System begnügt sich mit einem gemeinsamen Unterbau für Realschule (Oberrealschule) und Realgymnasium. Dieser Typus hat, in einzelnen Fällen mit Vertauschung der Reihenfolge von Englisch und Französisch, mehrfach praktische Erprobung erfahren, neuerdings ist er aber fast ganz ausgestorben. Gegenwärtig existieren nur noch sechs Anstalten Altonaer Systems,

---

1) Die folgenden schematischen Darstellungen sind so zu lesen: ☐ bedeutet eine Klasse mit – normaler Weise – einjähriger Kursusdauer; in das Rechteck ist die übliche, abgekürzte Klassenbezeichnung eingetragen. ⟶ bedeutet den Übergang von einer in die andere Klasse in Richtung des Pfeiles.

2) Vgl. Schlee, Die Geschichte des Altonaer Realgymnasiums. Festschrift. Altona 1896.

von denen vier, darunter Altona selber, in Umwandlung zum Frankfurter System begriffen sind.



Altonaer System.

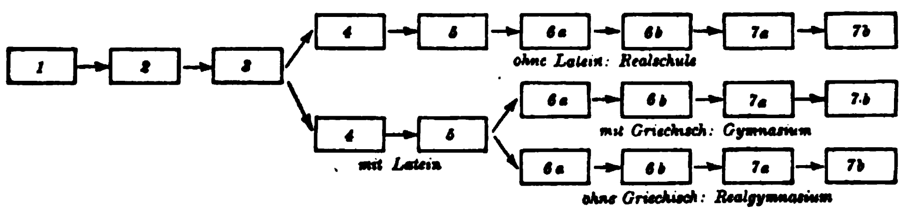
Charakteristisch für den Altonaer Plan ist das frühe Einsetzen des Englischen: Der Plan ist an der „Waterkante“ geboren und hauptsächlich dort in Geltung gewesen.

Die Lehrpläne von 1882 brachten die Idee der Reformanstalten einen Schritt vorwärts, insofern sie die Lehrstoffe für das Gymnasium und das Realgymnasium in den drei untersten Klassen als gleich festsetzten, so daß also hier ein Übergang von einer zur anderen Anstalt jederzeit möglich war.

1886 tritt dann der „Deutsche Einheitsschulverein“ auf den Plan. Sein Ziel ist die Verschmelzung von Gymnasium und Realgymnasium, wobei übrigens diese Einheitsschule das Griechisch beibehalten sollte. Geplant waren die Hinzunahme von Englisch, auch eine Vermehrung der Mathematik, dagegen Abstriche beim Latein. Neben dieser sog. Einheitsschule sollten die lateinlosen Realschulen weiter bestehen bleiben. Als die Lehrpläne von 1892 in Aussicht standen und man erkannt hatte, daß die Entwicklung des höheren Schulwesens andere Wege gehen würde, löste sich 1891 der Einheitsschulverein wieder auf.

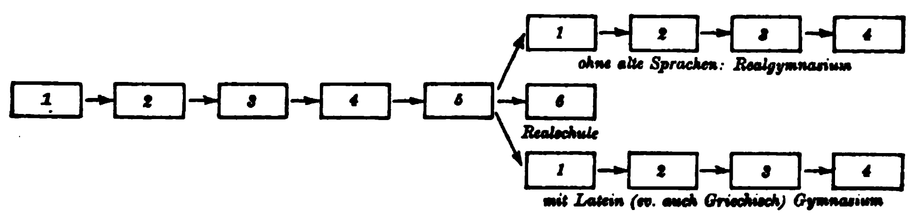
Gegenwärtig wird das Problem der Einheitsschule noch recht häufig diskutiert, jedoch mit Vorliebe von Kreisen, die mit dem höheren Schulwesen wenig oder gar nicht Fühlung haben, zudem unter Hervorkehrung mehr sozialer als pädagogischer Gründe.

Bedeutungsvoller als der „Einheitsschulverein“ war der 1889 gegründete „Verein für Schulreform“, der „Einheitlichkeit der Unter- und soweit tunlich der Mittelstufe“ anstrebte. Allerdings hat er sein Endziel: „Die ersten sechs Jahreskurse der jetzigen neunklassigen Schulen erhalten fortan den gleichen Lehrplan und werden zu selbständigen Mittelschulen zusammengefaßt, während die drei letzten Jahreskurse etwa unter denselben Namen als Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen getrennt fortbestehen“ noch nicht erreicht, ja hat nicht einmal Gelegenheit zu praktischer Erprobung dieses Planes gehabt. Hier wird diejenige, häufig auch mit dem Namen Einheitsschule (doch nicht in dem strengeren Sinne der Einheitsschulmänner) bezeichnete Schulform gewünscht, für die die neuerliche Entwicklung des Schulwesens in den nordischen Ländern (Norwegen seit 1896, Dänemark seit 1903, Schweden seit 1905) Musterbeispiele geliefert hat. In Schweden war z. B. der Aufbau vor der Reform der folgende:



Schwedisches System vor der Reform 1905.

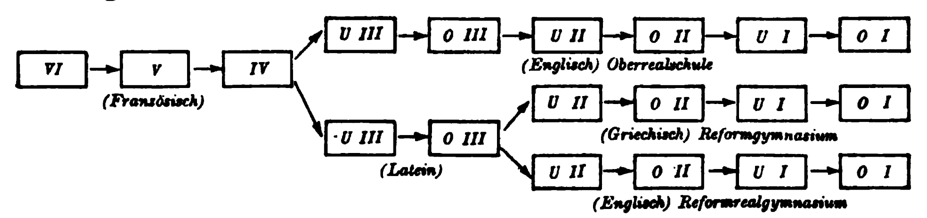
Die Reform von 1905 brachte einen fünfklassigen gemeinsamen Unterbau und gliedert dann weiter, wie es das folgende Schema zeigt:



Schwedisches System nach der Reform 1905.

Soweit wie in den nordischen Ländern konnten die Reformer in Preußen – einige Anhänger der Schulreform würden hinzufügen: bisher – nicht gehen. Man hat sich vielmehr mit einem Plane begnügt, der sich ungefähr mit dem schwedischen vor der Reform, übrigens auch mit dem alten Ostendorfschen deckt.

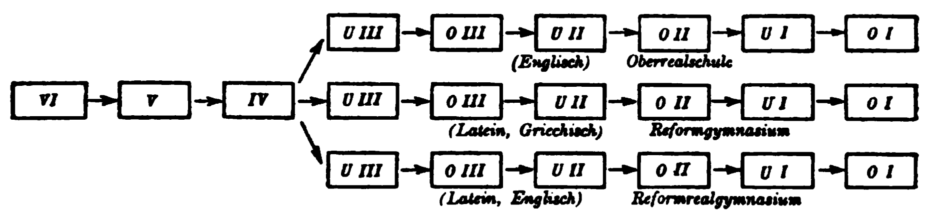
Dieses Frankfurter System, mit dessen praktischer Erprobung 1892 K. Reinhardt in Frankfurt a. M. begann, hat vor dem Altonaer System den wesentlichen Vorzug, daß auch das Gymnasium in den gemeinsamen Unterbau mit einbezogen wird. Das Schema, wie es etwa an der Leibnizschule in Hannover genau durchgeführt ist, ist das folgende:



Frankfurter System I. Leibnizschule Hannover.

Bei den meisten Schulen des Frankfurter Systems, so z. B. in Frankfurt a. M. selbst beim Goethe-Gymnasium und der Musterschule (Realgymnasium), ist dieses Schema nicht genau durchgeführt. Die Mittelstufe (U III und O III) ist vielmehr in beiden Zweigen etwas verschieden derart, daß das Reformgymnasium bereits mehr Latein (10 gegen 8 Stunden in jeder Klasse), dagegen weniger Französisch (in U III nur 3 gegen 4, in O III nur 2 gegen 4 Stunden) hat. Dazu treten

noch geringe Unterschiede in anderen Fächern. Berücksichtigt man diese nicht sehr einschneidenden Differenzen, so ergibt sich das folgende Schema:



Frankfurter System II. Goethe-Gymnasium und Musterschule Frankfurt a. M.

Ganz ähnlichen Charakter wie die Schulen Frankfurter Systems hat übrigens das Französische Gymnasium in Berlin; der französische Unterricht beginnt dort auch in VI, doch setzt Latein bereits in IV, Griechisch in O III ein.

Die Schulkonferenz von 1900 sprach sich für eine weitere Erprobung der Reformanstalten aus, hielt es jedoch für ratsam, von der allgemeinen Einführung noch abzusehen; die Dezemberkonferenz von 1890 hatte die Frage: Empfiehlt sich ein gemeinsamer Unterbau für Gymnasium und lateinlose Schulen überhaupt? mit 28 gegen 15 Stimmen verneint.

Inzwischen hat sich die Zahl der Reformanstalten nach Frankfurter System überraschend vermehrt, und zwar die der Reformrealgymnasien in erheblich stärkerem Maße. Es gab im Sommer 1909, wenn die im Entstehen begriffenen Anstalten mitgerechnet werden:

Reform-	Gymnasien	22	25.
	Progymnasien	3	
	Realgymnasien	65	82.
	Realprogymnasien	17	
	Insgesamt	107.	

An den Reformschulen sind vorwiegend die westlichen Provinzen der Monarchie beteiligt (z. B. Rheinprovinz mit 27, Westfalen mit 15 Anstalten), in geringerem Maße die östlichen (die niedrigsten Zahlen sind Pommern mit 1, Ostpreußen mit 4, Schlesien mit 5 Anstalten).

4. Freiere Gestaltung des Unterrichts auf der Oberstufe.

Die Versuche, die Oberstufe, namentlich die beiden letzten Jahre in Prima, in Stoff und Methode freier zu gestalten als die anderen Klassen, sind, wenn sie auch nicht unvermittelt auftreten, verhältnismäßig jungen Datums. Weitere Kreise wurden hauptsächlich durch einen zu Beginn des Jahres 1905 erschienenen Aufsatz von A. Matthias[1]) auf diese Dinge aufmerksam gemacht, dem dann viele andere

1) A. Matthias, Neujahrsbetrachtung. Monatsschrift für höhere Schulen 4 (1905), 1.

Aufsätze folgten.[1]) Die Geneigtheit des Ministers zur Anstellung derartiger Versuche sprach sich in einer sehr häufig zitierten Bemerkung im preußischen Abgeordnetenhause am 2. März 1905 aus, die ich wegen der darin zum Ausdruck gebrachten Auffassung über die preußischen Lehrpläne hier wiederhole: „Was ferner den Wunsch und die Möglichkeit einer freieren Bewegung im Unterrichtsbetriebe anlangt, so bin ich durchaus der Ansicht, daß seitens der Lehrerkollegien noch lange nicht genug von der ihnen zustehenden Bewegungsfreiheit Gebrauch gemacht wird. Manche von den Lehrerkollegien fühlen sich ohne Not eingeengt; denn die Lehrpläne wollen nur als grundlegender Anhalt, nicht aber als strikte Vorschriften aufgefaßt sein."[2])

Eine gute Zusammenstellung aller hierher gehörigen Einrichtungen an unseren höheren Schulen findet sich in dem ausführlichen Referat von F. Cramer: Ist eine freiere Behandlung des Lehrplans der oberen Klassen höherer Lehranstalten wünschenswert? Welche Formen freierer Behandlung sind vornehmlich anzustreben und können mit den der Schule zur Verfügung stehenden Mitteln verwirklicht werden?[3])

Man darf übrigens nicht verschweigen, daß auch gewichtige Stimmen gegen eine freiere Gestaltung laut geworden sind; so in der Diskussion auf dem 3. Verbandstage des Vereinsverbandes akademisch gebildeter Lehrer Deutschlands in Braunschweig 1908[4]) und erst jüngst in einem Vortrag von R. Lehmann auf der 50. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Graz 1909. Lehmann wandte besonders ein, daß das Ziel der Erziehung antiindividuell oder vielmehr überindividuell sei; dagegen sprach er sich dafür aus, das Maß und die Art der Anforderungen besonders für die häusliche Beschäftigung der Schüler elastischer zu gestalten.

Weite Möglichkeiten, sich von dem Lehrstoff der Lehrpläne unabhängig zu machen, bzw. mit einzelnen Schülern über ihn hinauszugehen, bieten die häuslichen Arbeiten. Wir kommen auf diese Frage später zurück (Abschnitt 10) und werden sie besonders im Hinblick auf

1) Vgl. besonders F. Paulsen, Was kann geschehen, um den Gymnasialstudien auf der Oberstufe eine freiere Gestalt zu geben? Monatsschrift für höhere Schulen. 4 (1905), S. 65 ff., abgedruckt in F. Paulsen, Richtlinien der jüngsten Bewegung im höheren Schulwesen Deutschlands. Berlin (Reuther & Reichard) 1909. Ferner A. Matthias, Bewegungsfreiheit in den oberen Klassen der höheren Schulen. Monatsschrift für höhere Schulen 5 (1906) S. 1 ff.

2) Stenographischer Bericht S. 10949 ff.

3) Verhandlungen der IX. Direktorenversammlung in der Rheinprovinz 1907. Berlin (Weidmann) 1907. Die Frage der freieren Gestaltung ist überhaupt vielfach in Direktorenversammlungen behandelt worden. Von den Verhandlungen der Direktorenversammlungen in den Provinzen des Königreichs Preußen, Berlin (Weidmann), kommen insbesondere noch in Betracht: Bd. 72, Berichte von Jung und Zimmermann; Bd. 73, Bericht von Puls; Bd. 75, Berichte von Marks und v. Boltenstern; Bd. 76, Berichte von Schwarz, Wehrmann und Boesche.

4) Vgl. Mitteilungen des Vereinsverbandes akademisch gebildeter Lehrer Deutschlands, herausgegeben vom geschäftsführenden Ausschuß. Nr. 12. Braunschweig 1907.

die Mathematik betrachten. Hier sollen nur solche freiere Gestaltungen besprochen werden, die unmittelbar in den eigentlichen Unterrichtsbetrieb eingreifen. Ich behandle erst einige im Rahmen der Lehrpläne durchführbare Einrichtungen, dann solche, die sich von dem offiziellen Lehrplan mehr oder minder frei machen.

1. Studientage.

a) Eine alte Einrichtung sind die Studientage in Pforta, wo sie durch das Internatswesen leicht ermöglicht werden und sich organisch dem ganzen Betriebe einfügen.

„In jeder Arbeitswoche, die nicht durch Ferien oder eine Festfeier Einbuße erleidet, wird den Schülern ein Tag, und zwar abwechselnd der Dienstag, Donnerstag oder Freitag als Studientag freigegeben, um Privatlektüre zu treiben. Nur die beiden Tertien haben an diesem Tage je eine mathematische, die Unterprima eine biologische Lehrstunde."

Die Privatlektüre ist aus lateinischen und griechischen, daneben auch französischen Schriftstellern auszuwählen. Der mathematische Unterricht zieht also gegenwärtig, wie es scheint, aus der Einrichtung – abgesehen von jenen Lehrstunden der beiden Tertien – keinen Gewinn. Früher war das anders, wenigstens weisen die Themen einiger „Valediktionsarbeiten" darauf hin. Es wurden z. B. bearbeitet:

1884. Gleichungen zweiten und höheren Grades. – Eine Kugel soll konstruiert werden, die a) durch vier Punkte geht, b) vier Ebenen, c) vier Kugeln berührt.

1885. Eine gegebene Kugelfläche soll mit einem Netz von gleichen und ähnlichen sphärischen Polygonen überzogen werden, die von Hauptkreisbogen gebildet werden. – Über den Schwerpunkt.

1889. Die Transversalen-Theorie und die besonderen Punkte des Dreiecks.

b) Neu, wenn auch, wie ich erfahre, anknüpfend an frühere Gepflogenheiten, ist die Einschaltung von Studientagen an der Wöhlerschule (Realgymnasium) und am Goethe-Gymnasium[1]) in Frankfurt a. M.; ähnliches findet sich vielleicht noch an anderen Anstalten. Folgende Grundsätze sind aufgestellt:

1. An etwa 14 (am Wöhler-Realgymnasium ist die Zahl geringer) dem Privatstudium vorbehaltenen Vormittagen, deren Datum zu Anfang eines jeden Halbjahres bestimmt wird, wobei im regelmäßigen Wechsel jeder Wochentag an die Reihe kommt, dürfen die Schüler der Unter- und Oberprima sich privatim in der Schule mit einem ihren besonderen Neigungen naheliegenden und ihrer Befähigung entsprechenden Wissensgebiete beschäftigen.

2. Es wird eine naturwissenschaftlich-mathematische und eine sprachlich-historische Gruppe gebildet, zu deren Anleitung und Unterstützung sich Fachlehrer der

1) Wie ich höre, erfährt seit Ostern 1910 der mathematische Unterricht, der ja an Reformgymnasien auf der Oberstufe recht schlecht gestellt ist, durch die Studientage keine Einbuße, so daß also die Prima am Studientage ev. eine regelrechte Mathematikstunde hat.

Prima und, soweit erforderlich, andere Mitglieder des Lehrerkollegiums bereit erklären.

3. Der Stoff, mit dem sich die Schüler zu beschäftigen gedenken, ist einem der beteiligten Fachlehrer mitzuteilen, der im Einvernehmen mit dem Direktor über seine Zweckmäßigkeit entscheidet und der Individualität des Schülers soweit Spielraum läßt, als es sich irgend mit der wissenschaftlichen und erzieherischen Aufgabe einer höheren Lehranstalt verträgt.

4. Größere, eine gewisse Selbständigkeit verratende Ausarbeitungen dürfen als Rechenschaftsberichte über verständige Ausnützung der Privatstudientage, sowie als Urkunden der geistigen Eigenart des Schülers zu den Akten der Reifeprüfungskommission gegeben werden, die solche Arbeiten zur Berücksichtigung bei der Beurteilung der Reife des Abiturienten empfehlen kann.

Ich gebe die Themata einiger solcher „Valediktionsarbeiten" aus dem Schuljahre 1908/09 an, die sich mit der Mathematik beschäftigen. Am Wöhler-Realgymnasium sind in der mathematisch-wissenschaftlichen Gruppe hauptsächlich physikalische Arbeiten eingeliefert worden, von den mathematischen nenne ich: Die Tangente nach der alten und neueren Geometrie. – Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks. – Über graphische Darstellung, insbesondere ihre praktische Anwendung.

Am Goethe-Gymnasium dringt eine Reihe von Arbeiten in das Gebiet der Differentialrechnung vor: Die Theorie der Maxima, Minima und Wendepunkte. – Auswertung unbestimmter Ausdrücke, mit Beispielen. – Unendliche Reihen und ihre Anwendung zur Darstellung von Funktionen. – Kurze Darlegung der Theorie der Differentialrechnung und Lösung ausgewählter Aufgaben. Daneben finden sich angewandte Probleme: Die Gestalt der Sonnenbahn usf.

2. Wissenschaftliche Schülervereine.

Neben den Studientagen erwähne ich hier die Einrichtung wissenschaftlicher Schülervereine.[1]) Schülervereine bestehen an sehr vielen Anstalten, unter ihnen sind nicht wenige wissenschaftliche, wenn auch Turn-, Ruder-, Musik- u. dgl. Vereine überwiegen. Wissenschaftliche Schülervereine kann man also nicht ebenso als regelmäßige Erscheinung ansprechen wie etwa in Ungarn[2]), wo sogar eine ganze Reihe von

---

1) Die Frage der Schülervereine wird allgemein behandelt in M. Nath, Schülerverbindungen und Schülervereine. Erfahrungen, Studien und Gedanken. Leipzig (Teubner) 1906. Dazu vgl. man Ssymank, Zur Frage der Schülervereinigungen. Monatsschrift für höhere Schulen 5 (1906), S. 483 ff. Die Frage: Welche Schülervereinigungen sind zu fördern? stand auf der Tagesordnung der 14. Direktoren-Versammlung in der Provinz Schlesien (Verhandlungen der Direktoren-Versammlungen in den Provinzen des Königreichs Preußen. 79. Bd. Berlin (Weidmann) 1909.

Über einen einzelnen wissenschaftlichen Verein berichtet: P. Ziertmann, Ein wissenschaftlicher Schülerverein. Monatsschrift für höhere Schulen 5 (1906), S. 249 ff.

2) Eine Ministerialverfügung aus dem Jahre 1868 gibt z. B. als wünschenswerte Veranstaltungen der Vereine unter anderen an: Veranstaltung von Sammlungen und Bestimmungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaft, chemische Versuche und Analysen, Lösung mathematischer Aufgaben. Vgl. darüber F. Kemény, „Die Schülerselbstbildungsvereine" in Ungarn. Monatsschrift für höhere Schulen. 6 (1907), S. 170 ff.

Verfügungen des Ministers sich mit ihnen beschäftigt. Leider geben die Programme der einzelnen Anstalten recht wenig Ausbeute über das Leben dieser Vereine.

Meist werden in ihnen Literatur und Geschichte bevorzugt, es gibt aber auch naturwissenschaftliche Vereine. Wenn ich hier aus eigener Erinnerung berichten darf, so leisten diese Vereine für die Förderung ihrer Mitglieder außerordentlich viel. Ihre Verfassung ist sehr verschieden. In dem Verein, der zu meiner Schulzeit als naturwissenschaftliche Gruppe einem bereits am Königlichen Friedrichs-Gymnasium in Frankfurt a. O. bestehenden wissenschaftlichen Vereine angegliedert wurde, hielt allwöchentlich ein Mitglied einen $\frac{1}{2}$- bis $\frac{3}{4}$-stündigen Vortrag. Die Sitzungen fanden im Anschluß an die Unterrichtsstunden im Klassenzimmer der Prima statt; ein Lehrer war selten zugegen. Die Mathematik kam dabei allerdings nur mittelbar zur Sprache, etwa in einem Vortrag über die Keplerschen Gesetze od. dgl. Die Diskussion war oft recht rege, die Kritik der Älteren an den Jüngeren recht förderlich. Teilnehmer waren Obersekundaner und Primaner.

Im naturwissenschaftlichen Verein am Askanischen Gymnasium zu Berlin werden häufig Experimentalvorträge gehalten, zu denen der Fachlehrer die Apparate der Schulsammlung zur Verfügung stellt. Es werden vielfach solche Themata bevorzugt, die im Schulunterricht nicht behandelt werden; auch für Astronomie und Biologie ist großes Interesse vorhanden.

Man legt neuerdings, wie es scheint, solchen Schülervereinen mehr Wert bei, als man das wohl früher getan.[1]) Wie hoch frühere Mitglieder die erhaltene Förderung geschätzt haben, möge durch die Tatsache belegt werden, daß Tycho Mommsen dem wissenschaftlichen Vereine, dessen Mitglied er als Primaner in Altona gewesen, seine Werke zu übersenden pflegte.

3. Besondere Vorträge.

An vielen Schulen ist es Sitte, die Abiturienten nicht gleich nach bestandener mündlicher Prüfung, sondern erst am Schlusse des Schuljahres zu entlassen. – Die Prüfung findet jenachdem zwei bis acht Wochen vorher statt. Man hat nun in einigen Fällen Vorlesungen für die Abiturienten in dieser Zwischenzeit eingerichtet. Daß dabei auch mathematische Themen behandelt wurden, ist mir allerdings nicht bekannt. Übrigens sind mehrfach auch für Primaner derartige Vortragszyklen eingerichtet worden, so z. B. in Berlin und anderen Orten über hygienische Fragen.

1) Noch 1899 wurde einer rheinischen Direktoren-Konferenz die These vorgelegt: „Nicht zu empfehlen sind wissenschaftliche Vereine.“ Die These wurde allerdings nicht angenommen.

Hier mögen auch solche Vorlesungen Erwähnung finden, wie sie z. B. von Schubert in Hamburg gehalten werden, die ähnlich wie die Vorlesungen des Physikalischen Vereins und der Senkenbergischen Gesellschaft in Frankfurt a. M. auch von Primanern besucht werden.

Es mag bei dieser Gelegenheit wohl ein Wort darüber gesagt werden, daß die Mathematik zuweilen, wenn auch seltener als alle anderen Fächer, auch in Festreden aus Anlaß von Schulfeierlichkeiten zu Worte kommt. Lorey hat in den letzten Jahren zwei solche Reden veröffentlicht[1]; soll ich noch andere nennen, so muß ich nach Süddeutschland gehen und an eine Rede von Kommerell über den Bildungswert der Mathematik[2]) und eine am gleichen Tage von E. Geck: Über die Bedeutung der Mathematik für die Bildung des Geistes[3]) gehaltene erinnern.

4. Privatissima.

Es gibt noch eine Form des Eingehens auf individuelle Beanlagungen und Interessen der Schüler, die hier erwähnt werden mag. Es sind die Privatissima, die ein Lehrer mit einer kleinen Anzahl von Schülern zu deren Weiterbildung oder auch Vorbereitung auf das Studium abhält. Es gibt nicht wenige Lehrer, die in dieser Weise tätig sind, ohne daß von ihren Bemühungen etwas an die breitere Öffentlichkeit dringt, und auch ohne daß sie eine Entschädigung für diese ihre Mehrarbeit anders als durch die eigene Freude daran erhalten. Höfler hat einmal den Vorschlag gemacht, „jedem Lehrer der obersten Klassen je eine „Freistunde“ zuzuweisen, in der er, auf die individuellen Interessen seiner Schüler eingehend, die Eifrigen und Begabteren in der Wahl ihrer Privatlektüre fördern, auf lehrreiche, an den Schulunterricht mehr oder weniger anknüpfende Probleme aufmerksam machen – kurz, mit den der Hochschule sich Nähernden das betreiben kann, was ihm nach freier Überzeugung, ohne alle Reglementierung, zur Vorbereitung auf eine würdige akademische Freiheit ersprießlich scheint“.

5. Sonderkurse.

Wir wenden uns nun einigen Einrichtungen zu, welche erheblichere Eingriffe in die Organisation und die Lehrpläne der Schule mit sich bringen. Es kommen hier hauptsächlich zwei Typen in Frage. Ich beginne mit den Sonderkursen. Charakteristisch für diese Einrichtung im Gegensatz zu der gleich zu besprechenden Gruppen-

---

1) W. Lorey, Über die Wohltat und das Werden der Zahl. Progr. Gymnasium Görlitz. Ostern 1905; derselbe, Archimedes und unsere Zeit. Zeitschrift für lateinlose Schulen. 19 (1908); auch als Sonderabdruck bei Teubner, Leipzig, erschienen.

2) Kommerell, Über den Bildungswert der Mathematik. Eine Schulrede. Süddeutsche Schulblätter 23 (1906), S. 176 ff.

3) E. Geck, Über die Bedeutung der Mathematik für die Bildung des Geistes. Besondere Beilage des Staatsanzeigers für Württemberg. 1907, S. 170 ff.

bildung ist, daß die Schüler nicht gezwungen sind, sämtlich die ihnen gebotene Wahlfreiheit zu benutzen, daß sie vielmehr, wenn sie es vorziehen, sich auf den üblichen Lehrplan beschränken können. Mir sind Sonderkursbildungen bisher nur von Gymnasien bekannt. Ich beschreibe die Einrichtung zunächst ausführlicher an einem ersten Beispiele,

a) dem Lyzeum in Hannover.[1]) Folgendes sind die grundlegenden Leitsäze:

1. Neben dem lehrplanmäßigen Unterricht wird den Primanern Gelegenheit geboten, an Sonder-Unterrichtskursen teilzunehmen, und zwar sind solche Kurse in Aussicht genommen für

a) philosophische Propädeutik,
b) Deutsch,
c) die alten Sprachen,
d) die neueren Sprachen,
e) Geschichte,
f) Mathematik,
g) Naturwissenschaften.

2. Von diesen Kursen treten in jedem Jahre diejenigen in Tätigkeit, für die sich geeignete Schüler finden und zu deren Leitung sich Mitglieder des Kollegiums bereit erklären. Der Unterricht findet in je zwei Wochenstunden, getrennt für Unter- und Oberprima, statt.[2])

3. Wer an einem Sonderkursus teilnimmt, wird von zwei Stunden mathematischen oder von zwei bis drei Stunden lateinischen Unterrichts befreit; wer an zwei Kursen teilnimmt, von je zwei Stunden in beiden genannten Fächern. Auf die Entlastung kann unter Umständen verzichtet werden.

4. Über die Teilnahme am Sonderunterrichte und über die Entlastung behält sich die Schule in jedem einzelnen Falle das Recht der Entscheidung vor, doch sollen die Wünsche der Schüler bzw. der Eltern, soweit sie nicht nach dem Urteile der Schule dem wahren Interesse der ersteren entgegenstehen, weitherzige Berücksichtigung finden.

5. Es ist zunächst in Aussicht genommen, daß die Schüler, die in Sonderkursen unterrichtet werden, in den betreffenden Fächern mit den übrigen an dem lehrplanmäßigen Unterricht teilnehmen.

Für die Mathematik werden damit in jeder Prima mit Sonderkurs drei Schülergruppen geschaffen: I. Die Schüler mit normaler Unterrichtszeit (4 Std.), II. die mit verkürzter Unterrichtszeit (2 Std.), III. die Schüler des Sonderkursus. Die Schwierigkeit besteht nun darin, daß von diesen Gruppen, die auch hinsichtlich ihrer Beanlagung für Mathematik *„the great middle class"*, *„the submerged tenth"* und *„the upper tenth"* repräsentieren werden, I, II und III zwei Stunden, I und III noch weitere zwei Stunden gemeinsam haben. Der Lehrplan der Gruppe III umfaßt die Differentialrechnung; er kommt im dritten Teile dieser Ar-

---

1) Vgl. Prinzhorn, Monatsschrift für höhere Schulen. 8 (1909), S. 289 ff., auch Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 40 (1909), S. 441 ff.

2) Im Jahre 1908/09 war ein mathematischer Sonderkursus für Oberprimaner vorhanden, im Schuljahr 1909/10 fehlten mathematische Sonderkurse ganz.

beit zur Sprache, wobei dann auch die Beziehungen zu den anderen Gruppen gestreift werden sollen (vgl. Abschnitt 27).

Bei einer Reihe anderer Arten von Sonderkursbildungen können wir uns jetzt kurz fassen:

b) Am Gymnasium mit Realschule zu Mühlheim am Rhein ist nur ein mathematischer Sonderkurs (eine Stunde wöchentlich) eingerichtet. Ähnliches mag für andere Anstalten zutreffen; hier werden aber die weitergehenden Kenntnisse der Kursisten (über den Lehrstoff vgl. Abschnitt 27) auch bei der Reifeprüfung berücksichtigt.

c) Am Königl. Auguste-Viktoria-Gymnasium in Posen, bei dem man eben erst mit der Einrichtung begonnen hat, wird auch die Obersekunda in die Sonderkursbildung einbezogen. Eine Entlastung in der Weise, daß das Lehrziel des einen oder anderen Faches zurückgesteckt wird, tritt hier nicht ein, dagegen ein Erlaß bei den regelmäßigen häuslichen Arbeiten zugunsten größerer Ausarbeitungen. Übrigens war ein mathematischer Kurs bis Ostern 1909 noch nicht eingerichtet.

d) Am weitesten reichen die Versuche am städtischen Gymnasium zu Bochum zurück, wo gleichfalls die Obersekunda mit berücksichtigt ist. Die Zahl der Sonderkurse ist hier recht groß. In der im folgenden wiedergegebenen Liste ist auch die Zahl der Teilnehmer aus den verschiedenen Klassen angegeben. Dabei ist durch – angedeutet, daß den betreffenden Klassen die Teilnahme am Kurs nicht gestattet ist, ein 0 heißt, daß Teilnehmer aus der Klasse nicht vorhanden sind, trotzdem der Kurs ihnen zugänglich ist. Auch hier bilden Differential- und Integralrechnung den Lehrstoff (vgl. Abschnitt 27).

Klasse	Schülerzahl der Klasse	Deutsch		Latein.	Griech.	Kunst	Franz.	Mathematik		Geschichte; Erdkunde	Natur-wissensch.	Zus.:
		Ästhet.-Philos. Abteil.	Philo-log. Abteil.					Obere Abteil.	Untere Abteil.			
O I	24	5	0	2	1	21	0	4	–	11	0	44
U I	21	3	3	0	2	13	3	–	2	1	3	30
O II	36	3	8	4	5	–	0	–	–	–	–	20
Zusammen		11	11	6	8	34	3	4	2	12	3	94
Wochenstd.		1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	13

Die Sonderkurse am städt. Gymnasium zu Bochum.

6. Gruppenbildung.

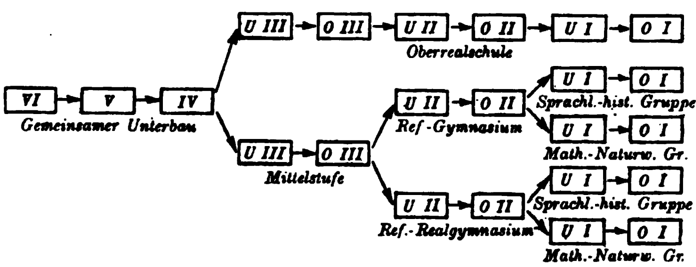
Am einschneidendsten sind die Änderungen der Schulorganisation bei der Gruppenbildung. Wir haben es hier, ähnlich wie bei all diesen Dingen, inbesondere z. B. dem Reformschulwesen, mit einer Ausgestaltung der höheren Schulen zu tun, die auch in anderen Ländern bereits

zu praktischen Folgen geführt hat. Ganz ähnlich wie bei unseren Gymnasien liegen beispielsweise die Dinge in Italien.

In Preußen finden wir Beispiele von Gruppenbildung bei den Gymnasien und Realgymnasien, dagegen nicht bei den Oberrealschulen; eine Versammlung von Oberrealschuldirektoren (Berlin 1908) hat sich ausdrücklich gegen Gruppenbildung an dieser Schulart ausgesprochen.

Es gibt für das System der Gruppenbildung drei Jahrzehnte zurückliegende Vorbilder (das Hamburger Realgymnasium des Johanneums); die zurzeit in Geltung befindlichen Einrichtungen sind aber meines Wissens sämtlich erst von kurzer Lebensdauer. Sie laufen alle darauf hinaus, in den beiden letzten Klassen (U I und O I) eine Gabelung in zwei Gruppen vorzunehmen.

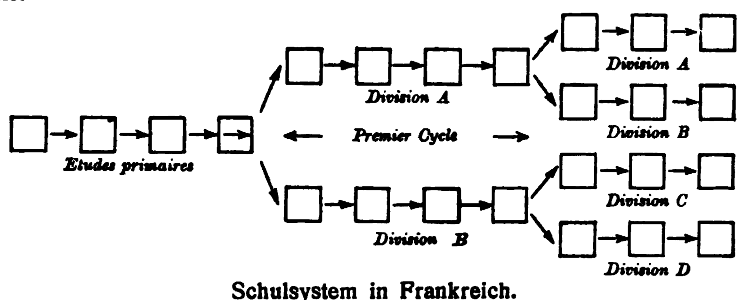
Das Schemabild des höheren Schulwesens in Preußen wird besonders reichhaltig, wenn man sich Reformschule und Gruppenbildung vereinigt denkt. Eine vollständige Schule dieser Art würde so aussehen:



Vollständige Reformschule mit Gabelung in Prima.

Wenn auch keine derartig vollständige Schule besteht, so kommen doch Teile davon vor (z. B. Reform-Realgymnasium mit Gabelung).

Vielleicht ist zum Vergleich das Schemabild des Fortoulschen Bifurkationssystems in Frankreich (Lehrpläne von 1901) erwünscht. Bei ihm liegen die Gabelungen erheblich früher als bei dem deutschen System:



Schulsystem in Frankreich.

Beim Vergleich wolle man beachten, daß in Frankreich die vier vorbereitenden Klassen mitgezählt sind, in Deutschland die drei Vorschulklassen nicht.

Ich gehe nun dazu über, einzelne Fälle von Gruppenbildung näher zu besprechen:

a) Das Königl. Gymnasium zu Strasburg i. Westpr.[1]) Beim Eintritt in die Prima muß sich der Schüler für eine von zwei Gruppen entscheiden, eine sprachlich-geschichtliche (A) und eine mathematisch-naturwissenschaftliche (B). Gruppe A hat nur 2 Stunden Mathematik, gesondert von Gruppe B, sie wird im wesentlichen auf dem Obersekunda-Standpunkt gehalten, nur einige Kapitel des mathematischen Primapensums treten hinzu. Dafür werden in den alten, gegebenenfalls auch in den neuen Sprachen Privatarbeiten nach eigener Wahl gefordert. Gruppe B hat die lehrplanmäßigen 4 Stunden Mathematik und wird darin etwas über das Gymnasialpensum hinaus gefördert (vgl. Abschnitt 27). Dafür ist sie von 2 Stunden lateinischer Grammatik befreit und liefert in der Reifeprüfung an Stelle der Übersetzung ins Lateinische eine Übertragung aus dem Lateinischen ins Deutsche. Ein ganz ähnliches Beispiel bietet

b) das Bismarck-Gymnasium in Wilmersdorf b. Berlin[2]), wobei nur an die Stelle des Lateinischen das Griechische tritt. Alle Schüler hatten 6 Stunden Griechisch, die Gruppe A außerdem noch 2 weitere, dafür aber nur 2 Wochenstunden Mathematik. Die Abteilung B dagegen hatte die offiziellen 4 Wochenstunden in Mathematik (Lehrplan vgl. Abschnitt 27). Bei der Reifeprüfung wurden unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Lehrstoffe für jede Abteilung besondere Themen gestellt. Die Spaltung in Gruppen wird von dem Charakter der jeweiligen Schülergeneration abhängig gemacht, im Schuljahre 1909/10 war sie z. B. nicht durchgeführt.

In beiden Fällen, besonders in dem zuletzt genannten, erscheint die Mathematik bezüglich der Stundenzahl benachteiligt, so daß man den Eindruck hat, daß die Gabelung in erster Linie von den Rücksichten auf den sprachlichen Unterricht diktiert ist. In gleichmäßigerer Form erscheint die Gruppenbildung an einigen Realgymnasien durchgeführt; ich führe dafür zwei Beispiele an:

c) Am städtischen Realgymnasium Elberfeld[3]) wird in der Gruppe A Französisch und Englisch verstärkt auf Kosten der Mathematik und der Naturwissenschaften; die B-Gruppe, die beiläufig die besuchtere ist, weist eine beträchtliche Verstärkung der Mathematik und der Naturwissenschaften – auch 2 Stunden Biologie sind vorgesehen – auf Kosten aller Sprachen auf (vgl. die nachfolgende Tabelle). Auf

1) Vgl. R. Gaede, Zwei Jahre Bewegungsfreiheit im Unterrichte der Prima. Progr. Königl. Gymnasium zu Strasburg i. Westpr. Ostern 1907.

2) Vgl. D. Coste, Versuche einer freieren Gestaltung des Unterrichts in Prima. Progr. Bismarck-Gymnasium, Wilmersdorf. Ostern 1907.

3) Vgl. die Lehrpläne der Reformabteilung und der nach Fachgruppen geteilten Primen. Progr. des städt. Realgymnasiums in Elberfeld. Ostern 1909.

den mathematischen Lehrplan dieser und ebenso der folgenden Anstalt ist noch zurückzukommen.

d) Bei der König-Wilhelms-Schule (Königl. Realgymnasium) zu Reichenbach i. Schles.[1]) sind die Abweichungen vom üblichen Stundenplan noch erheblicher. – Die Tabelle gibt einen Überblick zunächst

Lehrfach	Amtlicher Lehrplan	Elberfelder Plan		Reichenbacher Plan	
		A	B	A	B
Latein	4	4	3	5	3
Französisch	4	5	2	6	2
Englisch	3	4	2	4	2
Geschichte	3	3	2	3	3
Erdkunde	–	1	1	–	–
Mathematik	5	3	6	3	6
Naturwissenschaft. .	5	4	8	5	8
Sprachliche Fächer.	11	13	7	15	7
Math.-naturw. Fächer	10	7	14	8	14

Stundenplan zweier Realgymnasien mit Gruppenbildung in Prima.

über die Stundenverteilung bei den einzelnen an der Gabelung beteiligten Fächern, dann eine Gegenüberstellung der sprachlichen und der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer.

5. Schulregierung.

Der Amerikaner J. W. A. Young führt die nach seiner Darstellung relativ besseren mathematischen Leistungen der deutschen vor den amerikanischen Schulen auf drei Ursachen zurück. *The causes of the excellence of the Prussian work in mathematics may be classed under three heads: 1. The Central Legislation and Supervision; 2. The Preparation and Status of the Teachers; 3. The Methods of Instruction.* Daraus geht hervor, welche Bedeutung von ausländischen Kennern unseres Schulwesens der Schulregierung[2]) beigelegt wird.

---

1) Vgl. das Programm dieser Schule von Ostern 1909.

2) Eine kurze Darstellung, die hier benutzt wurde, gibt J. Nelson in dem Handbuch für Lehrer höherer Schulen, bearbeitet von Auler, Boerner u. a. Leipzig (Teubner) 1906. Ausführlicher und auf alle deutschen Staaten und Österreich ausgedehnt ist die Darstellung in H. Morsch, Das höhere Lehramt in Deutschland und Österreich. 2. Aufl. Leipzig (Teubner) 1910; S. 286 ff. – Die behördlichen Verfügungen werden veröffentlicht in dem Zentralblatt für das gesamte Unterrichtswesen in Preußen. (Gegründet 1854; jährlich ein Band in monatlich erscheinenden Heften.) Zusammenstellungen des Wichtigsten geben L. Wiese, Das höhere Schulwesen in Preußen. 4. Band. Herausgeg. von B. Irmer. Berlin (Wiegand & Grieben) 1902

Oberste Instanz ist das 1817 gegründete Ministerium für die geistlichen (G), Unterrichts (U)- und Medizinal-Angelegenheiten (M). Die Gliederung der Unterrichtsabteilung[1]) ist:

I. Unterrichtsabteilung:

U I Universitäten
U I T Technische Hochschulen
U I K Wissenschaft und Kunst

II. Unterrichtsabteilung:

U II Höhere Knaben- und Mädchenschulen.
U III Volksschulen und Seminare
U IV Kunstdenkmalspflege, Zeichenunterricht, Handfertigkeitsunterricht usw.

Neben dem Minister hat das Kultusministerium einen Unterstaatssekretär und die Abteilungsdirektoren. Jede Abteilung zählt mehrere vortragende Räte und Hilfsarbeiter, die z. T. Fachleute, z. T. Verwaltungsbeamte (Juristen) sind.

Die Entscheidungen trifft der Minister selbständig; „jede ministerielle Verfügung gilt als von ihm selbst ausgehend". Verantwortlich ist der Minister dem Könige und dem Landtage. Da Preußen kein Unterrichtsgesetz besitzt, „vollzieht sich die Weiterentwicklung des höheren Schulwesens infolge allerhöchsten Erlasses oder infolge ministerieller Verwaltungsvorschriften".

Die einzelnen Schulen sind nicht direkt dem Ministerium untergeordnet; es existieren noch Zwischenbehörden, die Provinzial-Schulkollegien.[2]) Es gibt ihrer zwölf, in den Hauptstädten der preußischen Provinzen. Präsidenten sind die Oberpräsidenten der Provinzen, Direktoren (bzw. Vizepräsidenten) sind in einigen Fällen Schulmänner, meist jedoch Verwaltungsbeamte.

Die Zahl der Mitglieder der Provinzial-Schulkollegien (Provinzial-Schulräte) wechselt zwischen eins und fünf, wenn wir nur die Dezernenten für das höhere Schulwesen in Betracht ziehen; dazu kommen in einzelnen Fällen noch schultechnische Mitarbeiter. Die in allerjüngster Zeit erfolgte Unterstellung der höheren Mädchenschulen unter die Provinzial-Schulkollegien hat gegenwärtig eine Vermehrung der Schulratsstellen zur Folge. Mathematiker sind in den Provinzial-Schulkollegien verhältnismäßig wenige zu finden, es überwiegen die Altphilologen.

(umfaßt die Zeit von 1874 bis 1901 und ist von den vorangegangenen drei Bänden unabhängig) und das vielbenutzte Buch: A. Beier, Die höheren Schulen in Preußen und ihre Lehrer. 3. Aufl. Halle a. S. (Waisenhaus) 1909.

1) Übrigens stehen wichtige Teile des Fachunterrichtes in Preußen nicht unter dem Kultusministerium, vielmehr der gewerbliche unter dem Handels-, der landwirtschaftliche unter dem Landwirtschaftsministerium.

2) Diesen Provinzial-Schulkollegien würden in Frankreich die 16 „Académies" entsprechen; nur ist hier der Minister auch gleichzeitig „Recteur" des bedeutendsten dieser Verwaltungsbezirke, der Académie de Paris.

Bei den Provinzial-Schulkollegien gehen die Entscheidungen und Beschlüsse im Gegensatz zu dem Verfahren im Ministerium vom gesamten Kollegium aus.

Die Provinzial-Schulkollegien lernen die Schulen ihres Bezirkes außer bei kürzeren Besuchen zunächst anläßlich der Reifeprüfungen bei den Vollanstalten, der Abschlußprüfungen bei den Nichtvollanstalten kennen; nicht selten wird der Direktor der Anstalt selbst zum Königl. Kommissar (vgl. Abschnitt 11) ernannt. Jedem Mitgliede des Kollegiums ist dabei eine bestimmte Anzahl von Schulen ein für allemal zugewiesen. – Außerdem finden alle drei bis vier Jahre längere (drei- bis viertägige) Revisionen statt.

Im übrigen unterliegen die verschiedenen Dinge, wie Unterrichtsverteilung, Auswahl des Lesestoffes in den Sprachen, Neueinführung eines Lehrbuches usf. der Genehmigung des Provinzial-Schulkollegiums. Dieses ernennt auch bei königlichen, bestätigt bei städtischen Anstalten die Lehrer. Der Direktor einer Anstalt wird vom Könige an königlichen Anstalten ernannt, an städtischen bestätigt.

Bei den nichtstaatlichen, dann meist städtischen höheren Schulen (private oder klerikale kommen für Preußen fast gar nicht in Betracht) kommt der Einfluß der zum Unterhalt verpflichteten Instanzen durch verschiedene Organe zum Ausdruck. Im Westen haben die einzelnen Schulen meist Kuratorien, im Osten übt der Magistrat in der Regel unmittelbar sein Patronatsrecht aus; in größeren Städten kommt schließlich häufig noch als technischer Beirat ein städtischer Schulrat hinzu. Die Kuratorien bzw. Magistrate üben außer dem Recht der Etatsfestsetzung (der Etat selbst ist dann vom Stadtverordneten-Kollegium zu genehmigen) die Wahl der Direktoren und Lehrer.

Die Verwaltung der Schule im einzelnen ist Sache des Direktors. Er ist also Verwaltungsbeamter. Aber nicht das allein, er ist auch Lehrer wie jeder andere Lehrer der Anstalt und als solcher zu einer bestimmten Stundenzahl verpflichtet. „Weit bedeutungsvoller und größer ist des Direktors Aufgabe der Einwirkung auf Unterricht und Erziehung."

Über den Verkehr der Direktoren mit ihren Lehrern sind allgemeine Vorschriften zurzeit nicht vorhanden, stehen aber für die allernächste Zeit in Aussicht. Zwar gibt es in allen Provinzen voneinander etwas abweichende „Dienstinstruktionen", nach denen, wie es in den Diskussionen über diese Dinge häufig heißt, der Direktor mehr oder minder „omnipotent", die „Lehrperson" fast rechtlos ist.[1]) Diese meist recht alten Verfügungen stehen aber vielfach nur auf dem Papier; das Verhältnis zwischen Direktor und Lehrerschaft ist eben durchaus durch die Persönlichkeit der Beteiligten, nicht durch amtliche Vorschriften bedingt.

1) Instruktionen für die Lehrer und Ordinarien an den höheren Lehranstalten in Preußen. Halle a. S. (Waisenhaus) 1909.

Die Beratungen des Lehrerkollegiums finden unter dem Vorsitz des Direktors in den Konferenzen statt. Gegenstand der Verhandlungen sind Zeugnisse, Versetzungen, Erörterungen pädagogischer Fragen, Disziplinarfälle u. dergl. Einzelne Fächer angehende Fragen, wie etwa die Ausarbeitung eines genauen Lehrplanes, die Wahl eines neuen Lehrbuches usf. werden meist in sog. Fachkonferenzen behandelt, an denen nur die Vertreter der in Frage kommenden Fächer teilnehmen.

In allen preußischen Provinzen außer Brandenburg (bis vor kurzem auch Hessen-Nassau) treten alle vier Jahre die Direktoren der sämtlichen höheren Knabenschulen zu Direktoren-Versammlungen zusammen, an denen auch die Mitglieder der Provinzial-Schulkollegien und Räte aus dem Ministerium teilnehmen.[1]) Einige Zeit vor der Tagung wird eine Anzahl Themata vorgeschlagen, von denen zwei zur schriftlichen Berichterstattung, einige weitere zur mündlichen Besprechung ausgewählt werden. Für die schriftliche Berichterstattung werden je etwa zehn Anstalten ausgewählt, die nach Besprechung in Konferenzen ein Referat einsenden. Diese Referate bilden dann die Grundlage für einen Bericht auf der Direktorenkonferenz, für den ein Berichterstatter und ein Mitberichterstatter bestimmt wird. Diese, wie die nur für mündliche Besprechung ausgewählten Berichte werden in ihren Resultaten in Leitsätze gefaßt, über die dann die gesamte Direktorenkonferenz diskutiert und schließlich abstimmt.

Es ist vielleicht angebracht, einige in dieser Weise behandelte mathematische Themen der letzten Jahre zu nennen[2]):

Die 7. Rheinische Direktoren-Versammlung (1899) nahm einen Bericht von Schwering und Quossek entgegen über die Frage: Welche zur Verbesserung der mathematischen Lehrweise in neuerer Zeit gemachten Vorschläge verdienen im Unterricht an den höheren Schulen verwertet zu werden?

Die 9. Direktoren-Versammlung in Schleswig-Holstein (1907) beriet die Frage: Wie ist der mathematische Unterricht sowohl seinem Inhalte als auch der Form seiner Darbietung nach zu gestalten, um ihn insbesondere mit Benutzung elementarer Anschauungen aus der Differential- und Integralrechnung mehr als bisher den Zwecken der Allgemeinbildung dienstbar zu machen? (Leitsätze von Baer.)

---

1) Die Direktoren-Versammlungen haben durchaus amtlichen Charakter. — In außerdeutschen Ländern kann man ihnen the Headmaster's Conferences zur Seite stellen, die seit 1870 in England ständige Einrichtung sind.

2) Die Berichte und Verhandlungen der Direktoren-Konferenzen erscheinen im Buchhandel (bei Weidmann, Berlin). Eine Zusammenstellung über ältere Direktoren-Konferenzen gibt W. Erler, Die Direktoren-Konferenzen des preußischen Staates. Berlin (Wiegandt und Grieben) 1876. Neueren Datums ist M. Killmann, Die Direktoren-Versammlungen des Königreichs Preußen von 1890 bis 1900. Berlin (Weidmann) 1900.

Die 26. Direktoren-Versammlung in Westfalen (1907) behandelte das Thema: Über die Reformbestrebungen[1]) auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts mit besonderer Berücksichtigung der Vorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte.

Für die Oberlehrer bestehen ähnliche amtlich festgesetzte Provinzial-Konferenzen nicht. An ihre Stelle treten die Tagungen der einzelnen Provinzial-Philologen-Vereine[2]), die in einzelnen Provinzen beträchtliche Bedeutung haben. So nehmen beispielsweise an den jährlichen Sitzungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Gruppe des rheinischen Philologentages 100—200 und mehr Fachmänner teil. — Diesen Veranstaltungen treten zur Seite die allgemeinen Oberlehrer-Versammlungen, z. B. die sog. Oberlehrertage (alle zwei Jahre mit wechselndem Tagungsort, zuletzt 1908 in Braunschweig und 1910 in Magdeburg) und die Versammlungen deutscher Philologen und Schulmänner (alle zwei Jahre, zuletzt, 1909, in Graz). Auch bei den Tagungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (alljährlich, zuletzt, 1909, in Salzburg) sind viele Oberlehrer, zumal in der Sektion für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht anwesend, und ähnliches gilt von den Geographentagen, den Versammlungen der Neuphilologen usw.

Lediglich dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht sind die Bestrebungen des über ganz Deutschland verbreiteten „Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts" gewidmet. Der Verein hält jährlich eine Versammlung ab (1909 in Freiburg i. Br., 1910 in Posen) und gibt eine eigene Zeitschrift heraus, die Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften (1910 im 16. Jahrgange; Herausgeber bis 1909 F. Pietzker, jetzt A. Thaer. (Jährlich 6 Hefte.) Verlag: O. Salle, Berlin.)

6. Der mathematische Schulapparat.

Nachdem wir die äußere Organisation der höheren Schulen Preußens in ihren Grundlinien dargestellt haben, wenden wir uns einigen Fragen

1) Um etwaigen Mißverständnissen zu begegnen, sei bemerkt, daß das, was hier und später als Reform im mathematischen Unterricht bezeichnet wird, ganz und gar nichts mit der Reform in der Organisation der Schulen, die zu den „Reformschulen" geführt hat, zu tun hat.

2) Der Name Philologe umfaßte früher nur die Alt- und Neusprachler. In den letzten Jahren hat sich darin ein Wandel vollzogen; Philologe ist jetzt gleichbedeutend mit akademisch gebildetem Oberlehrer, und so hat die Mehrzahl der Standesvereine das Wort Philologie in seinen Namen aufgenommen. Letzter Grund für diese Namenswahl war die Absicht, eine deutliche Scheidung von den Nichtakademikern auch äußerlich zu markieren. Die Frage wurde brennend, als die Zahl der Nichtakademiker, die die Bezeichnung Oberlehrer als Titel erhielten, immer mehr wuchs.

des inneren Schulbetriebes zu, wobei wir uns jedoch von vornherein von der Rücksicht auf den mathematischen Unterricht werden leiten lassen.

Wir wollen in Gedanken eine höhere Schule aufsuchen und uns zunächst ein Klassenzimmer ansehen. Zunächst fallen uns da die Bänke für die Schüler, das „Katheder" für den Lehrer in die Augen. Young hat in seinem schon zitierten Buche über den mathematischen Unterricht die unpraktische Einrichtung der Bänke getadelt:

The seating arrangements are not good, usually consisting of deskbenches holding from four to six pupils. When called to the board the older pupils pass before the others of the same row, while in the lower classes the boys often run along back of the others on the benches on which they are seated.

Noch heute ist in einigen Anstalten der Zustand, so wie er hier geschildert wird, immer größer aber wird die Zahl der Klassenzimmer, die mit praktischen zweisitzigen Bänken ausgestattet sind (beliebt ist besonders ein System Rettig), wobei jene Mängel fortfallen. – Den Bänken gegenüber steht das Katheder, der Sitz des Lehrers.

Oft hinter, besser zur Seite des Katheders hängt die Tafel (schwarz, meist aus Holz oder Schiefer). Man ist in Preußen im allgemeinen etwas sparsam mit der Anbringung von Tafeln. Jedenfalls habe ich die Anordnung, wie sie in Amerika gang und gäbe und übrigens auch durch die sog. *text–book*-Methode bedingt ist, daß nämlich die Wände ringsum in Schreibhöhe mit Tafeln bedeckt sind, nur einmal in einem Zeichensaal, der auch für das Linearzeichnen bestimmt war, angetroffen. Noch immer kann vielmehr als Norm eine einzige Tafel (1 bis 2 m lang, 1 m oder weniger hoch) angesehen werden. Neuere Schulen und besonders Realanstalten weisen aber einen Fortschritt auf. Man findet neben den fest an der Wand angebrachten Tafeln noch solche, die man nach Belieben aufstellen kann, oder aber es sind mehrere Tafeln angebracht. Noch besser sind Tafelgestelle mit zwei von oben nach unten verschiebbaren Tafeln (Seitenriß: Fig. 1). Als die besten Einrichtungen, die ich nur an wenigen Schulen gesehen habe, möchte ich schließlich noch zwei Anordnungen namhaft machen. Die erste besteht aus einer großen, eine ganze Wand einnehmenden Tafel, vor der eine oder mehrere Tafeln von rechts nach links verschiebbar angebracht sind (Grundriß: Fig. 2). Ganz anderer Art ist das zweite System (Seitenriß: Fig. 3): Schwarzes, dauerhaftes und recht biegsames Linoleum ist ohne Ende beweglich zwischen zwei Rollen angebracht.

Fig. 1.

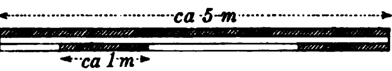


Fig. 2.

Fig. 3.

Mit Rücksicht auf die graphischen Darstellungen ist es neuerdings immer mehr Gewohnheit geworden, mindestens in jedem Klassenzimmer von Tertia oder Sekunda an eine Tafel mit einem Quadratnetz (Seitenlänge der kleinen Quadrate etwa 5 cm) zur Verwendung bereit zu halten.

Geschrieben und gezeichnet wird meist mit weißer Kreide; doch gerade im mathematischen Unterricht ist der Gebrauch bunter Kreide schon recht verbreitet.

Für das Zeichnen an der Tafel stehen in der Regel Lineal oder Reißschiene, Zirkel, oft auch Winkelmesser und einige Dreiecke zur Verfügung. Manche Lehrer zeichnen stets gerade Linien mit freier Hand, oft auch die Kreise. In seltenen Fällen (vgl. Abschnitt 9) wird der Zirkel durch eine Schnur ersetzt, die an einem Ende festgehalten wird, während man an das andere Ende die Kreide hält.

Es darf fast als Regel gelten, daß bei Lehrsätzen, Konstruktionen usw., welche die ganze Klasse beschäftigen, eine Zeichnung an der Tafel entworfen wird, ob stets vom Lehrer oder stets vom Schüler oder je nach der Sachlage das eine oder das andere, ist bei den einzelnen Lehrern verschieden. Daneben werden zuweilen gleichzeitig Zeichnungen oder auch nur Skizzen von den Schülern in ihren Heften entworfen. Nur ganz selten wird die Arbeit an der Tafel fortfallen. Die früher viel geübte Verwendung der Figuren im Lehrbuche während des Unterrichtes wird heute kaum noch irgendwo zu finden sein.

Übrigens sei hier eingeschaltet, daß bei der Wiederholung eines Lehrsatzes, bei der Lösung einfacher Konstruktionsaufgaben, in manchen Fällen, wenn auch immerhin selten, „Kopfgeometrie“, wie Milinowski es genannt hat, getrieben wird; die Schüler arbeiten dann ohne Zuhilfenahme einer Figur.[1]) Schon früher hat man dieser „Kopfgeometrie“ das Wort geredet (insbesondere Diesterweg) und ist für ihre Verwendung im weitesten Umfange eingetreten. J. B. Friederich[2]) in Ansbach (1852) berichtet, daß er „bei der Wiederholung eines Abschnittes der Geometrie keine Zeichnung an der Tafel oder im Hefte“ zulasse, vielmehr verlange, „daß das Bild ohne äußeres Mittel klar vor Augen stehe“. Auf der anderen Seite hat man sich lebhaft gegen die Kopfgeometrie überhaupt oder doch gegen ihre Verwendung bei jüngeren Schülern ausgesprochen. „Als Archimedes der Roheit eines römischen Soldaten zum Opfer fiel, trieb er, Figuren im Sande zeichnend, Geometrie, und keine Kopfgeometrie“ argumentiert Schwering.[3])

1) In den Lehrplänen der einzelnen Anstalten begegnet man der Kopfgeometrie sehr selten, obwohl doch das Kopfrechnen in allen eine große Rolle spielt. Als ein Beispiel sei der Lehrplan des Gymnasium Augustum der Stadt Görlitz angeführt, wo für Quarta und Untertertia Übungen in Kopfgeometrie vorgeschrieben sind.

2) J. B. Friederich, Einige Bemerkungen über den Unterricht in der Mathematik an Gymnasien. Programm Königl. Gymnasium Ansbach, Ostern 1852.

3) R. Schwering, Aufgabe und Anschauung, besonders in der Stereometrie. Programm Königl. Gymnasium in Coesfeld, Ostern 1889.

Offenbar ist die Fähigkeit eines Schülers zur „Kopfgeometrie“ nicht so sehr durch seine allgemein-mathematische Fähigkeit als dadurch bedingt, ob er ein visuelles oder akustisches Gedächtnis hat.[1])

Mit Tafeln und Zeichenutensilien wäre der übliche mathematische Apparat im Klassenzimmer erschöpft. Manchmal findet der Mathematiker freilich noch mehr. – Es gibt eine Oberrealschule, bei der alle Wandornamente unter Zugrundelegung des Meters und Dezimeters ausgeführt sind. Das Ganze wirkt durchaus nicht eintönig, fällt auch zunächst gar nicht ins Auge. Wer aber darauf aufmerksam gemacht ist, kann sich nach Belieben Strecken von ein, zwei, drei, im Korridor auch mehr Metern zur Anschauung bringen. Man hat außerdem noch an der Turnhalle eine horizontale Strecke von 10 m, mit Zwischenteilung, und am Schulgebäude eine ebensolange vertikale Strecke angezeigt.

In anderen Schulen sind in jedem Klassenzimmer seine Dimensionen angegeben: Länge, Breite, Höhe, Bodenfläche, Kubikinhalt.[2]) Zumal die letztere Angabe ist sehr nützlich, im allgemeinen fehlt hier die Anschauung sehr. Übrigens kann man noch ergänzend, etwa in der Sexta, zeigen, wie groß so ein Kubikmeter ist; man benutzt ein entsprechendes Drahtgestell oder noch besser man stellt es sich aus zwölf Meterstäben, die in acht würfelförmige Klötze fest eingesteckt sind (Fig. 4) vor den Augen des Schülers her. Dann steckt man eine Anzahl der kleinen Kerle in diesen Kubikmeter hinein. Die Köpfe ragen ja allerdings aus dem Gestell heraus, würden aber bei besserer Raumausnützung auch noch bequem hinein gehen. Wieviel Sextaner kann man so in einem Kubikmeter unterbringen?

Fig. 4.

Eine Folge der zunehmenden Berücksichtigung von graphischen Darstellungen schon in mittleren Klassen ist es, wenn man jetzt vielfach an den Wänden der Klassenzimmer Kurvendarstellungen findet. Hier sieht man eine überlebensgroße Sinus- und Cosinuskurve, dort, nach oben zehnfach verzerrt, die logarithmische Kurve und darunter das große Modell eines Rechenschiebers[3]), dort wieder die kubi-

1) Ich hatte einen von Geburt an blinden Schüler, der als bester Mathematiker seiner Klasse das gesamte Pensum von Obersekunda bis Prima, also auch die Sätze vom Pascalschen Sechseck, das Apollonische Berührungsproblem, die darstellende Geometrie usw. ohne Schwierigkeit bewältigt hat und zurzeit auch Mathematik studiert.

2) Wie mir mitgeteilt wird, sollen nach einem kürzlich gefaßten Beschluß der Schuldeputation in Berlin an der Wand aller Gemeindeschulklassen die Dimensionen des Zimmers, ferner ein Quadratmeter mit Einteilung in Quadratdezimeter angegeben sein; außerdem soll an der Decke – wie man das übrigens in sehr vielen Schulen findet – die genau eingestellte Windrose zu finden sein.

3) Einige gute Rechenschieber zum praktischen Gebrauch für die Schüler – z. B. bei physikalischen Schülerübungen – finden sich wohl in vielen Modellsammlungen. Einfache, billige Modelle, deren Anschaffung man von jedem Schüler for-

sche Parabel $y = x^3$ usf. In jener Obertertia ist ein graphischer Fahrplan — man kann sich leicht für einige Zeit die nicht mehr benutzten Originale der Strecken, an denen der Schulort liegt, verschaffen — an die Wand geheftet, in dieser Prima hängt eine Sterblichkeitstabelle, weil das eingeführte Lehrbuch versagt.[1])

Sehen wir den Lehrer im Klassenzimmer die Vorbereitung zu seinem Unterricht treffen, so werden wir dabei Gelegenheit finden, eine große Reihe von Modellen kennen zu lernen. Young meint zwar: *Mathematical models do not appear to be in much favour,* aber offenbar hat sich in letzter Zeit vieles gebessert.

Leider gibt es zurzeit noch keine Sammelstätte für mathematische Modelle und Apparate. Zwar hat man für Volks- und Mittelschulen eine Reihe von Lehrmittelmuseen, die auch die Mathematik berücksichtigen, und auf den Hochschulen haben viele mathematische Seminare umfangreiche Modellsammlungen, aber für die höheren Schulen fehlen derartige Institute, die sich doch in anderen Ländern finden, noch ganz und gar. Wenn die Bestrebungen, eine Zentralanstalt für den naturwissenschaftlichen Unterricht zu gründen[2]), Erfolg haben sollten, so müßte diese Anstalt auch eine Sammelstelle für mathematische Modelle umfassen.

Wollen wir einen Überblick über das in einer Schule Vorhandene erhalten, so bemühen wir uns am besten zu dem Modellschrank, der oft im physikalischen Kabinett untergebracht ist — Mathematik und Physik stehen fast immer in Personalunion —, an einzelnen Schulen mit umfangreichen Sammlungen ist auch ein besonderes Zimmer vorhanden.

Übrigens sind in manchen Schulen in den Klassenzimmern oder auf den Fluren Anschauungskästen angebracht, in denen Dinge, die im Unterricht zur Sprache gekommen sind (Gesteinsproben, Tierpräparate, Bilder) aufgestellt werden, und da fehlen dann auch nicht z. B. Modelle von Kegeln, Zylindern usw., wenn der mathematische Unterricht gerade bei der Stereometrie ist.

---

dern kann, sind mehrfach in Handel gebracht und in den Händen der Schüler (z. B. von Gebr. Wichmann, Berlin, solche für 0,75 Mk. und einfachere für 0,10 Mk.).

1) Zuweilen wird man auch umfangreichere Konstruktionen (z. B. in einer OIII die Konstruktion der gemeinsamen Tangente zweier Kreise, oder in einer OII die Apollonische Berührungsaufgabe) in größerem Maßstabe ausgeführt einige Tage im Klassenzimmer aufhängen. Vielfach haben Schüler solche Zeichnungen hergestellt; es sind aber auch im Handel einzelne Tafeln erhältlich; ich nenne nur die „Mathematischen Wandtafeln", gezeichnet von A. Schulte-Tigges, zwei Tafeln, die in zwei Farben Ellipse, Parabel und Hyperbel als Zentralprojektion des Kreises darstellen.

Recht empfehlenswert erscheint auch das Verfahren, Kurven in Ölfarbe auf Schieferpappe zu zeichnen, und diese Tafeln dann zum Zeichnen von Tangenten u. dergl. zu verwenden.

2) Vgl. F. Poske, Über die Notwendigkeit der Errichtung einer Zentralanstalt für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Heft 5. Leipzig (Teubner 1910).

In manchen Fällen wird man auch den Projektionsapparat, den wohl alle Schulen in ihrem Physikzimmer besitzen, mit Erfolg benutzen; nicht bloß bei ebenen Darstellungen räumlicher Gebilde, sondern auch z. B. um gute Zeichnungen (etwa von Schmiegungsparabeln u. dgl.) vorzuzeigen.[1] Bei lichtstarken Apparaten kann man an Stelle der Diapositive einfache Zeichnungen auf sog. Pergamentpapier oder noch besser auf Gelatineplatten benutzen.

Was wir an Modellen in der Sammlung finden, dient zu einem Teile dem propädeutischen Unterricht[2], dem planimetrischen wie dem stereometrischen. Eine zweite große Gruppe ist für den Unterricht der darstellenden Geometrie und des Linearzeichnens bestimmt. Wir finden da zunächst Klapptafeln der verschiedensten Art, die das Zeichnen von Figuren in Grund-, Auf- und Seitenriß gestatten, allerlei Körper, Maschinenteile u. dgl.; ich gehe darauf nicht ein, weil ein besonderer Bericht in diesen Abhandlungen sich mit dem Linearzeichnen beschäftigen wird.[3]

Auch der planimetrische und arithmetische Unterricht wird in ausgedehntem Maße durch Modelle unterstützt, und ähnlich der physica pauperum spielen hier selbstgefertigte Modelle einfachster Art eine wichtige Rolle. Nur eines will ich herausgreifen.

Bei allen Anstalten, die auf die Reform des mathematischen Unterrichtes eingehen, spielt die graphische Lösung der Gleichung zweiten Grades eine Rolle. Man hat nun in einzelnen Schulen eine zu der Quadrateinteilung der Wandtafel passende Parabel $y = x^2$ im Modell hergestellt und kann damit die verschiedensten Aufgaben mechanisch lösen. Liegt z. B. die Gleichung

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 3$$

vor, so stellen sich die Wurzeln graphisch als Schnitt der Parabel

$$y = x^2$$

mit der Geraden
$$y + \frac{3}{2}x = 3$$

oder
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

1) Lichtbildervorträge für alle Fächer, nur nicht für die „prosaische" Mathematik, fordert W. Scheel, Das Lichtbild und seine Verwendung im Rahmen des regelmäßigen Unterrichts. Leipzig (Quelle & Meyer) 1908. Dagegen spricht sich aus H. Morsch, Das Lichtbild im Dienste des Unterrichts an höheren Lehranstalten. Neue Jahrbücher für Pädagogik 11 (1908), S. 541 ff.

2) Man vgl. dazu R. Liewald, Die Anschaulichkeit im geometrischen Anfangsunterricht. Leipzig (Teubner) 1909; auch in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 40 (1909), S. 385 ff. P. Treutlein wird als Unterstufe der bekannten Modellsammlung von H. Wiener im Verlage von Teubner (Leipzig) nächstens eine Reihe von Modellen herausgeben, die z. T. für den Rechenunterricht, z. T. für den geometrischen Unterricht bestimmt sind.

3) P. Zühlke, Das Linearzeichnen an den deutschen Realanstalten. Die Abhandlung wird in dieser Sammlung erscheinen.

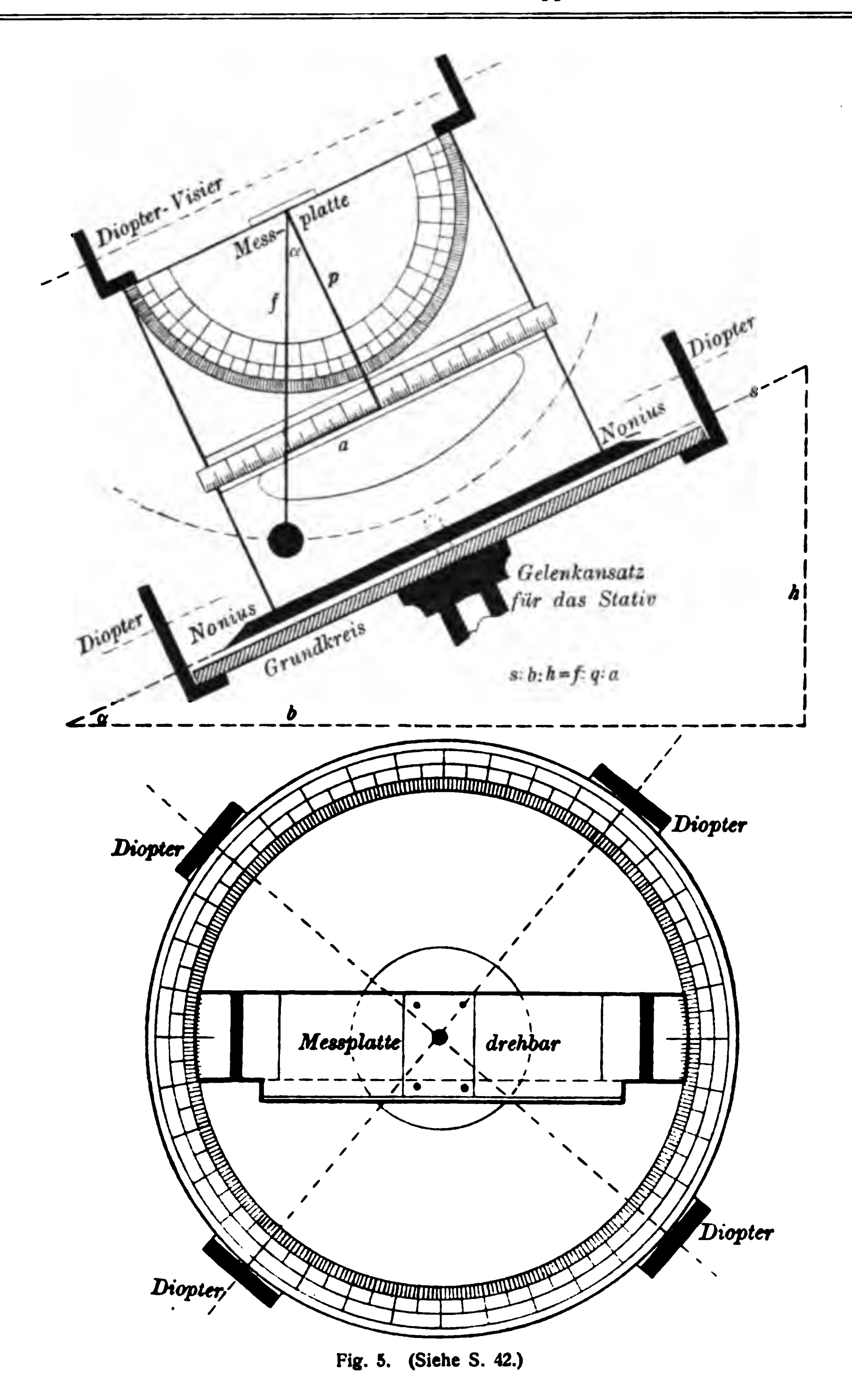


Fig. 5. (Siehe S. 42.)

dar. Man zeichnet diese Gerade und sieht zu, wo sie in die darüber gelegte Parabelfläche eintritt bzw. aus ihr austritt.

Umgekehrt kann man die Frage beantworten: Wie sieht das graphische Bild der Funktion aus, deren Nullsetzung auf eine Gleichung mit den Wurzeln — 1 und 3 führt; oder man kann zeigen, welche verschiedenen Fälle hinsichtlich der Reellität der Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades möglich sind. Die Schüler können in gleicher Weise in ihrem „Graphischen Heft" mit einer ausgeschnittenen oder auf Pauspapier gezeichneten Parabel arbeiten. G. Noodt hat neuerdings seinem Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra[1]) eine Parabel aus Aluminiumblech beigegeben.

Große Sorgfalt wird zumal bei den Realanstalten auf die Ausgestaltung der Sammlung von geodätischen Instrumenten gelegt. Immer mehr werden die ebene und sphärische Trigonometrie auch wirklich zur Lösung praktischer Aufgaben verwandt. Man hat wohl geradezu Kurse für die Mathematiklehrer unter Leitung eines Praktikers eingerichtet, um die nötigen Kenntnisse und Handgriffe zu lehren.[2]) Denn die Zahl der Mathematiklehrer, die diese Dinge von ihrem Studium her kennen, ist recht gering. Auch heute noch benutzen nur wenige die Gelegenheit, auf der Universität angewandte Mathematik zu treiben.

Ein Instrument, das kaum an einer realen, selten an einer gymnasialen Anstalt fehlt, ist der Theodolit. Daneben sind einfachere Formen in Gebrauch, z. B. der Kreuschmersche Winkelmeßapparat[3]) (Fig. 5), bei dem an Stelle des Fernrohrs ein einfaches Diopter getreten ist. Feldwinkelmesser, z. B. der nur mit Diopter versehene von Ohmann (Fig. 6), gestatten nur die Messung von Winkeln in der Horizontalebene. Als Nebenapparate sind dann noch vorhanden: Baken (Fluchtstäbe), Meßlatten, Meßbänder, Winkelspiegel und eventuell Winkelprisma, Winkeltrommel, dann Röhren- und Dosenlibellen, Senkel u. dgl.

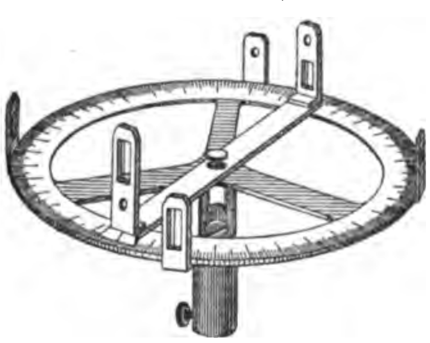


Fig. 6.

Für die sphärische Trigonometrie kommt als praktisches Anwendungsgebiet hauptsächlich die Astronomie in Betracht. Hier ist nun zwar nicht so vollständig gesorgt wie für die Geodäsie. Es gibt aber eine Anzahl von Schulen, die manchmal ganz respektable Fernrohre, dazu eine Beobachtungskuppel oder doch eine geeignete Plattform be-

1) G. Noodt, Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra. 2. Auflage. Bielefeld (Velhagen & Klasing) 1910.

2) A. Schwarz, Der geodätische Kursus der Oberrealschule an der Waitzstraße zu Kiel im Sommerhalbjahr 1906. Progr.-Abhandl. Oberrealschule an der Waitzstraße, Kiel. Ostern 1907.

3) R. Kreuschmer, Der Universal-Winkelmeßapparat im Dienste der Schule und der Praxis. Breslau (Hirt) 1903.

sitzen. Zu wirklichen Messungen brauchbare Universale dürften aber recht selten sein.[1])

Alle diese Apparate für geodätische, gegebenenfalls auch astronomische Messungen sind natürlich nicht, das kann vielleicht noch einmal besonders hervorgehoben werden, nur zum Ansehen oder zum Vorzeigen in der Schule da, sie werden draußen im Freien, auf dem Schulhofe und im Gelände auch wirklich gebraucht.

Schon beim propädeutischen und planimetrischen Unterricht verlegt man — wenigstens an vielen Anstalten, bei großen Klassen stellen sich pädagogische Schwierigkeiten ein — eine oder die andere Stunde auf den Schulhof oder macht gelegentlich einen mathematischen Klassenausflug.[2]) Auf der Unterstufe tut man besser, nicht die immerhin nicht ganz einfachen Feldmeßapparate zu benutzen, sondern versucht mit einfacheren Mitteln auszukommen. Erhebungswinkel läßt man z. B. am einfachsten durch Anvisieren längs eines Papiertransporteurs, wie er im Gebrauch der Schüler ist, bestimmen, wobei man in dessen Mitte mit ein wenig Wachs ein kleines Senkel anklebt. Horizontale Winkel mißt man etwa mit Hilfe eines Papier-Transporteurs, den man beweglich der horizontalen (Papp-)Platte eines (photographischen) Stativs auflegt. Zum Festlegen der Visierrichtung genügen Stecknadeln. Eine der schnurrigen Aufgaben des alten Schäffer in Jena war die, mit Hilfe eines Strohhutes die Breite eines Flusses zu bestimmen: Man stellt sich an den Rand des Flusses und rückt den Hut soweit ins Gesicht, daß Hutrand und jenseitiges Ufer sich decken. Dann macht man rechtsum, merkt sich die — eben vorausgesetzte — Uferstrecke, die man gerade noch hat sehen können und schreitet sie ab. Gibt es wohl eine amüsantere Anwendung des zweiten Kongruenzsatzes?

Bieten sich später (in Unter- oder Obersekunda), wenn die ebene Trigonometrie durchgenommen wird, in ausgedehnterem Maße Gelegenheiten zu praktischem Messen, so wird man nicht mehr säumen,

---

1) Ich verweise auf: B. Hoffmann, Zur Gestaltung des Unterrichts in der mathematischen Himmelskunde. Kgl. Gymnasium Bromberg. Ostern 1907. Vgl. auch einen Ferienkursus an der Universität Göttingen: R. Schwarzschild, Astronomische Beobachtungen mit elementaren Hilfsmitteln. In: F. Klein und R. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Leipzig (Teubner) 1904.

2) Auf dem 4. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom hat F. S. Archenhold „Über die Bedeutung des mathematischen Unterrichtes im Freien in Verbindung mit Reformvorschlägen für den Lehrgang (Atti del IV Congresso internationale dei Mathematici Roma.6—11 Aprile 1909; Roma, Accad. dei Lincei 1909, Vol. III, S. 510ff.) gesprochen. Um Mißverständnissen bei nichtdeutschen Lehrern vorzubeugen, wie sie z. B. den Berichten der Commissione reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia 1. Bd. Roma (Cecchini) 1909 untergelaufen zu sein scheinen, sei ausdrücklich festgestellt, daß hier Vorschläge gemacht werden, die, soweit sie richtig sind, bereits seit vielen Jahren in ausgedehntem Maße in die Praxis umgesetzt sind.

die Schüler mit den im praktischen Gebrauch befindlichen Apparaten bekannt zu machen.

Bei Messungen auf dieser Stufe sind Genauigkeitsbetrachtungen von großer Wichtigkeit. Man hat z. B. für eine Triangulation eine Basis von 200 m abgemessen und bei der wiederholten Messung einen um 8 cm verschiedenen Wert erhalten. Nun findet man, daß die Basis nicht ganz horizontal ist, daß vielmehr das eine Ende 20 cm tiefer liegt als das andere. Eine einfache Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes — die Rechnung geht sehr schnell mit der binomischen Reihe — oder der trigonometrischen Funktionen lehrt dann die Schüler, daß der damit begangene Fehler in der Längenbestimmung kleiner als der Fehler bei der Ausmessung der Basis ist.

Wenn wir von dem mathematischen Apparat der Schulen sprechen, so können wir nicht an der Frage vorübergehen, wie es mit der Mathematik in den Bibliotheken bestellt ist. Das deutsche Bibliothekswesen ist nicht so entwickelt, wie beispielsweise das englische und das amerikanische; insbesondere fehlt es an der Rücksichtnahme der öffentlichen Bibliotheken auf die heranwachsende Jugend, einige vereinzelte Fälle ausgenommen. In den Vereinigten Staaten greift der „*use of the library*“ ergänzend in den Unterricht sogar der Volksschulen ein: die Schüler werden zur planmäßigen Benutzung der öffentlichen Bibliotheken geradezu angeleitet und immer wieder darauf hingewiesen. Bei uns können die öffentlichen Bibliotheken das nicht leisten, daher besitzt jede Schule ihre eigene Lehrer- und ihre eigene Schülerbibliothek.

Was zunächst die Lehrerbibliotheken anlangt, so muß man wohl sagen, daß es zumal an den Gymnasien meist recht schlecht mit der Mathematik bestellt ist; philologische Werke überwiegen bei weitem. Das kommt daher, daß der Bibliothekar fast immer, meist auch der Direktor, dessen Votum bei Anschaffungen oft allein entscheidet, ein Philologe oder Germanist ist; bei allen älteren Schulen hat wohl auch die früher geltende Anschauung „mathematicus non est collega“ seinerzeit ihre Wirkung gehabt. Von mathematischen Werken findet man in der Regel einen Haufen der verschiedensten Schulbücher, dann oft Cantors Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. Manchmal ist auch ein Spezialgebiet der höheren Mathematik überraschend gut vertreten, Ursache dessen sind dann meistens Schenkungen. Besser steht es mit den Neuanschaffungen in den letzten Jahrzehnten und also überhaupt an den neueren Schulen, insbesondere den Oberrealschulen. Besser, aber noch immer nicht gut. Zwar ist die große Enzyklopädie der Mathematik, dank der Munifizenz des Ministeriums, recht verbreitet, zwar fehlen die zahlreichen wichtigen Lehr- und Handbücher über den Stoff und die Methode des elementarmathematischen Unterrichts sehr selten, aber in anderen Dingen, z. B. Axiomatik, Philosophie der Mathematik usf., sind große Lücken.

Helfend tritt da der Bibliothekenleihverkehr ein. Alle Anstalten

haben die Möglichkeit, ohne Kosten Bücher aus den Königlichen Bibliotheken, in erster Linie der ihnen nächstgelegenen Universitätsbibliothek, zu entleihen. In einigen wenigen Fällen, z. B. in Frankfurt a. M., Hamburg usw. werden auch die städtischen Bibliotheken geeignetes Material in größerem Umfange enthalten.

Von der allergrößten Wichtigkeit sind die mathematischen Schulzeitschriften. Am verbreitetsten dürfte die von J. C. V. Hoffmann gegründete, jetzt von H. Schotten herausgegebene, bereits im 41. Jahrgang stehende

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht sein (Leipzig bei Teubner; erscheint monatlich). Die bisher von Pietzker, jetzt von Thaer herausgegebenen

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft sind seltener in den Bibliotheken zu finden, sind dagegen im Besitz der meisten Mathematiklehrer (vgl. Abschnitt 5). Zuweilen findet man auch das

Archiv der Mathematik und Physik, jetzt herausgegeben von E. Lampe, W. F. Meyer und E. Jahnke (zurzeit III. Reihe, Bd. 16; jährlich etwa 6 Hefte; 4 Hefte bilden einen Band; Leipzig bei Teubner), obwohl in den Abhandlungen pädagogische Fragen hier gar nicht zur Sprache kommen. Dafür ist das Archiv allerdings für die wissenschaftliche Weiterbildung der Lehrer besonders geeignet und berücksichtigt außerdem in seinen guten Rezensionen vollständig die mathematisch-physikalische Schulliteratur. Ähnliches läßt sich sagen vom

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, in Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer; im 19. Jahrgange; Leipzig bei Teubner. Einige höhere Schulen beziehen den Jahresbericht, der in früheren Jahren auch pädagogische Fragen viel behandelt hat, als Mitglieder der deutschen Mathematiker-Vereinigung.[1]) Das

Enseignement mathématique, das Laisant und Fehr bei Gauthier-Villars in Paris herausgeben (alle zwei Monate ein Heft; jetzt im 12. Jahrgange; die Zeitschrift ist amtliches Organ der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission), habe ich in preußischen Schulen bedauerlicher Weise bisher nirgends gefunden.

Die Zeitschriften, eventuell nur die letzten Hefte, liegen meist zur Benutzung im Konferenzzimmer oder, wo die Bibliothek den Lehrern jederzeit zugänglich, im Bibliothekszimmer aus.

Es ist hier vielleicht der Ort, auch einige allgemein-pädagogische Zeitschriften für das höhere Schulwesen zu erwähnen, die alle mit

1) In seltenen Fällen sind auch andere rein wissenschaftliche Zeitschriften anzutreffen, z. B. Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik. Oft handelt es sich in solchen Fällen um Überweisungen des Ministeriums, das die betreffende Zeitschrift unterstützt.

mehr oder weniger Liebe auch die Mathematik berücksichtigen. Ich muß mich mit der Nennung einiger weniger in Norddeutschland besonders verbreiteter begnügen, ohne Vollständigkeit anzustreben:

Pädagogisches Archiv. Herausgeber: Ruska, im 52. Jahrgange; erscheint monatlich in Leipzig bei Quelle & Meyer.

Lehrproben und Lehrgänge. Herausgeber: Fries und Menge. Erscheint in vierteljährlichen Heften. Es erschienen bisher 101 Hefte. Halle a. S., Waisenhaus.

Neue Jahrbücher für das klassische Altertum, Geschichte und deutsche Literatur und für Pädagogik. Herausgeber: Ilberg und Gerth, im 13. Jahrgange, jährlich 10 Hefte; Leipzig bei Teubner.

Monatsschrift für höhere Schulen. Herausgeber: Matthias und Köpke, im 9. Jahrgang; erscheint monatlich in Berlin bei Weidmann.

Jahresberichte für das höhere Schulwesen. Herausgeber: C. Rethwisch. Erscheinen alljährlich und bringen, nach Fächern geordnet, einen sehr vollständigen Bericht über alle wichtigen Neuerscheinungen im Berichtsjahre. Die Mathematik bearbeitet gegenwärtig K. Weise. Zuletzt erschien der 23. Band für 1908.

Schließlich erwähne ich noch die verbreitetsten Zeitschriften aus den Nachbargebieten der Mathematik, die

Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Herausgeber: F. Poske, im 23. Jahrgange; jährlich 6 Hefte, Berlin bei J. Springer, und die

Monatshefte für den naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen. Herausgegeben von B. Landsberg und B. Schmid; jetzt im 3. Jahrgange; erscheinen monatlich in Leipzig bei Teubner. Die Zeitschrift ist die Nachfolgerin der bis 1907 in 6 Bänden vorliegenden, in gleicher Weise erschienenen Natur und Schule.

Wenden wir uns nun den Schülerbibliotheken zu, so muß leider festgestellt werden, daß hier auf mathematischem Gebiete so gut wie nichts zu finden ist. Ein vielbenutzter Musterkatalog für Schülerbibliotheken[1]) nennt kein einziges mathematisches Buch, und wenn man die Programme durchblättert, so findet man unter den Neuanschaffungen höchstens einmal etwas aus der „delektablen" Mathematik, nämlich die Bücher von Ahrens[2]) oder Schubert[3]). Es ist ja wahr, daß die

1) G. Ellendt, Katalog für die Schülerbibliotheken höherer Lehranstalten. 4. Auflage. Halle a. S. (Waisenhaus) 1905.

2) W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele. 2. Auflage. 2 Bde. Leipzig (Teubner) 1910; ders., Mathematische Spiele (Aus Natur und Geisteswelt). Ebenda 1907.

3) H. Schubert, Mathematische Mußestunden. Große Ausgabe: Band 1: 3 A. 1907; Band 2: 2. Aufl. 1900. Band 3: 2. Aufl. 1900 und Kleine Ausgabe. 2. Aufl. 1904. Leipzig (Göschen).

deutsche Literatur auf dem Gebiete der populären Mathematik nicht sehr reichhaltig ist[1]), immerhin ließe sich aber auch mit dem heute vorhandenen Bestande manches Wertvolle erreichen, manches wird auch wohl schon hier und da erreicht (vgl. dazu Abschnitt 10). Durch Einrichtung mathematisch-naturwissenschaftlicher Schülerbibliotheken, wie sie in verschiedener Form schon an einigen wenigen Anstalten bestehen, ließe sich hier Wandel schaffen.[2])

7. Die Austeilung des mathematischen Unterrichts.

Bei der Verteilung der Unterrichtszeit geht man in der Regel von der Woche aus. Wieviel Wochen kommen überhaupt im Jahre für den Unterricht in Betracht? Die Gesamtdauer der Ferien beträgt in Preußen, von kleinen Verschiedenheiten abgesehen, etwa 12 Wochen, so daß für die Schulzeit rund 40 Wochen übrig bleiben. Ferien schließen sich zunächst den kirchlichen Festen: Weihnachten, Ostern, Pfingsten, an. Daneben bestehen in der Rheinprovinz und Westfalen einmalige, etwa fünfwöchige sog. große Ferien (von den ersten Augusttagen an), in den anderen Provinzen hat man zunächst vier bis fünf Wochen dauernde Sommerferien, etwa von Anfang Juli an, und dann eine bis zwei Wochen währende Herbstferien in der ersten Hälfte des Oktober.[3])

Nach den Ferien richtet sich die Einteilung des Schuljahres. Dieses läuft in der Regel von Ostern zu Ostern und wird im Osten in Quartale (1. von Ostern bis zu den Sommerferien, 2. von den Sommer- bis zu den Herbstferien, 3. von diesen bis Weihnachten, 4. von Weihnachten bis Ostern), im Westen (genauer in der Rheinprovinz und Westfalen) in Tertiale eingeteilt (1. von Ostern bis zu den großen Ferien, 2. von diesen bis Weihnachten, 3. von Weihnachten bis Ostern).

Am Ende jedes Tertials oder Quartals (manchmal nur an drei von den vier Quartalsterminen) erhalten die Schüler Zeugnisse über Betragen, Fleiß und Aufmerksamkeit und über ihre Leistungen in den einzelnen Fächern, die den Eltern vorgelegt werden müssen. Verbreitet sind sog. Zwischenzensuren: Zwischen den üblichen Zeugnisterminen werden den Eltern nichtgenügender Schüler Nachrichten über mangelhafte Leistungen in einzelnen Fächern gegeben.

1) Es gibt in einigen Ländern mathematische Schülerzeitschriften, so in Frankreich das Journal de mathématiques élémentaires von H. Vuibert (1910 im 35. Jahrgange, erscheint in Paris bei Vuibert et Nony) und für Schüler niederer Klassen im gleichen Verlage L'Éducation mathématique, herausgegeben von Ch. Bioche und H. Vuibert (1910 im 14. Jahrgange); in Ungarn erscheinen: „Mathematische Blätter für Schüler höherer Schulen" in madjarischer Sprache. In Deutschland fehlen derartige Schülerzeitungen für die Mathematik ganz.

2) Vgl. W. Lietzmann, Über mathematisch-naturwissenschaftliche Schülerbibliotheken. Pädagogisches Archiv. 52 (1910).

3) Eine Zusammenstellung über die Ferien in den verschiedenen Staaten findet sich z. B. bei H. Morsch, l. c. S. 370ff.

Auf die Tage der einzelnen Woche werden die Schulstunden möglichst gleichmäßig verteilt.[1]) Es wird nicht wie in Frankreich ein Tag der Woche frei gehalten; das geschieht meines Wissens nur in Pforta (vgl. Abschnitt 4), wo dann aber – die Schule ist ein Internat – Arbeitsstunden an die Stelle der Schulstunden treten. Im allgemeinen gibt es solch ein *„study in school under supervision"*, wie es in Amerika und England Sitte, die wenigen früher (Abschnitt 4) erwähnten Oberklassen mit Studientagen ausgenommen, nur an ganz wenigen Anstalten mit Internaten.

An jedem Tage sind durchschnittlich fünf wissenschaftliche Stunden zu erteilen, dazu kommen dann noch die technischen Fächer (Turnen, Singen, Zeichnen) und die wahlfreien Fächer. Die Frage, ob man alle Nachmittage von wissenschaftlichen Stunden oder gar vom Unterrichte überhaupt freihalten soll, wird gegenwärtig noch viel erörtert; jedenfalls ist fast immer der Mittwoch- und Sonnabend-Nachmittag schulfrei, oder doch nur mit Turnspielen u. dgl. besetzt.

Die Verteilung der Fächer auf die einzelnen Stunden des Tages zeigt meist ein sehr buntes Bild. So sieht z. B. der Stundenplan einer Oberrealschulprima etwa so aus[2]):

Vormittag	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Sonnabend
1. Stunde	Geschichte	Chemie	Geschichte	Chemie	Geschichte	Mathem.
2. „	Englisch	Mathematik	Mathematik	Chemie	Franz.	Franz.
3. „	Französisch	Religion	Mathematik	Deutsch	Religion	Englisch
4. „	Deutsch	Englisch	Französisch	Mathematik	Englisch	Physik
5. „	Turnen	–	Physik	(Latein)	Erdkunde	Deutsch
Nachmitt.						
1. Stunde	–	Zeichnen	–	Turnen	–	–
2. „	–	Zeichnen	–	Turnen	Physik	–
3. „	–	(Latein)	–	(Linearz.)	Deutsch	–
4. „	–	–	–	(Linearz.)	–	–

Beispiel eines Stundenplanes der Prima einer Oberrealschule.

1) Vgl. zu dieser und den folgenden Fragen: P. Treutlein, Über das Maß und die Austeilung der Unterrichtszeit an unseren höheren Schulen. Progr. Realgymnasium Karlsruhe 1906.

2) Dieser Stundenplan stellt nicht etwa eine Norm dar, er ist einer von vielen möglichen. Charakteristisch an ihm ist, daß mehrfach zwei Stunden des gleichen Faches zusammengelegt sind. Die wahlfreien Fächer sind eingeklammert. Daß ein

Zählt man die Wochenstunden zusammen, so ergibt sich, daß ihre Zahl erheblich höher ist als in anderen Ländern. Um das deutlich zu machen, will ich die Stundenzahlen gleicher Schularten in Deutschland, Frankreich und Italien gegenüberstellen.

Es sind in allen drei Fällen Schulen von gymnasialem Charakter gewählt. In Preußen sind nicht in Anrechnung gebracht das Turnen, Singen und die wahlfreien Stunden. In der Rubrik Frankreich — gewählt ist die Division A — ist ebenso verfahren. In die Rubrik Italien ist das ginnasio und das liceo nach dem Lehrplan von 1901, doch ohne die in neuerer Zeit erfolgte Gruppenbildung eingetragen. Es sei bemerkt, daß sich anderwärts, z. B. in den Vereinigten Staaten die Zahlen noch viel niedriger stellen, zumal, wenn man bedenkt, daß dort häufig zwei Abteilungen gleichzeitig von einem Lehrer unterrichtet werden, wobei sich dann der Unterricht bei der einen Abteilung auf die Beaufsichtigung beschränkt.

Land:	VI	V	IV	U III	O III	U II	O II	U I	O I
Preußen	25	25	29	30	30	30	30	30	30
Frankreich . . .	19	23	23	22	22	23	22	$22\frac{1}{2}$	–
Italien	21	21	24	25	25	25	25	24	–

Zahl der Wochenstunden in verschiedenen Ländern.

Eines ist aber dabei zu bedenken: Eine Schulstunde hat bei uns nicht 60 Minuten, sondern regelmäßig weniger. Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Stunden liegt eine Pause, und nun ist die Länge der Schulstunden mindestens so weit eingeschränkt, daß Pausen plus fünf Schulstunden gleich fünf wirklichen Stunden sind. Schon seit lange ist man hier und da noch weiter gegangen: man bringt Schulstunden und Pausen in weniger als fünf Schulstunden unter. Also beispielsweise (von einer Oberrealschule im Westen):

1. Std. 8 bis 8^{50}. 2. Std. 8^{55} bis 9^{40}. 3. Std. 10 bis 10^{45}. 4. Std. 10^{50} bis 11^{35}.
5. Std. 11^{45} bis 12^{30}.

oder für einige Monate im Winter gar:

1. Std. 8^{20} bis 9^{05}. 2. Std. 9^{10} bis 9^{55}. 3. Std. 10^{05} bis 10^{50}. 4. Std. 10^{55} bis 11^{40}.
5. Std. 11^{50} bis 12^{35}.

Das letztere ist schon ein Beispiel für den sog. Kurzstundenbetrieb, der neuerdings (Dezember 1909), nachdem vielfache Versuche, zuletzt

Schüler gleichzeitig am Latein und am Linearzeichnen teilnahm (ein solcher Schüler hatte am Donnerstag neun Unterrichtsstunden gehabt), traf für den betreffenden Jahrgang nicht zu. Übrigens führt der Stundenplan die wahlfreien praktischen Schülerübungen in Physik (meist zwei Wochenstunden), die sich an vielen Oberrealschulen finden, nicht auf.

in den Berliner Schulen, vorangegangen, durch eine Ministerialverfügung allgemein in Preußen zugelassen ist. Die Kurzstunde[1]) hat 45 Minuten Dauer; mit ihr ist es möglich, auf den Vormittag sechs Stunden zu legen und den Nachmittag ganz schulfrei zu machen.

Versuche mit 40 Minuten-Kurzstunden, wie sie in Winterthur (Schweiz) erprobt sind, sind in Preußen meines Wissens noch nicht gemacht.

Der Beginn des Unterrichtes ist nicht einheitlich geregelt, das verbietet schon die in Deutschland seit 1893 eingeführte mitteleuropäische Zeit. Im Osten beginnt man den Unterricht vielfach im Sommer um 7 Uhr, im Winter um 8 Uhr; in Berlin z. T. auch im Sommer um 8 Uhr. Im Westen ist der Anfang in der Regel auf 8 Uhr festgesetzt; im Sommer manchmal früher, in einigen Wintermonaten 15, 20 oder 30 Minuten später.

Welches ist nun der zahlenmäßige Anteil der Mathematik an der Gesamtstundenzahl? Wir wollen der Reihe nach die einzelnen Schulgattungen durchgehen und dabei einzelner Abweichungen von den Festsetzungen der amtlichen Lehrpläne gedenken, ohne übrigens dabei Vollständigkeit anzustreben.

Die erste Liste für das Gymnasium gibt in der ersten Reihe die Zahl der mathematischen Stunden nach dem amtlichen Lehrplan an, wobei besonders die „Einschnürung" der Stundenzahl in UIII und OIII (beim Französischen Gymnasium in Berlin liegt sie beiläufig in O III und U II) von vier auf drei Stunden ins Auge fällt. Sie ist immer ein Stein des Anstoßes für die Mathematiker gewesen, Simon nennt sie den „schlimmsten Mißstand" der letzten Lehrpläne, und die in ihren Forderungen neuer Lehrstunden sehr zurückhaltende Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte tritt hier energisch für den Fortfall der Einschnürung ein. Es ist bezeichnend, daß in Pforta die Einschnürung dadurch wett gemacht wird, daß, wie bereits in Abschnitt 4 bemerkt, an den Studientagen die Tertianer eine Stunde Mathematik haben.

Die dann in der Tabelle folgenden Reihen geben vier verschiedene Arten[2]) von Stundenverteilungen bei Anstalten mit Ersatzunterricht (vgl. Abschnitt 2) an, bei denen also an Stelle des Griechischen mit weniger Stunden Englisch getreten ist. Der Zuwachs an Mathematik soll es ermöglichen, das Pensum des Realgymnasiums zu erledigen (vgl. dazu Abschnitt 19).

An letzter Stelle ist schließlich die Stundenzahl an einem Reform-

---

1) Ich muß es mir versagen, auf die experimentell-psychologische Seite dieser und anderer Fragen einzugehen; man vgl. darüber z. B. W. A. Lay, Experimentelle Didaktik. Allgemeiner Teil. 3. Auflage. Leipzig (Quelle & Meyer) 1910.

2) Ich habe mich damit begnügt, für jeden Typus in der Tabelle einen Vertreter anzuführen, es gibt jeweilig noch andere Anstalten mit der gleichen Stundenverteilung.

gymnasium eingetragen. Der Grundzug ist: hohe Stundenzahl im Anfang, niedrige am Ende, eine Folge des späten, dann aber sehr nachdrücklichen Einsetzens des Lateinischen und später des Griechischen. Von seiten der Mathematiker ist diese Stundenverteilung vielfach und mit guten Gründen mißbilligt worden.

Bezeichnung der Anstalt		VI	V	IV	UIII	OIII	UII	OII	UI	OI
Amtl. Lehrplan d. Gymn.		4	4	4	3	3	4	4	4	4
Ersatzunterricht	Amtlicher Plan	4	4	4	4	4	5	—	—	—
	Corvinianum Northeim	4	4	4	4	4	6	—	—	—
	Progymnas. Werl	4	4	4	4	4	4	—	—	—
	Progymnas. Neumark	4	4	4	4	3	4	—	—	—
Reformgymnasium[1]		5	5	5	4	4	3	3	3	3

Zahl der Mathematikstunden am Gymnasium.

Für die Gabelung der Prima von Gymnasien in zwei Abteilungen braucht ein Beispiel nicht angeführt zu werden; wir haben schon früher darüber gesprochen (Abschnitt 4). Die Stundenverteilung bei den Progymnasien ist genau dieselbe wie bei der Unterstufe der Gymnasien.

Aus denselben Gründen können wir auch beim Realgymnasium von Gruppenbildung und Realprogymnasium absehen. Die folgende Liste kann sich also auf den amtlichen Lehrplan und auf das Reformrealgymnasium beschränken, wobei in Klammern den Stundenzahlen für Mathematik die des wahlfreien Linearzeichnens hinzugefügt sind. Für den Altonaer Typus ist das Realgymnasium Altona (das allerdings augenblicklich auch in Umwandlung zum Frankfurter Typus begriffen ist), für den Frankfurter Typus die Musterschule in Frankfurt a. M. (oder die Leibnizschule in Hannover) gewählt.

Bezeichnung der Anstalten	VI	V	IV	UIII	O III	U II	OII	U I	O I
Realgymnasium	4	4	4	5	5 + (2)	5 + (2)	5 + (2)	5 + (2)	5 + (2)
Ref. Realg. Altonaer Syst.	5	5	6	5	4 + (2)	5 + (2)	4 + (2)	5 + (2)	5 + (2)
Ref. Realg. Frankfurter Syst.[2]	5	5	5	4	4 + (2)	4 + (2)	5 + (2)	5 + (2)	5 + (2)

Zahl der Mathematikstunden am Realgymnasium.

1) Die entsprechenden Zahlen für die gymnasiale Abteilung der Karlsruher Goetheschule sind 5, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 4, 4.

2) Wir geben zum Vergleich wieder die Stundenzahlen der realgymnasialen Abteilung der Goetheschule in Karlsruhe; darstellende Geometrie ist hier verpflichtender Lehrgegenstand: 5, 5, 5, 4, 4, 5, 5 + 2, 5 + 2, 5 + 2.

Abweichend von den Gymnasien und Realgymnasien besteht bei den Oberrealschulen und ihren zugehörigen Nichtvollanstalten, den Realschulen, keine Übereinstimmung in den Stundenzahlen. Wir geben an erster Stelle den offiziellen Lehrplan der Oberrealschulen; Abweichungen davon sind nicht besonders eingetragen, sie kommen aber vor. So beginnt z. B. manchmal das wahlfreie Linearzeichnen bereits in U III, ebenso wie bei den Realschulen; oder es ist die Stundenzahl in Quinta um eine herabgesetzt, meist auf Kosten der geometrischen Propädeutik. In einem anderen Falle ist die Zahl der Mathematikstunden in U III auf 5 heruntergesetzt und dafür die Zahl der Deutschstunden um eine erhöht.

Bezeichnung der Anstalten		VI	V	IV	U III	O III	U II	O II	U I	O I
Oberrealschule		5	5	6	6	5 + (2)	5 + (2)	5 + (2)	5 + (2)	5 + (2)
Realschule; 1. Form		5	5	6	6 + (2)	5 + (2)	5 + (2)	—	—	—
Realschule; 2. Form		4	4	5	5 + (2)	5 + (2)	5 + (2)	—	—	—
Berliner Realschulen	R. 8, 11	5	7	6	6 + (2)	5 + (2)	5 + (2)	—	—	—
	R. 5, 9, 12	5	6	6	6 + (2)	5 + (2)	5 + (2)	—	—	—
	R. 1, 2, 3, 4, 6, 10, 13, 14	6	6	6	6 + (2)	5 + (2)	5 + (2)	—	—	—

Zahl der Mathematikstunden an der Oberrealschule und der Realschule.

Für die Realschulen geben die Lehrpläne zwei Formen. Einmal die der Unterstufe der Oberrealschulen entsprechende, dann eine mehr dem Realgymnasium angeglichene Form, bei der Deutsch auf Kosten der Mathematik verstärkt ist. Auch hier wieder sind zahlreiche Abweichungen an der Tagesordnung, ich erinnere nur an die sog. Handelsrealschulen. In der Tabelle habe ich die verschiedenen Formen der Berliner Realschulen zusammengestellt, da ich bei späterer Gelegenheit (Abschnitt 15) auf die in erster Linie dem propädeutischen Unterrichte in Geometrie zugute kommende Stundenvermehrung eingehen werde.

8. Lehrer und Schüler.

Die Zahl der Schüler an den einzelnen Anstalten ist recht verschieden. Es gibt eine lange Reihe (etwa 25%) von sog. Mammut-Anstalten[1]); meist sind es mehrere, unter einem Direktor vereinigte An-

1) Es gab am 1. Mai 1909 in Preußen:

85	Anstalten	mit	501	bis	600	Schülern
32	„	„	601	„	700	„
5	„	„	701	„	800	„
1	„	„	801	„	900	„
1	„	„	901	„	1000	„

staltsarten, die über 500, in einigen wenigen Fällen bis an 1000 Schüler haben[1]); andererseits gibt es Anstalten in kleinen Provinzstädten, die nur etwa 150 Schüler zählen.

Auch die Zahl der Schüler in den einzelnen Klassen bewegt sich zwischen weiten Grenzen. Man hat gewisse Maximalzahlen für die Frequenz aufgestellt[2]), in Preußen 30 Schüler in den Ober-, 40 in den Mittel- und 50 in den Unterklassen, ausnahmsweise auch 40, 50, 50.[3]) Diese Zahlen werden meist nicht erreicht, in einzelnen Fällen aber noch überschritten.[4])

In der folgenden Tabelle stelle ich die Frequenzen (Ostern 1908) einer großen Anstalt, der Königl. Berger Oberrealschule in Posen, und einer kleinen, dem Königl. Gymnasium in Friedeberg N. M., gegenüber. Die eingeklammerte Zahl gibt, wo mehr als eine Klasse vorhanden, die Anzahl der Parallelklassen an.

VI	V	IV	U III	O III	U II	O II	U I	O I	Zusammen
110(2)	127(3)	137(3)	121(2)	108(2)	106(2)	61(2)	26	13	809
13	15	11	13	10	27	7	21		107

Schülerfrequenzen.

Die Schüler sind sämtlich Knaben, Koedukation gibt es zurzeit in Preußen nicht.

An städtischen wie an staatlichen Anstalten zahlen die Schüler Schulgeld; die Sätze sind in den einzelnen Städten, zuweilen auch wohl für die verschiedenen Klassen und sogar für die verschiedenen Schulen einer Stadt verschieden, der Durchschnitt dürfte etwa 150 M. für das Jahr sein.[5]) Eine größere Zahl von Schülern (bis zu 10 %) kann bei Bedürftigkeit und Würdigkeit auf Antrag der Eltern von der Zahlung des Schulgeldes befreit werden.

Das Schülermaterial ist in den einzelnen Schularten, wenigstens in manchen Gebieten, recht verschieden. Die Realschulen nehmen schon insofern eine Sonderstellung ein, als die Mehrzahl der Schüler von vornherein nicht gewillt ist, später eine Vollanstalt zu besuchen. Im übrigen herrscht hinsichtlich der realen Anstalten, besonders der

1) In einem einzelnen Falle ist bei einer unter einem Direktor stehenden Doppelanstalt die technische Leitung der einen Anstalt einem Prorektor übertragen.

2) Das geschah durch eine Verfügung vom 28. Februar 1867. Seitdem ist zwar erneut darauf hingewiesen worden, eine neue Regelung (in Lehrerkreisen wünscht man die Zahlen 25, 30 und 40) aber noch nicht erfolgt.

3) Genauere, auf das Jahr 1906 bezügliche Angaben über Frequenz der Anstalten und Frequenz der Klassen finden sich bei H. Morsch, l. c. S. 164ff.

4) Laisant könnte auf solche Fälle sein Wort anwenden: il n'y a plus d'élèves, ni de professeur: il y a un troupeau et un chien de berger.

5) In manchen Städten erreicht das Schulgeld eine Höhe von 200 M. und mehr. In München-Gladbach richtet sich das Schulgeld nach der Einkommensteuer des Vaters und steigt von 72 M. bis auf 240 M. Vgl. wieder Morsch, l. c. S. 452ff.

Oberrealschulen noch vielfach, und gerade in den sozial höher stehenden Kreisen, das Vorurteil, sie seien nicht so „vornehm" wie die Gymnasien. Es ist recht bezeichnend, daß sich damals, als 1878 die Oberrealschule entstand, gerade die Fachleute gegen die Zulassung von Gewerbeschülern zur Staatsprüfung im Bau- und Maschinenfach sträubten, weil diese Schulen „das Bildungsprinzip auf Grund der alten Sprachen verleugnen". Wenn auch heute die Realanstalten im vollen Besitz der Berechtigungen sind, jenes alte Vorurteil ist noch in vielen Köpfen geblieben, so oft und so lebhaft man auch gegen diesen Dünkel gekämpft hat.[1]) Immerhin hat sich in den letzten Jahren im Westen und an der Küste manches gebessert; besucht doch jetzt ein Prinz des regierenden Hauses eine (übrigens städtische) Oberrealschule – noch vor einem Jahrzehnt hätte man das in weiten Kreisen für unmöglich erklärt.

Die Lehrer an den höheren Lehranstalten scheiden sich ihrer Vorbildung nach in zwei Gruppen, sog. Akademiker und Nichtakademiker. Die ersteren, die wissenschaftlichen Lehrer, haben, nachdem sie das Reifezeugnis einer neunstufigen höheren Schule erhalten haben, einzelne Fächer an einer Universität mindestens drei, durchschnittlich jedoch fünf Jahre studiert und dann die Prüfung für das höhere Lehramt (Examen pro facultate docendi) bestanden.[2]) Die wissenschaftlichen Lehrer sind entweder fest angestellt, oder aber sie sind Hilfslehrer. In den letzten Jahren wurden solche Hilfslehrerstellen wegen des zur Zeit – aber nicht mehr sehr lange – herrschenden Lehrermangels häufig von Seminar- und Probekandidaten verwaltet, d. h. von akademisch gebildeten Lehrern, die noch im ersten bzw. zweiten Jahre ihrer praktischen Ausbildung stehen.

Neben den wissenschaftlichen Lehrern sind an den Anstalten auch Elementarlehrer beschäftigt, die einen großen Teil des technischen Unterrichts (Zeichnen, Turnen, Gesang), dann aber auch, an den verschiedenen Schulen in verschiedenem Maße, wissenschaftlichen Unterricht in den untersten Klassen geben. So liegt z. B. der Rechenunterricht nicht selten ganz in den Händen der Elementarlehrer, die in einzelnen Fällen wohl gar zum mathematischen Unterricht, etwa bis U III, herangezogen wurden (vgl. Abschnitt 14); ein neuer Erlaß vom 4. Februar 1910 beschränkt die Tätigkeit der Elementarlehrer auf die drei untersten Klassen und läßt die Erteilung des mathematischen Unterrichtes (vom Rechnen abgesehen) überhaupt nicht mehr zu.

Es ist vielleicht für nicht-deutsche Leser von Interesse, wenn ich hier einige Angaben über Titel und Gehälter der Lehrer an höheren Schulen einschalte.

Titel und Rang der Lehrer sind in den einzelnen Staaten sehr verschieden;

---

1) Vgl. z. B. einen Aufsatz von H. Schotten, Die Oberrealschule in der Festschrift der Städt. Oberrealschule Halle a. S. (Niemeyer) 1908.

2) Über die Vorbildung dieser Lehrer ist ein besonderer Bericht für die Internationale Mathematische Unterrichtskommission von W. Lorey in Vorbereitung.

eine Zusammenstellung gibt H. Morsch, l. c. S. 402 ff.; ich gehe nur auf die preußischen Verhältnisse ein.

Der Leiter einer Anstalt heißt Direktor, später erhält er oft den Titel Geheimer Regierungsrat, in jedem Falle hat er den Rang der Räte IV. Klasse.

Der fest angestellte wissenschaftliche Lehrer führt die Amtsbezeichnung Oberlehrer (er gehört der V. Rangklasse an). Dabei ist zu bemerken, daß es Oberlehrer auch an anderen als den höheren Knabenschulen gibt, und daß unter diesen sich auch nicht akademisch gebildete Lehrer finden. Die Hälfte aller jeweilig in Preußen vorhandenen Oberlehrer an höheren Knabenschulen führt den Titel Professor (den Professoren wird die IV. Rangklasse verliehen), so waren am 1. Mai 1909 von 8447 Oberlehrern 4305 Professoren. Während der praktischen Ausbildung zum Lehramt führen die späteren wissenschaftlichen Lehrer die Bezeichnung: Kandidat des höheren Schulamts, im ersten Jahre auch Seminar-, im zweiten Probekandidat. Nicht festangestellte, akademisch gebildete Lehrer heißen wissenschaftliche Hilfslehrer.

Die Elementarlehrer heißen Lehrer am Gymnasium, am Realgymnasium, an der Oberrealschule bzw. Realschule.

Auch im Gehalt sind große Verschiedenheiten zwischen den Lehrern in den einzelnen Staaten vorhanden. Wieder verweise ich auf H. Morsch, l. c. S. 414 ff. und gebe nur den preußischen Normaletat wieder, nach dem sich die Besoldung an den staatlichen Anstalten regelt, der aber auch die Grundlage für die Gehälter an den meisten städtischen Anstalten abgibt.

Das Dienstalter in den folgenden Tabellen rechnet meist von der etatsmäßigen Anstellung an, sei es als Direktor, Oberlehrer oder Hilfslehrer, doch kommen Vordatierungen vor. Es erhalten:

1. Leiter von Vollanstalten
   a) in Berlin: Anfangsgehalt 6660, nach 3: 7200, nach 6 Dienstjahren 7800 M.
   b) in den übrigen Orten: Anfangsgehalt 6000, nach 3: 6600, nach 6: 7200, 9 Dienstjahren 7800 M.
2. Leiter von Nichtvollanstalten: Anfangsgehalt 5200, nach 3: 5800, nach 6: 6400, nach 9: 7000, nach 12 Dienstjahren 7600 M.
3. Angestellte wissenschaftliche Oberlehrer (Professoren): Anfangsgehalt 2700, nach 3: 3400, nach 6: 4100, nach 9: 4800, nach 12: 5400, nach 15: 6000, nach 18: 6600, nach 21 Dienstjahren 7200 M.
4. Wissenschaftliche Hilfslehrer: Anfangsgehalt 2100, nach 1: 2400, nach 2: 2700, nach 3 Dienstjahren 3000 M.
5. Zeichenlehrer, Musiklehrer und sog. Mittelschullehrer: Anfangsgehalt: 2100, nach 3: 2400, nach 6: 2700, nach 9: 3000, nach 12: 3300, nach 15: 3600, nach 18: 3900, nach 21: 4200, nach 24 Dienstjahren 4500 M.
6. Sonstige Elementar- und Vorschullehrer: Anfangsgehalt 1800 M., alle 3 Jahre um 300 M. steigend bis zum 27. Dienstjahre mit 4200 M.

Dazu kommt dann noch der Wohnungsgeldzuschuß. Die Orte sind in 5 Servisklassen geteilt, je nach dem herrschenden Mietspreis. Es erhalten die Anstaltsleiter, sofern sie keine Dienstwohnung haben, in der 1. Servisklasse 1800, in der 2. 1500, in der 3. 1200, in der 4. 1000, in der 5. 900 M. Mietsentschädigung. Die festangestellten wissenschaftlichen Lehrer erhalten als Wohnungsgeldzuschuß in Orten der 1. Servisklasse 1200, der 2.: 880, der 3.: 720, der 4.: 640, der 5. 560 M. In kurzem ist eine geringe Änderung dieser Sätze zu erwarten.

Nach dem Ausscheiden aus dem Dienst erhalten die Lehrer eine Pension nach Maßgabe ihrer Dienstjahre und des zuletzt bezogenen Gehaltes. Die Pension beginnt nach 10 Dienstjahren mit 25% des Gehaltes und steigt allmählich in der Weise, daß nach vollendetem 25. Dienstjahre 50%, nach vollendetem 40. Dienstjahre 75% des Gehaltes als Pension gewährt werden; darüber hinaus steigt die Pension in Preußen nicht.

Die Zahl der Stunden, zu denen die akademisch gebildeten Lehrer herangezogen werden können, ist für den Direktor nach einer nicht erneuerten Verfügung

vom Jahre 1863 auf 14 bis 16 bemessen (in praxi ist das Höchstmaß 12 Stunden), für die Oberlehrer beträgt die Pflichtstundenzahl nach einer Verfügung vom Jahre 1901 bis zum 12. Dienstjahre 24 Stunden, bis zum 24. Dienstjahre 22 Stunden, danach 20 Stunden.

Die Standesinteressen der akademisch gebildeten Lehrer an höheren Schulen vertreten: die Blätter für höheres Schulwesen. Wochenschrift für die Interessen des deutschen Philologenstandes; herausgeg. von Ritter und Eickhoff (1910 im 27. Jahrgang; erscheint bei Rosenbaum & Hart, Berlin SW.) und das Korrespondenzblatt für den akademisch gebildeten Lehrerstand, herausgegeben von R. Grosse (erscheint wöchentlich bei C. A. Koch, Leipzig).

Um schließlich noch ein Bild von den Aufwendungen für das höhere Schulwesen in Preußen zu geben, stelle ich einige Zahlen aus dem Preußischen Staatshaushaltsetat für das Etatsjahr 1910 zusammen. Der ordentliche Etat des Kultusministeriums schließt in den Ausgaben mit 260430892,– M. Davon entfallen auf die höheren Lehranstalten für die männliche Jugend 20239164,63 M. Diese Summe kommt aber nur den Anstalten landesherrlichen Patronats (das sind das Joachimsthalsche Gymnasium in Berlin, das Marienstiftsgymnasium in Stettin, das Pädagogium des Klosters Unser lieben Frauen in Magdeburg, die Landesschule zu Pforta und die Klosterschule zu Ilfeld), den vom Staate zu unterhaltenden Anstalten und den Anstalten mit Staatszuschuß zugute. Die Gesamtsumme der Ausgaben und Einnahmen aller höheren Schulen steht mit 77123911,40 M. im Gleichgewicht, wobei neben den Einnahmen aus Staatsfonds auch die aus eigenem Vermögen (2443006,37 M.), aus eigenem Erwerb (30833555,36 M.) und aus städtischen Fonds (24178848,47 M.) in Rechnung gezogen sind. Von den Ausgaben kommen 62569920,47 M. auf die Besoldung der Direktoren und Lehrer, 2112553,65 M. auf Remunerationen für den Unterricht, 12441437,28 M. auf sächliche Ausgaben und Verwaltungskosten.

Früher herrschte bei der Unterrichtsverteilung allgemein das Klassenlehrersystem vor, wobei dann jüngere Lehrer in den unteren und mittleren, nur die älteren auch in den oberen Klassen unterrichteten. Mit diesem Prinzip ist heute bereits in vielen Anstalten gebrochen; man hat eingesehen, daß z. B. der geometrische Anfangsunterricht in Quarta mindestens ebenso wichtig ist, ja vielleicht mehr praktische pädagogische Erfahrung erfordert, als der Unterricht in der Prima. Man geht auch immer mehr dazu über, einen Lehrer mit seiner Klasse zwei oder mehr Jahre hindurch aufrücken zu lassen.

Der Mathematiklehrer wird meist neben der Mathematik noch andere Fächer, im allgemeinen naturwissenschaftliche, in seiner Klasse vertreten. Das erscheint aus schultechnischen Gründen geboten (jeder akademisch gebildete Lehrer besitzt die Lehrbefähigung für mindestens drei Fächer), mehr noch aus methodischen („Konzentration des Unterrichtes“).[1]) Die Entwicklung geht heute dahin, in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern zwei Gruppen zu unterscheiden, Mathe-

---

1) Im Hinblick auf die häuslichen Arbeiten heißt es z. B. an einer Stelle der Lehrpläne: „Ein wirksames Mittel zur Verminderung der Hausarbeit ist die methodische innere Verknüpfung verwandter Lehrfächer untereinander und die entsprechende Gruppierung des Lehrstoffes. Diese sind am sichersten zu erreichen, wenn wenigstens auf den unteren und mittleren Stufen in jeder Klasse die sprachlich-geschichtlichen Fächer einerseits und die mathematisch-naturwissenschaftlichen andererseits möglichst in eine Hand gelegt werden.“

matik-Physik und Chemie-Biologie[1]), wenngleich dagegen besonders vom Standpunkte des Gymnasiums aus noch Einwendungen gemacht werden.[2]) Schon heute aber ist jedenfalls auf den Oberklassen fast regelmäßig der mathematische und physikalische Unterricht in einer Hand.

Es wäre hier nun vielleicht der Ort, über die Persönlichkeit des Lehrers etwas zu sagen, um so mehr als sie mehr als Stoff, ja mehr als Methode ausschlaggebend ist für die Einwirkung auf die Schüler. So verlockend die Aufgabe wäre, so schwierig wäre sie auch, und nicht in wenigen Zeilen zu erledigen. Ich begnüge mich deshalb, zwei charakteristische Äußerungen anzuführen, eine, die den Lehrer, oder vielmehr die besten unter ihnen, allgemein charakterisiert, eine andere, die eine feine und noch heute durchaus zutreffende Beobachtung speziell über die Mathematiklehrer wiedergibt. M. Simon sagt, im Hinblick auf Friedrich Meyer in Halle a. S., einem von jenen als Menschen wie als Lehrer gleich hochstehenden Männern, deren es immer eine große Zahl, wenn auch oft nur ihrem engsten Kreise bekannt, an deutschen Schulen gegeben hat: „Diese Leute sind gekennzeichnet durch eine rücksichtslose Hingabe an ihr Lehramt mit vollkommenster Aufopferung ihrer eigenen wissenschaftlichen und sonstigen Interessen, sie kümmern sich nicht um den kargen Entgelt, um den Mangel jeder äußeren Anerkennung durch Titel und Orden, und selbst der Rang der Räte vierter Klasse ist ihnen gleichgültig" – ein echt Simonscher Ausspruch, getan noch unter dem Eindruck früherer Zeiten. Heute allerdings würden diese Worte, sollten sie gleichzeitig die Allgemeinheit der akademisch gebildeten Lehrer kennzeichnen, wesentlich einzuschränken sein. Die äußeren Verhältnisse haben sich erheblich gebessert, und zwar nicht zum geringsten Teile dank einer gesteigerten Betätigung der Lehrerschaft in Standesvereinen, dank der Bemühungen einer organisierten Vertreterschaft. Galt früher eine gewisse Weltfremdheit als charakteristisch für den akademisch gebildeten Lehrer, so ist heute an deren Stelle fast allgemein das ausgesprochene Streben getreten, dem Stande eine gleichwertige Stellung neben den anderen akademischen Berufen zu erringen.

Dagegen hat ein Wort von Reidt: „Unter den Lehrern der Mathematik herrscht ein ausgeprägter Subjektivismus" noch heute seine volle Berechtigung. Man denke nur an die drei Methodiken des mathe-

1) Vgl. die sog. Dresdener Vorschläge für die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften in A. Gutzmer, Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Leipzig (Teubner) 1908, abgedruckt auch in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 38 (1907). S. 434 ff.

2) Vgl. z. B. H. Schotten, Diskussion über die Dresdener Vorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte betr. die Ausbildung der Lehramtskandidaten. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 39 (1908) S. 531 ff. und 40 (1909) S. 209 ff.

matischen Unterrichtes, die wir besitzen, an Reidt selbst, Simon und jetzt noch Höfler, und wird schon da das Wort bestätigt finden, dessen Wahrheit jede Diskussion mit Mathematiklehrern bekräftigt.[1])

Welches sind nun die Beziehungen, gewissermaßen die Verkehrsformen, die zwischen Lehrer und Schüler herrschen? Im Unterricht wird der Mehrzahl der Ausländer zunächst das auffallen, was wir mit dem Worte Disziplin bezeichnen. Die Schüler haben während des ganzen Unterrichtes auch äußerlich eine aufmerksame Haltung zu wahren. Es wird nicht gestattet, den Platz ohne ausdrückliche Erlaubnis des Lehrers zu verlassen, mit dem Nachbar auch nur leise zu sprechen, sich bequem zu „räkeln". Bei den Fragen haben die Schüler anzuzeigen, wenn sie die Antwort wissen, bei der Antwort selbst, die nur zu geben ist, wenn der Lehrer den Namen nennt, haben sie aufzustehen, wie sie auch beim Eintritt oder Weggehen des Lehrers sich erheben. Alles das wird dem, der die deutschen Verhältnisse kennt, selbstverständlich sein, es gibt aber viele Länder, in denen man diesen Begriff der Schuldisziplin nicht kennt.[2])

Es wird aus dem Späteren hervorgehen, daß diese Haltung nicht nur eine äußerliche ist, daß sie vielmehr notwendige Vorbedingung für die gespannte innere Aufmerksamkeit ist, die von den Schülern in jedem Augenblicke des Unterrichtes verlangt wird.

Einer modernen Bewegung im Unterrichtsbetriebe soll hier wenigstens kurz gedacht werden. Im Anschluß an Schriften von Förster[3]) sind Versuche mit einer Art Selbstverwaltung der Schüler gemacht, die sogar in gewissem Grade parlamentarische Formen annehmen kann. Abschließende Urteile können in dieser Hinsicht noch nicht gefällt werden, die bisherigen Resultate[4]) dürften aber von Bedeutung für die Zukunft sein.

---

1) Jeder Lehrer verlangt eine gewisse Freiheit in der Erteilung seines Unterrichtes; der Lehrer der Mathematik hat hierzu ein größeres Recht als jeder andere, weil der Erfolg seines Unterrichts fast ganz und gar von seiner Persönlichkeit abhängt, die niemand ganz aufgeben wird. Mancher Lehrer wird nach seiner Methode Erfolge hervorrufen, die von ihm nach der Lehrmethode eines anderen nicht erreicht werden würden. So J. B. Friederich l. c. schon 1852.

2) Nur ein Gegenbeispiel zu den deutschen Verhältnissen aus W. Capitaine, Das Schulwesen in Großbritannien, 2. Teil, Programm Gymnasium Eschweiler Ostern 1909: Kein englischer Lehrer regt sich dabei auf, wenn seine Schüler während des Unterrichtes sprechen; der englische Lehrer ist ja, zumal im selben Saale mehrere Abteilungen sind, an Störung und Sprechen gewöhnt. Aber auch wo in einem Saale nur eine Klasse ist, gibt es für deutsche Gemüter Zerstreuung und Ärger genug. Die Jungen treiben allerlei Nebenbeschäftigungen. Die Schüler kommen und gehen, besorgen Geschäfte für Schule und Lehrer; selbst Butterbrote und Briefe werden während des Unterrichts hereingebracht. Doch ist die Haltung der Schüler unter allen Umständen ordentlich und anständig.

3) Fr. W. Förster, Schule und Charakter, 1. bis 3. Aufl. Zürich (Schultheß) 1907.

4) Vgl. K. Heckmann, Selbstbetätigung der Schüler, insbesondere auf dem Gebiete der Schulerziehung. Monatsschrift für höhere Schulen. 9 (1910) S. 65 ff.

Die Schüler werden im Osten bis Obertertia, im Westen bis Untersekunda einschließlich mit Du, von da ab mit Sie angeredet; die Bezeichnung Herr unterbleibt auch in den höheren Klassen.

Das Verhalten der Schüler in und außerhalb der Schule ist durch die Schulordnung geregelt. Diese Schulordnungen sind zuweilen für ganze Provinzen gemeinsam und dann nicht zu umfangreich; andere Schulen haben sehr eingehende Ordnungen, die selbst für Kleinigkeiten Bestimmungen enthalten.[1])

Der Herstellung einer näheren persönlichen Fühlung zwischen Schüler und Lehrer dienen verschiedene Einrichtungen, die hier nicht näher aufgeführt werden können. Es wird aus den früheren Ausführungen über die freiere Gestaltung des Unterrichtes auf der Oberstufe zu erschließen und aus den später folgenden über die häuslichen Arbeiten zu bestätigen sein, daß ein über die beim Klassenunterricht gesteckten Grenzen hinausgehender direkter persönlicher Meinungsaustausch über wissenschaftliche Fragen besteht. Es mag aber noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß, natürlich je nach der Persönlichkeit, ein engeres Band zwischen Lehrer und Schüler sich knüpfen kann, derart, daß der Lehrer auch in Dingen, welche mit der Schule nichts zu tun haben, Berater des Schülers wird. Der Lehrer hört von so manchen kleinen Sorgen seiner Schüler, so kommt es, daß sich zwischen ihm und der Klasse in vielen Fällen ein gegenseitiges Vertrauensverhältnis herausbildet, das oft über die Schulzeit hinausreicht.

Besonders eng kann das Verhältnis zwischen Lehrer und Schüler in Alumnaten sein, deren es allerdings in Preußen nur sehr wenige gibt.[2]) Ich möchte hier einmal auf einen Roman verweisen[3]), der davon ein gutes und echtes Bild gibt (es handelt sich um eine ganz bestimmte Schule, ein Pädagogium der evangelischen Brüder-Unität), ich meine Hermann Anders Krügers Gottfried Kämpfer, ein herrenhutischer Bubenroman „den deutschen Jungen und ihren Schulmeistern gewidmet von einem, der beides war".

1) Als Beispiel nenne ich: Schulordnung, Königliches Prinz Heinrichs-Gymnasium. Berlin 1902. Im übrigen vergleiche man H. Morsch, l. c. S. 143 ff.

2) Während es in Frankreich, England usw. gang und gäbe ist, daß sogar Schüler der Stadt, in der die Anstalt liegt, in den den Lyzeen oder Collèges angegliederten Alumnaten wohnen, ist es in Preußen die Regel, daß auch die auswärtigen Schüler bei Privatleuten in Pension sind.

3) Wer es liebt, in der Umschreibung eines Romans die Schulverhältnisse eines Landes, eines Staates kennen zu lernen, dem könnte eine ganze Anzahl von Werken genannt werden. Er muß dann aber, will anders er objektiv urteilen, eine Kritik üben, zu der der Ausländer selten wird befähigt sein. (Einiges darüber vgl. bei W. Lietzmann, Schule und Literatur der Gegenwart. Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter 3 [1906] S. 142 ff.) Mit allem Vorbehalt also nenne ich als für höhere Schulen in Betracht kommend: Hermann Hesse, Unterm Rad, Emil Strauß, Freund Hein. (Die Tragödie eines für Mathematik nicht beanlagten Schülers.) Carl Busse, Das Gymnasium zu Lengowo („ein Schulroman aus der Ostmark").

Es wäre nun vielleicht angebracht, über die Lehrweise speziell beim mathematischen Unterricht zu sprechen. Ich muß mich jedoch hier sehr kurz fassen. Über die allgemeinen Unterrichtsfragen unterrichte man sich an der Hand eines Lehrbuches über praktische Pädagogik.[1]) Für den mathematischen Unterricht im allgemeinen gibt Reidt eine, wenn auch bereits etwas veraltete — der neue Herausgeber H. Schotten hat an der ursprünglichen Fassung nichts geändert — Darstellung.[2]) Diesem Buche ist eine 1890 bereits in zweiter Auflage erschienene Methodik von Wittstein[3]) an die Seite zu stellen.

Was schließlich die spezielle Methodik der einzelnen Gebiete anlangt, so verweise ich auf die Didaktik von Simon[4]), die moderne von Höfler[5]) und auf meinen ersten Bericht.[6]) Auf einige Fragen wird auch noch in diesem Bericht im Anschluß an die „methodischen Bemerkungen der amtlichen Lehrpläne" einzugehen sein (vgl. Abschnitt 13 bis 16).

Hier nur einige allgemeine Züge, die dem Ausländer zunächst auffallen. Wesentlich ist zunächst, daß der Lehrer wirklich unterrichtet: *„The first thing which impressed me in the classwork"* sagt Young, *„and that which remains finally the most prominent caracteristic, was that the teacher teaches. He does not 'hear recitations', he does not examine the pupils to see whether or not they have learned some assigned matter from a book".* Also nicht *text—book*-Methode, sondern Unterricht.

Und wie unterrichtet nun der Mathematiker? Man hat für die heute im mathematischen Unterrichte übliche Methode das Wort „heuristisch" geprägt — es ist mir schon in einem Lehrplan von 1827 begegnet. Man gebraucht das Wort wohl in einem zwiefachen Sinne. Der umfassendere Sinn ist der, daß damit eine stete Mitarbeit des Schülers bei der Entwicklung neuer Unterrichtsstoffe ausgedrückt wird, die sich in einem fortwährenden Frage- und Antwortspiel zwischen Lehrer und Schüler äußert. „Die beste Methode ist, wenn man durch lauter Fragen und Antworten gehet und das aus den Scholaren selbst herauslocket, was sie gründlich fassen sollen", wie 1721 Hieronymus Freyer in

1) Am besten wohl: A. Matthias, Praktische Pädagogik für höhere Lehranstalten. 2. Aufl. München (Beck) 1903.

2) F. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. 2. Aufl. von H. Schotten. Berlin (Grote) 1906.

3) Th. Wittstein, Die Methode des mathematischen Unterrichts. 2. Aufl. Hannover (Hahn) 1890.

4) M. Simon, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. 2. Aufl. München (C. H. Beck) 1908.

5) A. Höfler, Didaktik des mathematischen Unterrichts. Leipzig (Teubner) 1910.

6) W. Lietzmann, Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. (Band I Heft 1 dieser Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland.) Leipzig (Teubner) 1909.

seiner „Verbesserten Methode des Paedagogii regii in Glaucha vor Halle“ schreibt.

In diesem Sinne heuristisch wird fast immer auf den Schulen vorgegangen, nur in den Oberklassen kann vielleicht einmal ein kurzer Vortrag des Lehrers oder eine zusammenhängende Darlegung des Schülers das Frage- und Antwortspiel unterbrechen.

Marotte sagt in seinem Buche über den mathématischen Unterricht an den höheren Schulen Preußens[1]) sehr richtig: *„J'ai pu d'ailleurs, observer que le caractère le plus marqué de la méthode heuristique, telle qu'on l'emploie dans les classes allemandes, n'est pas l'exercice de la faculté d'invention, qui reste un fait exceptionnel. Ce qu'on en attend surtout, c'est la participation active de l'élève à l'enseignement. Les classes faites par cette méthode sont bien plus animées que celles faites avec la méthode didactique. L'attention des élèves est à chaque instant tenue en éveil; toutes leurs facultés travaillent, car il leur faut comprendre la question posée, observer, réfléchir, trouver eux-mêmes et énoncer les resultats qu'ils ont découverts.“*

Dabei stehen sich Klasse und Lehrer, nicht der einzelne Schüler und der Lehrer gegenüber.

Young findet hier einen wesentlichen Unterschied zwischen den amerikanischen und den deutschen Verhältnissen: *„In Germany the class works as a whole under the guidance of the instructor; when a pupil speaks it is part of a concerted action, as momentary spokesman for the class, as it were. In the American class the individual pupil demonstrates, explains, asks and answers questions; the others listen to him. Whatever the style of instruction, the individual pupil is prominent.“*

Der Unterricht ist also auf das mittlere Niveau der Klasse einzustellen, nicht auf die *„têtes de classe“*; die meisten Fragen müssen – wenigstens in Unter- und Mittelklassen – so sein, daß 75% der Schüler und mehr sie beantworten können.[2]) Ein Mann des praktischen

1) F. Marotte, L'Enseignement des sciences mathématiques et physiques dans l'enseignement secondaire des garçons en Allemagne. Paris (Imprimerie nationale) 1905. Siehe auch die Abhandlung gleichen Titels in den Conférences du Musée pédagogique 1904: L'Enseignement des sciences mathématiques et des sciences physiques par MM. H. Poincaré, G. Lippmann, L. Poincaré, P. Langevin, E. Borel, F. Marotte. Paris (Imprimerie nationale) 1904.

2) In der im nächsten Abschnitt wiedergegebenen Lehrprobe sind z. B. alle Fragen maßlos einfach, viele werden dem Nichtschulmann trivial und gänzlich überflüssig erscheinen; er wird meinen, die Schüler würden durch solche Fragen nur gelangweilt. Ich kann mit Reidt antworten, der den Kritiker auf den Weg der Erfahrung verweist: „Er wird sehen, daß die große Mehrzahl der Schüler sich mit Lust und Liebe an der gemeinschaftlichen Diskussion beteiligt, daß dieselben wetteifern, die gestellten Fragen zu beantworten und sich freuen, etwas zu wissen und zu können. Er wird aber auch bemerken, daß einzelnen Schülern die Beantwortung dieser Fragen keineswegs selbstverständlich, sondern sogar schwer erscheint. . . .

Lebens (v. Unruh) hat einmal gesagt: „Es gibt ein ganz sicheres Merkmal dafür, ob der mathematische Unterricht nach richtiger Methode erteilt wird oder nicht. Im ersten Falle macht die ganze Klasse mit sehr wenigen Ausnahmen augenscheinliche Fortschritte und das Gelernte sitzt fest; im andern Fall folgen nur einige begabte und fleißige Schüler dem Vortrage, die Mehrzahl bleibt teilnahmlos und kommt nicht vorwärts.“

Es handelt sich eben, wie Klein einmal scherzhaft ausgeführt hat, um das Problem, eine gewisse Funktion

$$F(x_0, x_1, x_2, \dots x_n),$$

worin x_0 die „individuelle Qualität“ des Lehrers, $x_1, x_2 \dots x_n$ diejenige seiner n-Schüler bedeutet, unter gewissen Nebenbedingungen zu einem Maximum zu machen.

Mit dem Wort heuristisch verbindet man dann noch einen engeren Sinn. Man nennt heuristisch die Methode, die den Schüler alle Resultate des Unterrichtes selbst finden läßt, natürlich an der leitenden Hand des Lehrers; ihr steht gegenüber die dogmatische Methode.

Erstes Erfordernis für eine heuristische Methode ist, daß die in synthetischer Form in den Lehrbüchern, oder doch in den systematischen Lehrbüchern, gegebenen Sätze analysiert werden. Wie das gemeint ist, sei an der Hand eines Beispieles, das Wittstein in seiner Methodik gibt, ausgeführt.

Es handelt sich um den Satz, daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt. Das Dreieck heiße ABC (vgl. Fig. 7). Die synthetische Darstellung des Lehrbuches, früher wohl auch manchmal der Unterricht, verfährt so:

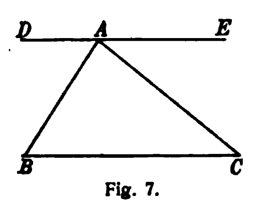


Fig. 7.

1. Man lege durch A eine beiderseits unbegrenzte gerade Linie DE parallel mit BC. (Welche Kausalverbindung von der nachzuweisenden Winkelsumme zu dieser Parallellinie führt, das bleibt hier vollkommen dunkel.)

2. Man wende den Satz an, daß die Wechselwinkel zwischen Parallellinien gleich groß sind, welches hier zweimal möglich ist, nämlich

$$DAB = ABC$$

und

$$EAC = ACB.$$

(Dieser Übergang zu den Wechselwinkeln bleibt nicht minder dunkel. Weshalb nicht die Innenwinkel? und wie hängt das überhaupt mit der Winkelsumme zusammen?)

3. Man wende auf den Winkel BAC den Satz an, daß jede Größe sich selbst gleich ist; hier also

$$BAC = BAC.$$

Er wird oft genug in die Lage kommen, über die gewaltige ‚Dummheit‘ einzelner Antworten auf seine Fragen zu staunen, zugleich aber auch sehen, wie dieselbe allmählich dem Verständnis weicht . . .“

(Der Grund ergibt sich freilich sogleich im folgenden. Wenn man sich aber streng hütet, einen Vorblick auf das Folgende zu werfen, so erscheint diese isolierte Anwendung eines Satzes, der in der vorliegenden Figur wenigstens zehnmal sich anwenden läßt, vollkommen unmotiviert.)

4. Man addiere die drei gefundenen Gleichungen, wodurch man erhält

$$DAB + EAC + BAC = ABC + ACB + BAC.$$

(Hier hat der Schüler Beschäftigung. Aber statt nun bei der Behauptung des Satzes angekommen zu sein, hat man ein ganz anderes Resultat zutage gefördert, nämlich eine Behauptung von der Gleichheit zweier Winkelsummen, statt daß es um die Größe einer Winkelsumme sich handelte.)

5. Man wende auf die erste jener beiden Winkelsummen den Satz an, daß die Summe der Winkel über einer geraden Linie zwei Rechte beträgt; nämlich

$$DAB + EAC + BAC = 2R.$$

(Dieser Satz erscheint wieder als ein Griff ins Blaue hinein, wenn man nämlich noch nicht an die folgende Konklusion denkt.)

6. Man ziehe aus den beiden gefundenen Gleichungen, als Prämissen, die Konklusion; nämlich

$$ABC + ACB + BAC = 2R.$$

(Hier hat der Schüler wieder Beschäftigung, und gelangt damit zum Resultate.)

Eine Analysis des Beweises würde dagegen ein ganz anderes Bild zeigen (vgl. Fig. 8):

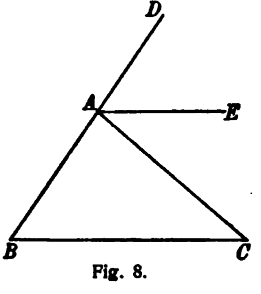
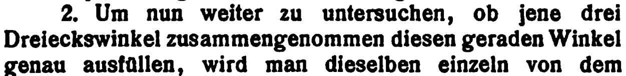


Fig. 8.

1. Da der Satz eine Vergleichung ausspricht, nämlich zwischen der Winkelsumme im Dreieck einerseits und dem geraden Winkel ($2R$) andrerseits, so kommt es vor allen Dingen darauf an, beide Glieder dieser Vergleichung vor Augen zu stellen. Die Winkelsumme liegt nun schon, wenigstens in ihren Teilen, in dem gegebenen Dreieck ABC vor; der gerade Winkel aber wird hergestellt durch eine irgendwo gezogene Linie nebst einem in ihr als Scheitelpunkt angenommenen beliebigen Punkte.



2. Um nun weiter zu untersuchen, ob jene drei Dreieckswinkel zusammengenommen diesen geraden Winkel genau ausfüllen, wird man dieselben einzeln von dem geraden Winkel hinwegzunehmen suchen und z. B. mit BAC den Anfang machen. Man legt deshalb am einfachsten den geraden Winkel so in die Figur hinein, daß sein Scheitelpunkt in A und der eine Schenkel in AB, folglich der andere Schenkel in AD, die Verlängerung von AB, fällt; alsdann erscheint BAC als ein Teil des geraden Winkels BAD, und es bleibt demnach jetzt nur noch zu untersuchen, ob auch der andere Teil von BAD, nämlich der Außenwinkel CAD, gleich der Summe der beiden anderen Dreieckswinkel ABC und ACB sei.

3. Zu dem Ende legt man den einen dieser beiden Winkel, z. B. ACB, so in CAD hinein, daß der eine Schenkel desselben auf AC fällt, mithin der andere Schenkel die Linie AE ergibt. Alsdann bleibt nur noch zu untersuchen, ob auch $EAD = ABC$ sei.

4. Aber aus der Entstehungsart der Linie AE ergibt sich sofort, daß AE parallel BC ist, womit sodann die letzte Frage sich bejahend beantwortet, also der Beweis zu Ende ist.

Auch die heuristische Methode im engeren Sinne, die *méthode de redécouverte,* wie die Franzosen sagen, hat man als charakteristisch für die deutschen Schulen angesprochen. Das trifft zum großen Teil zu, jedoch mit einer Einschränkung. Trotz der reichlich bemessenen Zeit, die in Deutschland im Gegensatz beispielsweise zu Frankreich, Italien,

Amerika auf den Stoff verwandt wird, trotz des überaus langsamen Fortschreitens, läßt sich doch nicht der ganze Stoff heuristisch bewältigen. Man kann nicht in sieben Jahren die Schüler das finden lassen, wozu mehr als Durchschnittsköpfe viele Jahrhunderte brauchten. An manchen Stellen werden also dem heuristischen Unterricht dogmatische Elemente beigemischt sein, wie das auch der nächste Abschnitt zeigt.

9. Eine mathematische Lehrstunde.

Wir wollen nun einer wirklichen Unterrichtsstunde beiwohnen. — Es gibt eine größere Anzahl von Darstellungen derartiger Lehrproben. Reidt und Höfler geben z. B. in ihren Methodiken eine ganze Reihe, Marotte einige wenige, aber recht instruktive Beispiele; auch die Zeitschrift „Lehrproben und Lehrgänge" berücksichtigt die Mathematik.[1]) Aber alle diese Beispiele sind stark gekürzt gegenüber der Wirklichkeit[2]) und deuten manches nur an; oder sie sind mehr oder weniger konstruiert, insofern sie entweder ganz erdacht oder erst nach der Stunde von dem Lehrer aus dem Gedächtnis niedergeschrieben und dabei wohl manchmal ein wenig überpoliert sind.

Im folgenden geben wir mit nur ganz geringfügigen Kürzungen, die als solche im einzelnen bezeichnet sind, das Frage- und Antwortspiel in zwei aufeinanderfolgenden Stunden in einer gymnasialen Obertertia wieder. Der Inhalt ist möglichst genau mitgeschrieben und sofort nach der Stunde ausführlich nach den Notizen niedergeschrieben.

Die Lehrprobe hat den Pythagoreischen Lehrsatz zum Gegenstand. Es wird reizvoll sein, zum Vergleiche die bei Höfler (Didaktik p. 168ff., 189ff., 198ff.) über denselben Gegenstand gegebenen, übrigens auch nicht ganz ausgeführten Lehrproben heranzuziehen. Man achte dabei vor allem darauf, daß es sich bei Höfler um den stufenweisen Fortschritt von einer lediglich propädeutischen zu einer systematischen Geometrie, in unserem Falle nur um die letztere handelt.

Über die Methode des hier unterrichtenden Lehrers findet man nähere Angaben in dem anonym erschienenen Büchelchen: Ist Mathematik Hexerei?[3])

Was also für das Folgende zu beachten ist, sei noch einmal zusammengefaßt: Es handelt sich um wirkliche Schüler, die auch manchmal etwas Falsches sagen; es handelt sich um eine wirkliche Lehrerpersönlichkeit, die natürlich ihre durchaus individuellen Ansichten über

---

1) z. B. R. Bochow, Eine geometrische Repetitions- und Konstruktionsstunde in der Quarta der Realschule. Lehrproben und Lehrgänge. Heft 84 (1905) S. 83ff.

2) Das gilt besonders von der im übrigen sehr lehrreichen Arbeit: Schuster, Die drei ersten Geometriestunden. Lehrproben und Lehrgänge. 58 (1899), S. 100ff.

3) Ist Mathematik Hexerei? Von einem preußischen Schulmeister. Freiburg i. Br. (Herder) 1909.

die Unterrichtsmethode hat. — Auf diese Methode selbst einzugehen, muß ich mir versagen, ich begnüge mich mit der anmerkungslosen Wiedergabe der Lehrstunden.

Lehrer tritt in die Klasse. Die Schüler haben sich erhoben.

Lehrer: Setzen!

Ein Schüler erhebt sich, offenbar der „Ordner“ für diesen Tag; es ist die erste Stunde am Tage.

Schüler: In der Klasse sind 35, keiner fehlt. —

Auf dem Katheder liegt das Klassenbuch, in das für jede Lehrstunde die Aufgaben, die fehlenden oder verspäteten Schüler und dgl. sowie der Name des Lehrers eingetragen werden.

Lehrer: Wie heißt der Satz des Pythagoras?

Schüler: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

Lehrer: Buchstabiere Hypotenuse.

Schüler tut das.

Lehrer: Buchstabiere Kathete.

Schüler tut das.

Lehrer: Wie heißt Hypotenuse griechisch?

Schüler: ὑποτείνουσα.

Lehrer schreibt das Wort an die Tafel.

Lehrer: Wie heißt Kathete?

Schüler: κάθητος.

Lehrer schreibt auch dies Wort an die Tafel.

Lehrer: Kathete ist also eigentlich falsch betont. Wie müßte es heißen?

Schüler: Káthete.

Lehrer: Wir sagen doch aber Périkles und nicht, wie die Griechen, Periklés?

Schüler: Wir betonen lateinisch.

Lehrer: Wie würde κάθητος lateinisch ausgesprochen?

Schüler: kathétus.

Lehrer: Warum heißt der Satz „Satz des Pythagoras“?

Schüler: Pythagoras soll einen wissenschaftlichen Beweis dafür gefunden haben; der Satz war schon früher bekannt.

Lehrer: Wir haben in der vorigen Stunde einen Beweis kennen gelernt, wie haben wir den genannt?

Schüler: Den indischen Beweis.

Lehrer zeichnet an der Tafel ein Quadrat. (Fig. 9.) Die Figuren werden so hergestellt, daß Geraden aus freier Hand gezogen, Kreisbögen mit Hilfe einer Schnur geschlagen werden, an deren einem Ende ein Stück Kreide gehalten wird, während das andere festgehalten wird.

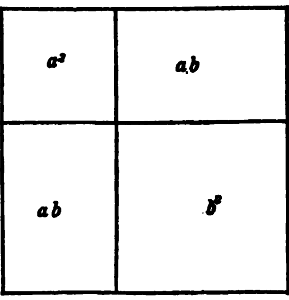


Fig. 9.

Lehrer: Was habe ich jetzt zu tun?

Schüler: Von einer Ecke nach beiden Seiten eine Strecke a abzutragen.

Lehrer tut das.

Lehrer: Was nun?
Schüler: Ich ziehe zweckmäßige Parallelen.
Lehrer: Das war schön – was hat er da gesagt?
Schüler 2: Ich ziehe zweckmäßige Parallelen.
Lehrer: Wie groß ist dieses Quadrat?

Lehrer zeigt auf der inzwischen entstandenen Figur die entsprechenden Quadrate.

Schüler: a^2.
Lehrer: Wie groß ist dieses Quadrat?
Schüler: b^2.
Lehrer: Und was ist das für eine Figur?
Schüler: Ein Rechteck.
Lehrer: Wie groß ist es?
Schüler: $a \cdot b$.
Lehrer: Wo kommt es noch einmal vor? Zeige!

Schüler geht an die Tafel und tut das.

Lehrer: Wie groß ist die Seite des ganzen Quadrates?
Schüler: $a + b$.
Lehrer: Wie groß ist also das Quadrat selber?
Schüler: $(a + b)^2$.
Lehrer: Welche Gleichung gibt uns das alles?
Schüler: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Lehrer: Das kann ich auch ausrechnen. Welches Gesetz muß ich da anwenden?
Schüler: Das zweite Multiplikationsgesetz.
Lehrer: Wir wollen das einmal wiederholen. Wie heißt das zweite Multiplikationsgesetz?
Schüler: $m(a + b + c) = ma + mb + mc$.

Lehrer schreibt das an die Tafel. Bei der folgenden Wiederholung beteiligen sich drei Schüler, einer sagt das Gesetz (Sch. 1), ein zweiter (Sch. 2) ist Zwischenrufer, ein dritter (Sch. 3) zeigt die vom Zwischenrufer genannten Zahlen an der Tafel.

Schüler 1: Wenn eine Summe ...
Schüler 2: $a + b + c$
Schüler 1: mit einer Zahl ...
Schüler 2: m
Schüler 1: multipliziert wird ...
Schüler 2: $m(a + b + c)$,
Schüler 1: so erhält man dasselbe Ergebnis, als wenn man jeden Summanden ...
Schüler 2: a, b, c
Schüler 1: einzeln mit der Zahl multipliziert ...
Schüler 2: ma, mb, mc,

Schüler 1: und die gewonnenen Produkte addiert.
Schüler 2: $ma + mb + mc$.
Lehrer: Wievielmal wende ich das Gesetz an, wenn ich $(a + b)^2$ ausrechne?
Schüler: Zweimal.
Lehrer: Welchen Ausdruck betrachte ich in $(a + b) \cdot (a + b)$ erst als einfache Zahl?
Schüler 1: Den ersten.
Schüler 2: Man kann auch den zweiten nehmen.
Lehrer: Was erhalte ich dann?
Schüler 1: Dann erhalte ich $(a + b) \cdot a + (a + b)b$.
Schüler 2: Und jetzt erhalte ich weiter $a^2 + ab + ab + b^2$.

Lehrer schreibt die Werte, die der Schüler sagt, jeweilig an die Tafel.

Lehrer: Nun zu unserem Quadrat zurück. Was tue ich jetzt?
Schüler: Ich zeichne noch ein Quadrat, aber die Strecken trage ich anders ab.

Lehrer tut das. Es entsteht jetzt allmählich neben Figur 9 die Figur 10. Auch die Teilpunkte hat der Lehrer bereits in der richtigen Weise abgetragen.

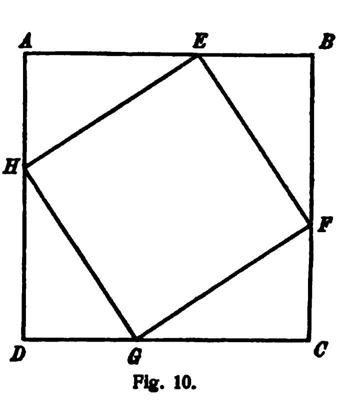


Fig. 10.

Lehrer: Was habe ich jetzt noch zu tun?
Schüler: Die Teilpunkte verbinde ich miteinander.
Lehrer: Was sehe ich jetzt?
Schüler: Ein Quadrat und vier kongruente Dreiecke.
Lehrer: Nun, daß das ein Quadrat ist, werden wir noch sehen; wie heißen die Dreiecke?

Lehrer setzt auch noch Buchstaben an die Zeichnung. Schüler 1 nennt die Dreiecke, Schüler 2, an der Tafel, zeigt sie.

Lehrer: Welches ist der Grund, daß sie kongruent sind?
Schüler: Wir können das 1. Kriterium anwenden.
Lehrer: Wie heißt das?
Schüler: Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem von diesen gebildeten Winkel.
Lehrer: Wo steht das im Buch? Schlagt auf!
Schüler: Seite 20. 6. Lehrsatz.

Im Gebrauch ist K. Schwering u. W. Krimphoff, Ebene Geometrie, 6. A. Freiburg i. B. (Herder) 1908.[1])

Lehrer: Lies vor.

Schüler tut das.

1) Ich bemerke übrigens, daß man die hier durchgenommenen Beweise auch in dem neuen Lehrbuche K. Schwab, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie 1. Teil. Ausg. A. – Leipzig (Freytag) 1910 (II, 1 des Math. Unterrichtswerkes von Schwab-Lesser) findet, wo die Anschaulichkeit durch mehrfarbige Flächenzeichnung sehr gehoben wird.

Lehrer: Was wissen wir bis jetzt von dem Viereck $EFGH$?
Schüler: Es ist ein Rhombus.
Lehrer: Warum?
Schüler: Weil die Seiten gleich sind.
Lehrer: Was ist jetzt noch zu beweisen?
Schüler: Es ist noch zu beweisen, daß die Winkel rechte sind.
Lehrer: Ist das nötig? Müssen wir das mit allen Winkeln tun?
Schüler: Nein, es genügt bei einem Winkel.
Lehrer: Wie wird das nachgewiesen?
Schüler: Durch die Methode der Winkelberechnung.
Lehrer: Wie heißt die? — Schlagt auf im Lehrbuch. Wo steht sie?
Schüler: Seite 133, § 43 steht: Methode der Winkelberechnung. Sie besteht darin, daß man in jedem Winkel der Figur seine Größe in kurzer Bezeichnung einträgt. Dabei verfolgt man den Zweck, bestimmbare Winkel aufzufinden.
Lehrer: Wir wollen die Winkel eintragen. BEF ist α. Welche Winkel sind dann noch gleich α?
Schüler 1 nennt sie, Schüler 2 zeigt sie an der Tafel.
Lehrer: Wie groß ist der Winkel AEH?
Schüler: $90^0 - \alpha$.
Lehrer: Welche Winkel sind ebenso groß?
Schüler 1 nennt sie, Schüler 2 zeigt sie.
Lehrer: Wie groß ist also der Winkel HEF?
Schüler: 90^0.
Lehrer: Wir wissen also jetzt, daß $EFGH$ ein Quadrat ist. — Wie groß ist der Inhalt eines Dreiecks?
Schüler: Der Inhalt ist gleich der halben Summe von Grundlinie und Höhe.

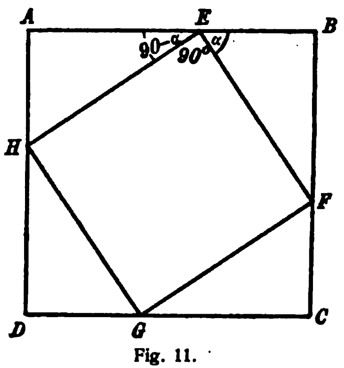


Fig. 11.

Lehrer: Was hat er verwechselt?
Schüler 2: Multiplikation und Addition.
Lehrer: Ist das ein schwerer Fehler?
Schüler: Ja.
Lehrer: Ja, er kommt sehr oft vor — eben ist er ja wieder vorgekommen —, wie groß ist also der Inhalt des ganzen Quadrates?
Schüler: $c^2 + 2ab$.
Lehrer: Wir haben also jetzt zwei Ausdrücke für den Inhalt des Quadrates. Was erhalten wir, wenn wir beide vergleichen?
Schüler: $a^2 + b^2 = c^2$.
Lehrer: Was hat er da getan?
Schüler: Auf beiden Seiten $2ab$ weggelassen.
Lehrer: Zeige noch einmal das Quadrat der Hypotenuse; wo ist das eine Kathetenquadrat, wo ist das andere?

Schüler tut das an der Tafel.

Lehrer: Was muß man alles wissen, um diesen Satz so zu beweisen, wie wir es getan haben?
Schüler 1: Das erste Kriterium.
Schüler 2: Das zweite Multiplikationsgesetz.
Schüler 3: Die Methode der Winkelberechnung.
Schüler 4: Die Formel für den Inhalt des Dreiecks.
Schüler 5: Die Formel für den Inhalt des Rechtecks.
Schüler 6: Für den Inhalt des Quadrates.
Lehrer: Was heißt beweisen?
Schüler: Auf frühere Sätze zurückführen.
Lehrer: Was für Arten von früheren Sätzen müssen wir da unterscheiden?
Schüler: Einige sind bewiesen, andere bedürfen keines Beweises.
Lehrer: Wie heißen solche Sätze?
Schüler: Grundsätze oder Axiome.
Lehrer: Was ist also ein Grundsatz?
Schüler: Ein Satz, den jeder Vernünftige für richtig hält, wenn er ihn verstanden hat.

NB. Manche Vertreter der modernen Axiomatik werden hier vielleicht anderer Meinung sein, dürften aber Schwierigkeiten haben, ihren Standpunkt dem Obertertianer auseinander zu setzen.

Lehrer: Nennt mir Grundsätze.
Schüler: Jedes Ding ist sich selber gleich.
Lehrer: Die heutige Hausarbeit war, die beiden Figuren zu zeichnen.

3 Schüler werden aufgerufen und zeigen ihre in bunter Tusche ausgeführten Zeichnungen vor. Einer erhält das Zeugnis gut, zwei sehr gut. Diese Zeugnisse notiert der Lehrer in seinem Notizbuch. Andere drängen sich auch, ihre Hefte vorzuzeigen.

Lehrer: Finger weg! Hefte zu! Tafel frei! Jetzt was Neues! Paßt einmal gut auf!

NB. Damit ist die Wiederholung, die aus verschiedenen Gründen diesmal sehr ausführlich ausgefallen ist (der Lehrsatz ist sehr wichtig, außerdem – es ist Montag) beendet. Es sei noch bemerkt, daß die Fragen und Antworten außerordentlich schnell aufeinander gefolgt sind, daß meist alle Schüler anzeigten, und daß im Laufe der Wiederholung jeder Schüler mehrmals gefragt worden ist.

Lehrer: Wir wollen jetzt einen zweiten Beweis kennen lernen, den griechischen Beweis. Hier will ich euch auch den Grund sagen, warum ich den so nenne. Da ist ein Professor in Heidelberg, Moritz Cantor heißt er, der hat ein berühmtes Werk über die Geschichte der Mathematik geschrieben, das von andern jetzt fortgesetzt wird. Der vermutet nun, daß dieser Beweis von Pythagoras gefunden ist und hat das mit so schönen Gründen ausgeführt, daß wir ihm glauben möchten. Deshalb ist also dieser Beweis so wichtig; wir lernen daran, was die Leute damals schon gewußt haben.

Lehrer zeichnet die nebenstehende Figur 12.

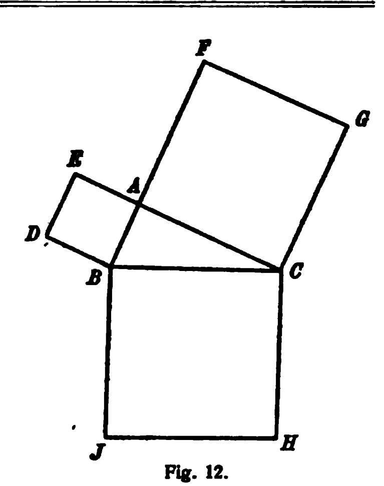


Fig. 12.

Lehrer: Was siehst du?
Schüler: Ich sehe ein rechtwinkliges Dreieck.
Lehrer: Zeige das! Wie heißt es?
Schüler 1 und Schüler 2 tun danach.
Lehrer: Was siehst du noch?
Schüler: Eine Hypotenuse und ein Quadrat darüber.
Lehrer: Zeige das! Wie heißt es?
Wie oben!
Lehrer: Was siehst du noch?
Schüler: Zwei Kathetenquadrate.
Lehrer: Nenne sie und zeige sie!
Wie oben!
Lehrer: Was behauptet nun der Lehrsatz des Pythagoras?
Schüler 1 sagt den Lehrsatz, Schüler 2 ist Zwischenrufer, Schüler 3 zeigt, was Sch. 2 nennt.
Schüler 1: In jedem rechtwinkligen Dreieck
Schüler 2: *ABC*
Schüler 1: ist das Quadrat über der Hypotenuse
Schüler 2: *BCHJ*
Schüler 1: gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.
Schüler 2: $ABDE + ACGF$.
Lehrer: Wie wird doch Hypotenuse geschrieben? Schüler buchstabiert.
Lehrer: Welchen Fehler kann man da machen?
Schüler: th statt t schreiben.
Lehrer: Wie wird Kathete geschrieben?
Schüler buchstabiert.
Lehrer: Wo ist da ein Fehler möglich?
Schüler: Man kann für th nur t schreiben.
Lehrer: Also Kathete hat ein h.[1]) Wenn mir jemand im Extemporale den Fehler macht, dann gibt es einen roten Strich; und der gilt ebenso schwer wie ein mathematischer Fehler.
Lehrer zieht eine Senkrechte *AL* (Figur 13).
Lehrer: Was habe ich da gemacht?
Schüler: Eine Senkrechte von *A* auf die Hypotenuse gezogen.

Fig. 13.

1) Eine andere Gedächtnisregel als die hier angegebene ist die folgende: Hypotenuse und Kathete haben beide nur ein h, aber bei beiden steht das h so früh wie möglich.

Lehrer: Jetzt werde ich beweisen, daß *AEDB* gleich *RLJB* ist. Um das fertig zu bringen, ziehe ich noch die Strecken *AJ* und *DC*. Was entstehen da für Dreiecke?

Schüler: *ABJ* und *BDC*.

Lehrer: Jetzt fasse ich *ABJ* und drehe es um *B*. Mach' uns das einmal vor.

Schüler geht an die Tafel und tut so, als ob ΔABJ beweglich um *B* wäre.

Lehrer: Jetzt drehe ich, bis es auf *DBC* fällt. Um welchen Winkel habe ich gedreht?

Schüler: Um einen Winkel von 90°.

Lehrer: Wohin wandert dabei Punkt *A*?

Schüler: Nach *D*.

Lehrer: Wohin Punkt *J*?

Schüler: Nach *C*.

Lehrer: Welcher Punkt beschreibt den größten Weg?

Schüler: Beide den gleichen.

Lehrer: Nein, das fällt ihnen gar nicht ein. Zeige den Weg, den *A* beschreibt. (Schüler deutet das an.) Und nun den Weg, den *J* beschreibt. Welcher ist also der größere?

Schüler: Der Weg von *J*.

Lehrer: Die beiden Dreiecke sind also kongruent. – Ich sehe in der Figur ein Parallelogramm. Zeige mir eins.

Schüler zeigt das Rechteck *BRLJ*.

Lehrer: Wie groß ist der Inhalt eines Parallelogramms? Aufschlagen! Seite?

Schüler: Seite 78, Lehrsatz 49. „Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe."

Lehrer: Zeige mir die Grundlinie. (Schüler zeigt *BJ*.) Und die Höhe. (Schüler zeigt *BR*.) Kannst Du noch eine andere Höhe zeigen? (Schüler zeigt *LJ*.) Also die Höhe ist der Abstand der beiden Parallelen. Zeige sie! (Schüler zeigt sie.) – Wie groß ist der Inhalt eines Dreiecks?

Schüler: Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Lehrer: Welches Dreieck werden wir jetzt ins Auge fassen?

Schüler 1: *ABJ*.

Lehrer: Zeige! Schüler 2 tut das.

Lehrer: Welche Seite wähle ich als Grundlinie?

Schüler: *BJ*.

Lehrer: Welches ist dann die Höhe?

Schüler: *BX*.

Lehrer: Was meinst du mit *X*?

Schüler zeigt den in der Figur mit *X* bezeichneten Punkt.

Lehrer: Hat er da recht?

Schüler: Nein, er hat unrecht. *X* ist nicht eine Spitze des Dreiecks.

Lehrer: Komm vor, und zeige die Höhe.
Schüler zeigt wieder *BX*.
Lehrer: Er ist ein verstockter Sünder! Komm du vor!

Ein anderer Schüler zeigt richtig. Die Höhe wird vom Lehrer punktiert eingezeichnet. Siehe Figur 13.

Lehrer: Das Dreieck gehört nämlich zu einer besonderen Sorte!
Schüler: Es ist stumpfwinklig.
Lehrer: Und wie steht es mit der Höhe in einem solchen stumpfwinkligen Dreieck?
Schüler: Sie fällt außerhalb des Dreiecks.
Lehrer: Zeige sie jetzt nochmal.
Schüler zeigt sie jetzt richtig.
Lehrer: Was haben wir also bewiesen?
Schüler: Daß dieses Dreieck gleich der Hälfte des Parallelogramms ist.
Lehrer: Das war schön! Noch einmal, wie ist die Sache?
Schüler: (Ein anderer Schüler zeigt jeweilig die Stücke, die der Schüler nennt, an der Tafel.) Ich sehe das Parallelogramm *BRLJ* mit der Grundlinie *BJ* und der Höhe *BR* gleich dem Abstande der beiden Parallelen, und ich sehe das Dreieck *ABJ* mit der Grundlinie *BJ* und der Höhe *BR* gleich dem Abstand der beiden Parallelen. Der Inhalt des Parallelogramms ist gleich der Grundlinie mal Höhe, der Inhalt des Dreiecks ist gleich Grundlinie mal Höhe durch 2. Also ist das Dreieck die Hälfte des Rechtecks.
Lehrer: Das war schön! Was hat er da zuletzt gesagt?
Schüler: Das Dreieck ist die Hälfte des Rechtecks.
Lehrer: Ja, wir können jetzt auch Rechteck sagen; vorhin hatten wir immer vom Parallelogramm gesprochen.

In der gleichen Weise wird das von dem Dreieck *DBC* und dem Quadrat *DBAE* nachgewiesen.

Lehrer: Was konnten wir von den beiden Dreiecken sagen?
Schüler: Sie sind deckungsgleich.
Lehrer: Nach welcher Methode war das doch bewiesen?
Schüler: Nach der Drehungsmethode.
Lehrer: Was folgt jetzt also für das Quadrat und das Rechteck?
Schüler: Sie sind flächengleich.

Es klingelt.

Lehrer: Zum nächsten Male ist die Zeichnung, die an der Tafel steht, zu zeichnen!

Die nächste Mathematikstunde, am folgenden Tage, beginnt damit, daß der Lehrer die Worte

ὑποτείνουσα
κάθητος
Πυθαγόρας

an die Tafel schreibt. Im Anschluß daran werden einige Fragen formaler Art gestellt, dann die letzte Figur der vorhergehenden Stunde

vom Lehrer angezeichnet und der „griechische“ Beweis wiederholt. Ich gebe diese Wiederholung nicht wieder.

Lehrer: Nun paßt einmal gut auf! Jetzt kommt ein neuer Beweis, ein dritter. – Welcher Beweis hat euch besser gefallen, der indische oder der griechische? Wer ist der Ansicht, daß der indische Beweis besser ist? (Fast alle Schüler.) Und wer ist für den griechischen? (3 Schüler stehen auf.) Warum seid ihr für den griechischen?

Schüler 1: Man sieht die Quadrate und die Rechtecke, denen sie gleich sind, besser.

Schüler 2: Ich habe diesen Beweis besser verstanden.

Schüler 3: Der Beweis ist klarer.

Lehrer: Nun die anderen, warum gefällt euch der indische Beweis besser?

Schüler 1: Er ist kürzer.

Schüler 2: Er ist einleuchtender.

Lehrer: Noch eins, was haben wir alles bei dem griechischen Beweis benutzt?

Schüler 1: Die Formel für den Inhalt des Dreiecks.

Schüler 2: Für den Inhalt des Parallelogramms.

Schüler 3: Das erste Kriterium.

Lehrer: Besser!

Schüler 4: Die Drehungsmethode.

Lehrer: Also weniger als beim indischen Beweis. Also wir brauchen bei dem griechischen Beweis weniger zu wissen als beim indischen, er ist einfacher.

Lehrer zeichnet die nebenstehende Figur 14, jedoch ohne die Strecke *AK*.

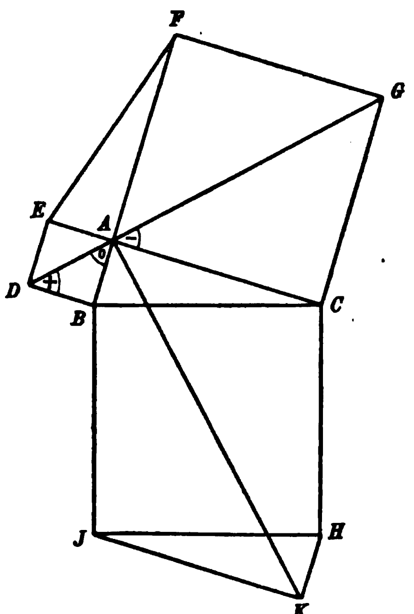


Fig. 14.

Lehrer: Das ist aber eine wunderliche Figur! Ich ziehe noch *DA*. Wie groß ist der Winkel?

Lehrer zeigt auf den in der Figur mit + bezeichneten Winkel.

Schüler: 45°.

Lehrer: Und der? (Zeigt auf den Winkel o.)

Schüler: 45°.

Lehrer: Und wenn ich jetzt *AG* ziehe, wie groß ist der Winkel? (Zeigt den Winkel – der Figur.)

Schüler 1: 65°. (Gelächter der Schüler.)

Schüler 2: Nein, wieder 45°.

Lehrer: Und der? (Zeigt ∢ *BAC*.)

Schüler: 90°.
Lehrer: Wie groß ist jetzt also der ganze Winkel DAG?
Schüler: 180°. KAG ist eine Strecke.
Lehrer: Jetzt klappe ich die Figur $DEFG$ um DG herum. Zeige uns noch einmal die Figur.

Schüler zeigt das und deutet auch das Herumklappen durch Handbewegung an.

Lehrer: Was geschieht dann?
Schüler: Dann fällt E auf B und F auf C.
Lehrer: Und weiter!
Schüler: Die Figuren decken sich.
Lehrer: Welche Figuren sind also kongruent?
Schüler 1: DEA und DBA.
Schüler 2: AFG und ACG.
Schüler 3: EAF und BAC.
Lehrer: Ich fange jetzt an, die Figur $DBCG$ um C zu drehen. Sag's noch einmal! Was soll geschehen?
Schüler 1 wiederholt, Schüler 2 zeigt.
Lehrer: Um wieviel werde ich drehen?
Schüler: Um 90°.
Lehrer: Wo fällt dann GC hin?

Ein Schüler zeigt jedesmal, was im folgenden gesagt wird.

Schüler: Auf AC.
Lehrer: Wohin BC?
Schüler: Auf CH.
Lehrer: Und DB?
Schüler: Auf HJ.
Lehrer: Nein, falsch! Noch einmal. Wir wollen die einzelnen Punkte verfolgen. Wo bleibt G?
Schüler: G fällt auf A.
Lehrer: Wo bleibt B?
Schüler: Fällt auf H.
Lehrer: Und wohin fällt D?
Schüler: Auf K.
Lehrer: Und wo fällt nun die Strecke GD hin?
Schüler: Das wird die Strecke AK.
Lehrer: Na, dann wollen wir die jetzt ziehen!

Lehrer zeichnet diese Strecke ein.

Lehrer: Nun wollen wir dasselbe noch einmal machen. Wir hatten ja die Figur $DEFG$ auf $DBCG$ geklappt und die wollen wir jetzt in eine andere Lage bringen. Wer mir sagt, wie ich jetzt zu drehen habe, bekommt eine 1.

Mehrere Schüler zeigen an. Einer setzt auseinander.

Schüler: Ich drehe nun um B um 90°, dann fällt D auf A, C auf J und G auf K.

Lehrer: Stimmt. (Dies wird im Notizbuch vermerkt.) Das wollen wir uns noch einmal erklären lassen.

Das geschieht.

Lehrer: Welche beiden Figuren haben wir jetzt also durch Umklappen und Drehen zur Deckung gebracht?

Schüler: Das Sechseck $BDEFGC$ und das Sechseck $ACHKJB$.

Lehrer: Woraus bestehen nun die Sechsecke. (Zeigt zunächst das obere.)

Schüler: Das eine besteht aus 2 Quadraten und 2 Dreiecken.

Lehrer: Und das untere?

Schüler: Aus einem Quadrat und 2 Dreiecken.

Lehrer: Was können wir von den Dreiecken sagen?

Schüler: Die sind alle kongruent.

Lehrer: Nun will ich einmal selber fortfahren. Ich lasse jedesmal die beiden Dreiecke weg. Was bleibt jetzt vom ersten Sechseck?

NB. Man hätte hier noch weiter fragen können, da aber die Zeit drängt und über das Klingeln hinaus nicht unterrichtet werden soll, so ist ein schnelleres Fortschreiten geboten.

Schüler: Die beiden Kathetenquadrate.

Lehrer: Zeige sie mal. (Das geschieht.) Und was vom zweiten?

Schüler: Das Hypotenusenquadrat.

Lehrer: Auch das wollen wir sehen. (Schüler zeigt es.) Was haben wir jetzt also bewiesen?

Schüler: Das Quadrat über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

Lehrer: So, das ist der Beweis. Jetzt ist's fertig. Welches ist nun wohl der schönste Beweis? – Hefte heraus! Jeder schreibt eine Zahl ins Heft: der indische ist Nummer 1, der griechische Nummer 2, der letzte ist 3. – Hefte zu! Wer hat 1 geschrieben? Wer 2? Wer 3? (Die Mehrzahl!) So, nächstens wollen wir die Gründe hören! Aufgabenhefte heraus! Notiert zum nächsten Male: Diese Figur zeichnen. (Es klingelt.) – Noch eins, wer es ganz schön machen will, der zeichnet die Figur zweimal auf festes Papier und zerschneidet die eine; die andere bleibt ganz. Dann könnt ihr das Umklappen und die Drehungen wirklich nachmachen.

10. Die häuslichen Arbeiten.

Die häusliche Arbeit der Schüler tritt gegenüber der im Unterricht zu leistenden mehr als in anderen Ländern zurück.[1]) Die Hausarbeit dient nicht so sehr dem Erwerb neuer, als vielmehr der Be-

1) Einiges über die französischen Verhältnisse kann man bei F. Marotte l. c. nachlesen, auch bei W. Lietzmann, Arithmetik und Algebra in den höheren Schulen Frankreichs. Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37 (1906). S. 228ff., S. 302ff., S. 389ff.

festigung und Anwendung im Unterrichte erworbener Kenntnisse.[1]) Immerhin wird dem Schüler von Stunde zu Stunde eine häusliche Arbeit aufgegeben, wenn sie auch manchmal nur, wie die im vorangegangenen Abschnitte wiedergegebenen Schulstunden zeigen, recht wenig umfangreich ist. Das Maximum der Arbeitszeit wird für die unteren und mittleren Klassen im Durchschnitt eine halbe, für die oberen bis zu einer Stunde sein, wobei diese obere Grenze vielfach nicht erreicht werden wird, besonders nicht bei fähigeren Schülern.

Für diese von Stunde zu Stunde aufgegebenen häuslichen Arbeiten kommen zunächst die Wiederholung durchgenommener Lehrsätze, vielleicht auch das saubere Zeichnen von Figuren zu solchen Sätzen u. dgl. in Betracht. Zuweilen werden auch noch nicht durchgenommene Beweise von Übungssätzen (diese Beweise sollten dann nicht im Lehrbuche stehen, sie sind vielmehr selbständig vom Schüler zu finden) verlangt. Den beliebtesten Stoff geben in der Geometrie die Konstruktionsaufgaben (vgl. Abschnitt 16), in der Arithmetik und Algebra Gleichungen, Umformungen, neuerdings auch graphische Darstellungen u. dgl.

Bei der Ausführung dieser häuslichen Arbeiten stehen den Schülern ihre Lehrbücher zur Seite, bei den Berechnungen die Logarithmentafel, vielleicht auch schon einfache Rechenschieber. Ich gehe auf diese Hilfsmittel für die Arbeit des Schülers nicht ein, verweise vielmehr auf meinen ersten Bericht in diesen Abhandlungen. – Für das Zeichnen muß der Schüler ein Reißzeug haben, zuweilen werden auch Reißbretter nötig. Die Zeichnungen werden in manchen Fällen mit Bleistift, in der Regel aber mit Tinte oder Tusche und unter Verwendung verschiedener Farben ausgeführt. Seit dem Einsetzen der Reformbewegung im mathematischen Unterricht ist das Zeichnen auf Millimeterpapier sehr in Aufnahme gekommen. Nicht nur bei graphischen Darstellungen macht man Gebrauch davon, auch in der analytischen Geometrie, der darstellenden Geometrie usw. bedient man sich dieses Papiers mit Vorteil, zumal es jetzt auch in praktischen Heften käuflich ist.[2])

Den regelmäßigen Arbeiten von Stunde zu Stunde treten größere, in längeren Terminen fällige zur Seite; nach den Lehrplänen sind solche Arbeiten „in der Regel alle vier Wochen zu fordern". Übrigens schränkt man die Zahl dieser Arbeiten an einzelnen Anstalten stark ein, so daß dann weniger, aber umfangreichere Arbeiten geliefert werden. Die Pommersche Direktoren-Versammlung, die 1907 über „Die schriftlichen mathematischen Arbeiten auf den Gymnasialanstalten nach Zahl,

1) Eine Methodik der mathematischen Hausarbeiten findet sich bei Reidt, l. c. S. 94 ff.

2) Die graphischen Hefte von Weill (bei Boltze in Gebweiler) werden viel benutzt; neuerdings hat auch der Verlag Wichmann, Berlin, Hefte und Blocks zu billigem Preise in den Handel gebracht.

Umfang und Schwierigkeit" beriet, nahm den Leitsatz an: „In allen Klassen von VI bis I sind mathematische Haus- und Klassenarbeiten, die vom Lehrer korrigiert werden, anzufertigen... und zwar in IV und III alle 14 Tage eine, in II und I in jedem Halbjahre 6 bis 8 Arbeiten je nach dem Umfange. In der Regel ist zwischen Haus- und Klassenarbeit abzuwechseln..."

Der Stoff zu diesen Arbeiten ist in vielen Fällen, zumal in den Mittelklassen, der gleiche, wie bei den Arbeiten von Stunde zu Stunde: Konstruktionsaufgaben, Übungssätze, Algebraische Aufgaben u. dgl., nur daß mehrere, etwa drei oder vier Aufgaben gestellt werden. Die Lösungen sind in ein Reinschriftenheft einzutragen; die Arbeit wird vom Lehrer durchgesehen und beurteilt.

Die Anforderungen an Fleiß und Fähigkeit der Schüler sind bei den Arbeiten an den einzelnen Anstalten recht verschieden. Zur Kennzeichnung der Maximal-Leistungen gebe ich einige Beispiele von einer Berliner Oberrealschule:

Eine Arbeit aus der Obersekunda enthält als erste Aufgabe eine zahlenmäßige Durchführung des Vorwärtseinschneidens. (In einem Viereck sind gegeben eine Seite und die vier ihr anliegenden Seiten- und Diagonalen-Winkel, gesucht ist die Gegenseite.) Dann die Berechnung des Anfangsgliedes und der Gliederzahl einer arithmetischen Reihe erster Ordnung, bei der die Summe, das letzte Glied und die Differenz gegeben ist. Schließlich zwei stereometrische Aufgaben: Ein gerader Holzkegel von der Höhe $h = 20$ cm und dem spezifischen Gewicht $s = 0{,}56$ soll dadurch, daß man eine die Grundfläche gerade deckende zylindrische Bleiplatte vom spezifischen Gewicht $s = 11{,}4$ an ihm befestigt, so zum Schwimmen im Wasser gebracht werden, daß er bis zur Hälfte der Kegelhöhe einsinkt. Wie dick muß die Bleiplatte sein? – Von einer Kugel mit dem Radius r soll ein Segment so abgeschnitten werden, daß sich sein Volumen zu dem des Kegels über derselben Grundfläche mit der Spitze im Mittelpunkte der Kugel wie $m : n$ verhält. Wie groß ist die Höhe des Segments?

Eine Hausarbeit aus der Prima: 1. Einer gegebenen Kugel einzubeschreiben a) den Kegel, welcher das größte Volumen, b) den Kegel, welcher den größten Mantel, c) den Kegel, welcher die größte Oberfläche hat. 2. Durch Konstruktion (graphische Darstellung) aus den Gleichungen

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

die Unbekannten x und y zu finden, insbesondere die Kante eines Würfels zu zeichnen, welcher doppelt so groß ist wie ein Würfel mit der Kante a. Die dritte Aufgabe verlangte die Untersuchung einer Siebenecks-Näherungskonstruktion auf ihre Genauigkeit.

Es gibt zahlreiche Abweichungen von der im vorstehenden geschilderten Durchschnittsnorm: Zuweilen werden genau durchgeführte

Zeichnungen zu einer komplizierten Konstruktionsaufgabe verlangt, etwa zum Apollonischen Berührungsproblem (es waren alle berührenden Kreise gezeichnet). – Man kann auch die Gelegenheit benutzen, solche Gebiete zu Worte kommen zu lassen, die nicht eigentlich zum Pensum gehören; dahin würde z. B. eine Darstellung der Kettenbrüche mit einigen vom Schüler selbst ausgesuchten Anwendungen gehören (von einer Oberrealschule). Man wird überhaupt in Oberklassen an die Stelle bestimmter, fest umgrenzter Aufgaben freiere Darstellungen von Aufgabengruppen treten lassen können; solch ein Thema wäre z. B. die Quadratur der Kegelschnitte (von einer Oberrealschule).

Alle derartigen Aufgaben müssen aber, wie die Arbeit der Schule überhaupt, auf den Durchschnitt eingestellt sein. Gerade bei den Hausarbeiten bietet sich nun aber eine willkommene Gelegenheit, den fähigeren und den für Mathematik mehr interessierten Köpfen eine größere Bewegungsfreiheit einzuräumen. Man erlaubt ihnen, an Stelle der von der Klasse zu leistenden Hausarbeiten nach eigener Wahl – natürlich nach Verabredung mit dem Fachlehrer – besondere schriftliche Arbeiten einzuliefern, kann auch vielleicht zwei oder mehrere jener Hausarbeiten durch eine solche größere Arbeit ausgleichen.

Schon in einer Verfügung aus dem Jahre 1856 wird auf solche freiwilligen, größeren Arbeiten der Primaner hingewiesen: „Es wird besondere Anerkennung verdienen, wenn unter den bei der mündlichen Prüfung vorzulegenden schriftlichen Arbeiten aus dem Biennium für Prima sich Proben solcher eingehenden, von eigenem wissenschaftlichen Triebe zeugenden Privatstudien der Abiturienten finden." – Lampe erzählte von Kronecker, dieser habe, als einmal für das von ihm redigierte Crellesche Journal ein Manuskript einlief, ein Primanerheft aus seiner Gymnasialzeit hervorgeholt, in welchem die Grundgedanken der eingelieferten Abhandlung über die Bernoullischen Zahlen im Anschluß an eine, von Kummer – Kroneckers Lehrer auf dem Gymnasium – gestellte Aufgabe behandelt worden waren.

Erler hat vor vielen Jahren eine Sammlung von Aufgaben für solche größeren Arbeiten veröffentlicht.[1]) Hutt hat jüngst über seine 14jährigen Erfahrungen mit solchen Arbeiten berichtet;[2]) ich führe einige seiner Themen an: Pythagoreische Zahlen; Reihen der sinus und cosinus der Vielfachen eines Winkels; die Malfattische Aufgabe in

---

1) W. Erler, Mathematische Vierteljahrsarbeiten der Primaner, in: Beiträge zur Geschichte der Steinbartschen Erziehungs- und Unterrichts-Anstalten Waisenhaus und Königl. Pädagogium bei Züllichau, 1. Abt. herausgegeben zur ersten Säkularfeier. Jena (F. Frommann) 1867.

In der Schrift gibt Erler eine Auswahl von Themen aus zehnjähriger Praxis. Außerdem stellt er in einer Einleitung die Vorzüge solcher freiwilligen Arbeiten zusammen und berichtet, wie er bei ihrer Verteilung usw. verfährt.

2) Hutt, Bewegungsfreiheit. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 38 (1907), S. 398 ff.

der Ebene und auf der Kugel. Es gibt heute eine größere Anzahl von Anstalten, an denen in ähnlicher Weise größere Arbeiten von den Schülern angefertigt werden.[1]) An einzelnen liegen feste, von der vorgesetzten Behörde genehmigte Beschlüsse vor; ich zitiere etwa von dem Auguste-Viktoria-Gymnasium in Posen:

Jedem Lehrer der Prima wird gestattet, den tüchtigeren unter seinen Schülern auf ihren Wunsch größere Privatarbeiten zu geben, um ihnen Gelegenheit zu verschaffen, sich auf einem Gebiete, dem sie vorzugsweise ihre Neigung zugewendet haben, freier zu betätigen. Der Lehrer übernimmt die ihm dabei zufallende Arbeit freiwillig. Die Schüler kann er entlasten, indem er ihnen für seinen eigenen Unterricht zeitweise die tägliche Hausarbeit erläßt oder ermäßigt, ihnen auch bei dem einen oder dem anderen Amtsgenossen dieselbe Erleichterung verschafft oder ihnen bei dem Direktor für ein bis zwei Tage Urlaub zur Vollendung der Arbeit auswirkt, oder, wenn er der Lehrer des Deutschen ist, die Privatarbeit an die Stelle von ein bis zwei häuslichen Aufsätzen treten läßt.

Von einer Oberrealschule im Westen seien einige Themata derartiger größerer Arbeiten genannt.[2]) Zunächst erscheinen solche Kapitel der Elementarmathematik geeignet, die zwar nicht unmittelbar zum Pensum gehören, sich diesem aber ungezwungen anschließen; also z. B., was schon oben erwähnt, die Kettenbrüche, die diophantischen Gleichungen, die Gleichungen vierten Grades, eine durch Zeichnungen zu erläuternde Darstellung verschiedener Fälle von Durchdringungen in Grund- und Aufriß, der Fundamentalsatz der Algebra, den ein Schüler nach der Darstellung von Weber-Wellstein[3]) recht wohl verstehen kann. Weiter sind solche klassischen Aufgaben wie die Dreiteilung des Winkels (dazu Herstellung von Modellen einzelner Dreiteilungszirkel), die Verdoppelung des Würfels zu nennen. Zuweilen kann man auch allerneueste Literatur heranziehen. Ein Schüler z. B. untersuchte, wie eine neu veröffentlichte allgemeine Lösung des Apollonischen Berührungsproblems[4]) sich für die Spezialfälle gestaltet. Ein Obersekundaner löste einige Aufgaben aus der Faltgeometrie an der Hand des Buches von G. C. Young und W. H. Young[5]), z. B. lieferte er einen Faltbeweis für den Lehrsatz des Pappus. Sehr viel geeignetes Material liefert auch P. Zühlkes Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen.[6])

---

1) Vgl. auch W. Olsen, Freie Arbeiten in Prima. Progr. Königl. Gymnasium Demmin, Ostern 1909, und A. Gronau, Zwei Jahre Bewegungsfreiheit in der Prima des Elbinger Gymnasiums. Monatsschrift für höhere Schulen. 6 (1907) S. 129 ff.

2) Man vgl. auch die Themata der an den Studientagen angefertigten größeren Arbeiten (Abschnitt 4).

3) H. Weber und J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik. I. Band. 2. A. 1906. II. Band. 2. A. 1907. III. Band. 1907. Leipzig (Teubner).

4) R. Hagge, Die Berührungsaufgabe des Apollonius. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 38 (1907), S. 328 ff.

5) G. C. Young und W. H. Young, Der kleine Geometer. Deutsche Ausgabe von S. und F. Bernstein. Leipzig (Teubner) 1908.

6) P. Zühlke, Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Leipzig (Teubner) 1906.

Recht umfangreich erst wird das Feld, wenn man auch Differential- und Integralrechnung heranziehen kann. Von einer Berliner Oberrealschule liegt mir eine, allerdings eine ganz erhebliche Vertrautheit mit der Integralrechnung voraussetzende Arbeit vor: „Die Formel für die Schwingungszahl des Tones abzuleiten, den eine schwingende Saite als Grundton hat.“ In der Klasse war die Formel

$$N = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{P}{\mu}},$$

wo L die Länge der Saite, μ die Masse der Längeneinheit, P die Zugkraft ist, nur empirisch bestätigt worden; als dann ein Beispiel zur Anwendung dieser Formel aufgegeben wurde, lieferte der betreffende Schüler die Herleitung der Formel als freiwillige Zugabe ab. –

Auf einen Zweig der freien Arbeiten möchte ich nicht verfehlen noch besonders aufmerksam zu machen, auf die Geschichte der Mathematik. Man hat ja neuerdings vielfach dem geschichtlichen Moment auch in der Mathematik mehr Geltung verschaffen wollen. In den amtlichen Lehrplänen ist allerdings ein ausdrücklicher Hinweis nicht zu finden und auch in den Pensenaufstellungen der einzelnen Anstalten findet sich nur selten eine diesbezügliche Bemerkung. Als Beispiel führe ich die Städt. Oberrealschule Freiburg, Schles. an, wo für Prima „Historische Übersichten über einzelne Fragen“ vorgeschrieben sind.

Aber es ist hier ganz allgemein eine Besserung eingetreten. Davon zeugen in großer Anzahl die Lehrbücher, die geschichtliche Notizen über Mathematiker, über einzelne Lehrsätze u. dgl. einstreuen oder am Ende in einem besonderen Kapitel zusammenstellen.[1]) Unterstützt werden die Bestrebungen durch einige in letzter Zeit erschienene Bücher über Geschichte der Elementarmathematik. Es ist von großem Wert für die gesamte Klasse, wenn ein Schüler etwa über die Anfänge der Trigonometrie oder der Logarithmenlehre an der Hand von Tropfkes Geschichte der Elementarmathematik[2]) berichtet. Aber unvergleichlich lehrreicher noch ist das Studium geeigneter Originalabhandlungen.

Man wird da zuerst an Euklid denken, von dem man kleine Teile in dem griechischen Lesebuch von v. Wilamowitz-Möllendorf[3]) findet; den Schülern der realistischen Anstalten gibt man vielleicht

1) Vgl. auch H. Böklen, Über die Berücksichtigung des Historischen beim Unterricht in der Geometrie. Tübingen (Fues) 1889. – P. Treutlein, Das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten. Vortrag, gehalten bei der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Heidelberg 1889. Braunschweig (Salle) 1890. – M. Gebhardt, Das Geschichtliche im mathematischen Unterrichte, mit besonderer Berücksichtigung des humanistischen Gymnasiums. Progr. Vitzthumsches Gymnasium, Dresden 1908.

2) J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik. I. Band 1902. II. Band 1903. Leipzig (Veit & Co.).

3) v. Wilamowitz-Möllendorf, Griechisches Lesebuch. 2 Bände und 2 Bände Erläuterungen. Berlin (Weidmann) 1902.

M. Simons Euklid[1]) oder gar ein englisches Lehrbuch der konservativen Schule[2]) in die Hand. – An einem Gymnasium in Köln erzählte mir der Mathematiker, daß ein Schüler eine Schrift von Heron im Urtext gelesen und dann ihren Inhalt vorgetragen habe.

Hier kann ich einschalten, daß man sich natürlich durchaus nicht an die Schablone halten und nun immer schriftliche Ausarbeitungen verlangen wird. Das gesprochene Wort ist für den Schüler ebenso förderlich wie das geschriebene, es hat aber den Vorzug, daß es der ganzen Klasse zugute kommt. Wenn man befürchtet, daß für solche Vorträge die so schon knapp bemessene Unterrichtszeit nicht ausreicht, so ist dem entgegenzuhalten: oft wird die Unterbrechung des regelmäßigen Unterrichtsganges durch einen solchen Vortrag in der Tat wertvoll sein; im übrigen scheue man sich nicht, die interessierten Schüler gelegentlich in einer besonderen Nachmittagsstunde zu versammeln; an Zuspruch, und zwar an wirklich freiwilligem Zuspruch, wird es diesen Stunden sicherlich nicht fehlen.

Lorey hat aus der Praxis eines Gymnasiums eine ganze Anzahl geschichtlicher Themen namhaft gemacht.[3]) Er ließ gelegentlich des Apollonischen Berührungsproblems über die Abhandlungen von Gergonne, Plücker und anderen berichten; bei der Wiederholung in der Trigonometrie sprach ein Schüler über die Bedeutung des Pythagoreischen Lehrsatzes und über den Beweis des großen Fermatschen Satzes (Unmöglichkeit der Lösung von $x^n + y^n = z^n$ in ganzzahligen x, y, z und $n > 2$), für den Exponenten $n = 4$. Einzelne Schüler studierten Abhandlungen von Euler über die Polyeder, andere Huygens' Arbeit über die Quadratur des Kreises.

An einer Oberrealschule wurden u. a. folgende Themen behandelt: Die Lösung der kubischen Gleichung bei Clairaut in dessen, wie seine Geometrie, heuristisch angelegten *Algèbre* (Paris 1746); die Kreisteilungsaufgaben in einer geometrischen Aufgabensammlung des 17. Jahrhunderts (der Schüler, der das von Pirkenstein verfaßte Buch irgendwo aufgetrieben hatte, arbeitete die Kreisteilungsaufgaben durch und untersuchte bei den – nicht als solchen bezeichneten – Näherungskonstruktionen den Genauigkeitswert).

Allerdings setzen derartige freie Arbeiten eine mathematische Schülerbibliothek voraus, wie sie nicht jede Anstalt hat. Die Beschaffung der Bücher für diese Zwecke aus den königlichen Bibliotheken oder die Hergabe aus dem Privatbesitz des Lehrers – heute wohl die übliche Lösung der Frage – hat erhebliche Nachteile im Gefolge.

1) M. Simon, Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Leipzig (Teubner) 1901.

2) z. B. H. S. Hall and F. H. Stevens, A text-book of Euclid's Elements for the use of schools. New Edit. London (Macmillan and Co.) 1900.

3) W. Lorey, Freiere Gestaltung und Privatstudien im mathematischen Unterricht der oberen Klassen. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 39 (1908) S. 73ff.

11. Die Versetzungen und Prüfungen.

Zu Beginn des neuen Schuljahres, also meist zu Ostern, rücken die Schüler von einer Klasse in die nächsthöhere. Das geschieht aber nicht ohne weiteres, vielmehr werden nur diejenigen „versetzt", die auch wirklich das Ziel der Klasse erreicht haben. Über diese Versetzungen bestehen Bestimmungen[1]), wichtiger aber ist, daß tatsächlich dieses Ausscheiden von Schülern, die noch nicht für die neue Klasse reif sind, mit einiger Strenge gehandhabt wird. Das sei besonders hervorgehoben, weil es in anderen Ländern nicht so ist. Marotte schrieb mir einmal: *„Nos examens de promotion de classe en classe ne sont pas sérieux et il nous est souvent impossible de nous débarasser des mauvais élèves."* In Preußen dürfte der Fall, daß alle Schüler einer Klasse versetzt werden, zumal auf der Unter- und Mittelstufe und bei vollbesetzten Klassen, zu den Seltenheiten gehören. Die „methodischen Bemerkungen" zu den Lehrplänen (vgl. Abschnitt 13) machen gerade gelegentlich der Mathematik die Bemerkung:

> „Gewissenhafte Strenge bei der Versetzung bleibt . . . eine dringende Pflicht gegen die Schüler."

Daß ein Schüler kürzere Zeit als ein Jahr in einer Klasse bleibt, oder gar eine Klasse überspringt, was z. B. bei dem freieren Schulbetriebe in England gang und gäbe ist, gehört in Preußen zu den äußersten Seltenheiten.

Bei der Entscheidung über die Versetzung wird in der Regel so verfahren, daß man einzelne Hauptfächer, zu denen an allen Schulgattungen Mathematik gehört, von den Nebenfächern (ein solches ist z. B. an den Gymnasien die Physik, während sie in der Oberstufe der Realanstalten ein Hauptfach ist) unterscheidet und verlangt, daß höchstens in einem Fache die Leistungen mangelhaft[2]) sind oder doch, daß mangelhafte Leistungen in mehreren Fächern durch bessere Leistungen in anderen Fächern ausgeglichen werden. Ungenügende Leistungen in einem Hauptfach haben meist Sitzenbleiben zur Folge.[3]) Durch

---

1) Vgl. z. B. Morsch l. c. S. 188 ff.

2) Die üblichen Urteile in den Zeugnissen usw. sind: sehr gut oder lobenswert (1), gut (2), genügend (3), mangelhaft (4), ungenügend (5). Bei der Reifeprüfung gibt es nur 4 Abstufungen: sehr gut (1), gut (2), genügend (3), nicht genügend (4).

3) Die betreffende Bestimmung lautet: „Im allgemeinen ist die Zensur „Genügend" in den verbindlichen wissenschaftlichen Unterrichtsgegenständen der Klasse als erforderlich für die Versetzung anzusehen. Über mangelhafte und ungenügende Leistungen in dem einen oder anderen Fache kann hinweggesehen werden, wenn nach dem Urteil des Lehrers die Persönlichkeit und das Streben des Schülers seine Gesamtreife, bei deren Beurteilung auch auf die Leistungen in den verbindlichen nichtwissenschaftlichen Unterrichtsfächern entsprechende Rücksicht genommen werden kann, gewährleistet, und wenn angenommen werden darf, daß der Schüler auf der nächstfolgenden Stufe das Fehlende nachholen kann. Indes ist die Versetzung nicht statthaft, wenn ein Schüler in einem Hauptfach das Prädikat „Ungenügend" erhalten

andere Verfügungen ist dann auch dafür gesorgt, daß die Schüler sich die Versetzung nicht „ersitzen" können, meist werden Schüler, die nach zwei Jahren noch nicht das Ziel der Klasse erreicht haben, von der Anstalt entfernt.

Bei allen Anstalten, deren Schuljahr von Ostern zu Ostern rechnet, müssen die Schüler, die das Ziel der Klasse nicht erreicht haben, ein Jahr „sitzen" bleiben. Doch können Schüler, die mit der Reife für Obersekunda, Unterprima oder Oberprima abgehen wollen, wenn sie zu Ostern versetzt sind, im Herbst das Zeugnis erhalten. — Anders liegen die Dinge bei solchen — meist im Osten der Monarchie gelegenen — Schulen, welche Wechselzöten haben. Das soll heißen, es bestehen in jeder Klasse zwei getrennte Abteilungen, Zöten; bei der einen beginnt das Schuljahr zu Ostern, bei der anderen zu Michaelis, d. h. nach den Herbstferien (also um den 1. Oktober herum). Bleibt nun ein Schüler etwa der V O (= Oster-Quinta) Ostern sitzen, so kommt er im allgemeinen in die V M (= Michaelis-Quinta) und kann bereits ein halbes Jahr später versetzt werden; er bleibt also nicht, wie es bei Parallelzöten notwendig, ein ganzes Jahr länger in der Klasse; natürlich vorausgesetzt, daß er inzwischen das Ziel der Klasse erreicht hat. Übrigens ist an solchen Anstalten mit Wechselzöten auch immer die Möglichkeit vorhanden, den Schüler ein ganzes Jahr zurückzuversetzen.

Die Unterlagen für die Versetzung bilden die Leistungen des Schülers während des vergangenen Jahres, insbesondere während des letzten Tertials bzw. Quartals. Es ist zulässig, und bei der Versetzung nach der Obersekunda sogar die Regel, daß die Unterlagen durch schriftliche und mündliche Prüfungen ergänzt werden. Bei den Nichtvollanstalten ist diese „Abschlußprüfung" vorgeschrieben[1]), und es wohnt der mündlichen Prüfung ein königlicher Kommissar bei, d. h. ein Mitglied des Provinzial-Schulkollegiums oder der als Kommissar ausdrücklich ernannte Direktor der Anstalt. Die Mathematik ist in der schriftlichen Prüfung durch eine Klausurarbeit vertreten, die in der Regel die Behandlung von drei dem Pensum des letzten Jahres entnommenen Aufgaben fordert. Viele Nichtvollanstalten veröffentlichen diese Aufgaben in ihren Programmen.

Den Abschluß eines erfolgreichen Besuches der Vollanstalt bildet das Abiturientenexamen oder, wie es jetzt heißt, die „Reifeprüfung". Auskunft über die gegenwärtig geltenden Bestimmungen gibt die ausführ-

---

hat und diesen Ausfall nicht durch mindestens „Gut" in einem anderen Hauptfach ausgleicht."

Hauptfächer sind in allen Schulen Deutsch und Mathematik, dazu an den Gymnasien Lateinisch und Griechisch, an den Realgymnasien Lateinisch, Französisch, Englisch, an den Oberrealschulen Französisch, Englisch, und in den oberen Klassen Naturwissenschaften.

1) Vgl. Verfügung vom 30. Okt. 1901, z. B. bei Beier, l. c.

liche „Ordnung der Reifeprüfung an den neunstufigen höheren Schulen" (vom 27. Oktober 1901)[1]; eine vergleichende Übersicht über die Prüfungen in Deutschland und Österreich findet sich bei H. Morsch.[2]) Die geschichtliche Entwicklung des Abiturientenexamens bis 1892 kann man einer Zusammenstellung von M. Nath entnehmen.[3])

Die Meinungen darüber, ob man, nachdem die Prüfungen bei den Klassenversetzungen auf ein Minimum reduziert, jedenfalls alles äußeren, die Schüler aufregenden Apparates entkleidet sind, nun auch die Reifeprüfung fallen lassen, oder aber sie beibehalten solle, sind recht geteilt. Es ist noch nicht zu lange Zeit her, da brachte eine Tageszeitung eine lange Reihe von Äußerungen hervorragender Männer über diese Frage, und da war es nun sehr merkwürdig, wie der eine mit derselben Überzeugung für das Abiturium, wie sein Nachfolger in der Reihe gegen das Abiturium sich aussprach. Man wies vielfach auf Recht und Pflicht des Staates hin, eine Kontrolle auszuüben, da der Staat mit dem Reifezeugnis Berechtigungen erteile. Andere wiesen diesen Gesichtspunkt ab; eine Kontrolle lasse sich auf anderem Wege erreichen; so schrieb Ad. Harnack: „Ich sehe in der Nötigung, für einen bestimmten Moment den ganzen Erwerb der Schulbildung zusammenzufassen und präsent zu halten, etwas Nützliches und Gutes, wenn dabei nur alles Kleinliche und Mechanische fernbleibt." – Und damit auch eine Stimme aus dem anderen Lager nicht fehle, gebe ich einige Worte von v. Wilamowitz-Möllendorff wieder: „Sich etwas einzubüffeln, auf daß man es heute wisse und morgen vergesse, ist ebenso verdummend wie unsittlich. Damit alle das Minimum wissen, verwehrt man dem Einzelnen, sein Maximum zu leisten. Ob ein Schüler reif ist, das wird ein Lehrerkollegium, wie es sein soll und sein kann, schon selber wissen, und dem Schulrat wird die Parade ein sehr unzulängliches Bild von der Kriegstüchtigkeit der Truppe geben."

Zurzeit dürfte von einer Abschaffung der Reifeprüfung nicht die Rede sein; das hat noch 1906 der Minister ausdrücklich erklärt. Aber ein Schritt dahin ist es doch, wenn die 1892 eingeführte „Einjährigenprüfung" an den Vollanstalten 1901 wieder gefallen ist, und wenn bei der Neuregelung des höheren Mädchenschulwesens von der Übertragung der Reifeprüfung auf die Studienanstalten abgesehen ist.

Was die Einzelheiten bei der Prüfung anlangt, so beschränke ich mich hier auf eine kurze Darstellung der wichtigsten Züge. Was dann besonders die Mathematik anlangt, so werden die nachfolgenden Teile mannigfache Gelegenheit geben, auf die Zielleistungen einzugehen, und das wird ein besseres Bild geben als eine genaue Wiedergabe

1) Vgl. z. B. bei Beier, l. c.

2) Morsch, l. c. 208 ff.

3) M. Nath, Lehrpläne und Prüfungsordnungen im höheren Schulwesen Preußens seit Einführung des Abiturientenexamens. Berlin (Pormetter) 1900.

der Bestimmungen, denn: „Man kann nach der schönsten Prüfungsordnung ganz unzweckmäßig und nach der schlechtesten ganz vortrefflich prüfen“ (Kruse) und „Man kann nach der schwersten Prüfungsordnung sehr leicht, nach der leichtesten sehr schwer prüfen.“ (Morsch.)

Diejenigen Schüler, die nach zweijährigem Besuche der Prima einer Vollanstalt sich der Reifeprüfung unterziehen wollen, haben eine entsprechende Meldung drei Monate vor Schluß des Schuljahres an den Direktor einzureichen. Gleichzeitig tritt die Prüfungskommission zusammen, die sich aus dem Direktor und den in der Oberprima unterrichtenden Lehrern zusammensetzt, zu denen dann später noch der kgl. Kommissar tritt, ein Provinzial-Schulrat oder der besonders dazu bevollmächtigte Direktor. Die Kommission hat zunächst über die Zulassung der Schüler zur Reifeprüfung zu entscheiden und über jeden einzelnen ein Gutachten abzugeben, ob seine Reife auf Grund seines sittlichen Verhaltens und seiner Klassenleistungen „zweifellos“ oder „nicht zweifellos“ ist. Diese Gutachten, Meldungen und die nötigen statistischen Angaben sind dem Provinzial-Schulkollegium einzureichen, das dann endgültig über die Zulassung entscheidet.

Die Prüfung besteht in einer schriftlichen und einer mündlichen. Die Fächer, in denen schriftliche Arbeiten gefordert werden, sind an den einzelnen Anstaltsarten natürlich verschieden, immer aber ist eine mathematische Arbeit dabei. Wie bei den anderen Arbeiten hat auch der Mathematiklehrer einige Zeit vorher durch den Direktor dem Provinzial - Schulkollegium drei von dem Direktor genehmigte Vorschläge von Arbeiten einzureichen, der kgl. Kommissar wählt dann eine davon aus (übrigens ist er auch befugt, selbst neue Aufgaben zu stellen) und sendet sie verschlossen der Schule zurück. Der Umschlag wird erst kurz vor dem Diktieren der Arbeit vor den Augen der Schüler geöffnet.

Für die gestellten Aufgaben besteht die allgemeine Bestimmung:

„Die Aufgaben sind so zu bestimmen, daß sie in Art und Schwierigkeit die Klassenaufgaben der Prima in keiner Weise überschreiten, sie dürfen aber nicht einer der bereits bearbeiteten Aufgaben so nahe stehen, daß ihre Bearbeitung aufhört, den Wert einer selbständigen Leistung zu haben.“ „Außerdem ist jede vorherige Andeutung über sie (die Aufgaben) auf das strengste zu vermeiden.“

Für die Mathematik sind je vier Aufgaben aus den verschiedenen Gebieten in Vorschlag zu bringen. Das soll nicht heißen, daß nun etwa vier Gebiete, beim Gymnasium etwa Algebra, Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie, unterschieden werden[1]) – eine solche Gliederung dürfte bei den Realanstalten auch auf Schwierigkeiten stoßen –, sondern will sagen, daß nicht einzelne Gebiete bevorzugt werden sollen.

---

1) Dieser Irrtum, der auch in Lehrerkreisen verbreitet ist, findet sich z. B. bei Young: „The mathematical paper contains four exercices, one each from Plane Geometry, Solid Geometry, Algebra and Trigonometry“, leider auch in dem Artikel H. Müller, Rechnen und Mathematik in dem Handbuch für Lehrer höherer Schulen. Leipzig (Teubner) 1906.

Lorey hat vorgeschlagen und aus seiner Tätigkeit Beispiele beigebracht, Gruppen von Aufgaben zu bilden, also etwa einmal ein Problem zeichnerisch, dann rechnerisch zu behandeln. Natürlich muß jede Aufgabe lösbar sein, ohne daß das Resultat der anderen bekannt ist.

Die meisten mathematischen Aufgaben, die übrigens mit ganz wenigen Ausnahmen in den Programmen veröffentlicht werden, sind Aufgaben in engerem Sinne. Ich führe an dieser Stelle keine Beispiele an, die folgenden Teile werden eine große Anzahl von ihnen bringen. Nur selten tritt einmal an Stelle der Aufgabe die Darstellung einer speziellen Frage: Also z. B. den Zusammenhang des Cosinussatzes der ebenen Trigonometrie mit den Sätzen des Pythagoras und seiner Erweiterung darzustellen. – Die Verdoppelung des Würfels mit Hilfe zweier Kegelschnitte soll entwickelt und graphisch dargestellt werden. – Was versteht man unter Logarithmen? Welche Vorteile gewährt das Rechnen mit ihnen und wie kann man unmittelbar aus der Definitionsgleichung den Logarithmus einer Zahl berechnen? Die Funktion $y = \log x$ ist auch graphisch darzustellen. – Welche Beziehungen ergeben sich aus den Reihen für e^{xi} und e^{-xi}? Welche einfache Reihe zur Berechnung der Zahl π erhält man hierbei? – Die Beziehungen der Wurzeln einer quadratischen Gleichung zu den Koeffizienten derselben zu entwickeln. – Der Strahlengang im holländischen Fernrohr und seine Vergrößerung. – Manchmal wird dem Schüler auch eine etwas weitergehende Freiheit eingeräumt, z. B. wenn es heißt: Irgend eine Formel aus der sphärischen in die ebene Trigonometrie zu übertragen.

In einigen Fällen wird einzelnen Schülern auch Gelegenheit gegeben, nach der Erledigung der vier Aufgaben noch eine fünfte zu bearbeiten.

Die schriftlichen Arbeiten, die unter steter Aufsicht von Mitgliedern der Prüfungskommission in vorgeschriebener Zeit – bei der Mathematik 5 Stunden – zu erledigen sind, hat der Fachlehrer zu beurteilen, sie kursieren dann bei den Mitgliedern der Kommission. – Der kgl. Kommissar ist befugt, Änderungen der Prädikate vorzunehmen. Bei den als „zweifellos" erklärten Schülern können auf Grund der Klassenleistungen und des Ausfalls der schriftlichen Arbeiten Befreiungen von der mündlichen Prüfung eintreten, dazu müssen die schriftlichen Arbeiten sämtlich mindestens genügend ausgefallen sein.

Die mündliche Prüfung findet unter dem Vorsitz des kgl. Kommissars in Gegenwart aller wissenschaftlichen Lehrer der Anstalt in deren Räumen statt. Sie ist, wie jede Prüfung an höheren Schulen, nichtöffentlich[1]); immerhin haben zuweilen Mitglieder des Kuratoriums der

1) Früher gab es auch sog. öffentliche Prüfungen, die aber für Versetzungen u. dgl. nicht ausschlaggebend waren; sie sind, da sie den Charakter unnützer Schaustellungen annahmen, wohl durchweg in Wegfall gekommen.

betreffenden Anstalt Zutritt und auch Stimmrecht. Es prüfen die jeweiligen Fachlehrer. Jeder Schüler wird in jedem wissenschaftlichen Fache geprüft (ausgenommen Deutsch), doch sind teilweise Befreiungen angängig. Die Prüfungszeit ist verschieden, sie wird sich in der Mathematik etwa zwischen 10 und 20 Minuten für jeden einzelnen Prüfling bewegen. Nach der Prüfung werden die Urteile festgestellt und auf Grund der drei Faktoren: Klassenleistung, Ausfall der schriftlichen Arbeit und der mündlichen Prüfung über die Zuerkennung der Reife Beschluß gefaßt. Im allgemeinen müssen die Resultate in allen Hauptfächern mindestens genügend sein, doch sind Ausgleichungen schlechter Leistungen in einem Fache durch gute in einem anderen zulässig. Gefordert wird dabei allerdings, daß mindestens die zur Versetzung nach Prima erforderlichen Kenntnisse vorhanden sind.[1])

Auch Nichtschüler einer Anstalt können als sog. Extraneer das Reifezeugnis erwerben. Sie haben dazu ein Gesuch einem Provinzial-Schulkollegium einzureichen und werden dann einer Anstalt zur Ablegung der Prüfung überwiesen. Die Modalitäten sind ganz dieselben, nur ist eine Befreiung von der mündlichen Prüfung ausgeschlossen. In der gleichen Weise kann übrigens auch das Primazeugnis, das Berechtigungen zu einzelnen Berufszweigen gibt, erworben werden.

---

1) Die Bestimmungen über die Kompensationen bei der Reifeprüfung sind durch eine neuerliche Verfügung vom 24. Januar 1909 gegen früher etwas geändert. Vgl. über diese z. B. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 40 (1909), S. 218.

Zweiter Teil.

Die mathematischen Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Knabenschulen in Preußen.

12. Einiges aus der Geschichte der mathematischen Lehrpläne.

Wir kehren noch einmal an unseren geschichtlichen Ausgangspunkt zurück und wollen mit schnellen Schritten den Weg durch das letzte Jahrhundert ein zweites Mal durcheilen, indem wir jetzt nur darauf unser Augenmerk richten, welche Rolle die Mathematik, im Lichte der einzelnen Lehrpläne betrachtet, an unseren höheren Schulen gespielt hat.[1])

Der von Süvernsche Lehrplan von 1816 hat im wesentlichen die Bedeutung nicht einer allgemeinen Norm, sondern nur eines, wie die Folgezeit lehrte, in unerreichbarer Ferne vorschwebenden Zieles gehabt. Er ging etwa soweit, wie die besten der Oberrealschulen es heute tun, berücksichtigte aber auf seinem Wege so viele Sondergebiete (z. B. figurierte Zahlen, Diophantische Gleichungen, Gleichungen vierten Grades), die heute zum allergrößten Teil ausgeschieden sind, daß man sagen kann, jener Lehrstoff für das Gymnasium war umfangreicher als der heutige der Oberrealschule.

Allerdings muß dabei immer wieder berücksichtigt werden, daß der Lehrgang zehnjährig war und daß jede Klasse sechs mathematische Lehrstunden in der Woche haben sollte. Vergleicht man den von Süvernschen Lehrplan im einzelnen mit dem von heute, so erscheint als wesentliches Charakteristikum, daß der Stoff stark nach den Unterklassen verschoben ist, so daß die Oberklassen für die infinitesimale Mathematik frei werden.

Wie es allerdings wirklich mit dem Betriebe der höheren Mathematik selbst auf den besseren Gymnasien aussah, das kann man zwischen den Zeilen lesen, wenn man z. B. als Abiturientenaufgabe Ostern 1820 angegeben findet: Auflösung einiger Aufgaben aus der Algebra, Geometrie, Stereometrie und Trigonometrie, außerdem von

1) Eine Zusammenstellung der Lehrpläne gibt M. Nath, Lehrpläne und Prüfungsordnungen im höheren Schulwesen Preußens. Berlin (Pormetter) 1900. Über die mathematischen Lehrpläne vergleiche man in F. Klein und R. Schimmack, l. c. den 4. Abschnitt. Einen allgemeinen Überblick über die Entwicklung des mathematischen Unterrichts gibt F. Klein, Der Unterricht in der Mathematik (zitiert S. 1) und F. Pietzker, L'Enseignement mathématique pendant le 19e siècle, L'Enseignement mathématique 3 (1901) S. 2 ff., 77 ff.

einem Schüler die Auflösung einiger schwereren Aufgaben aus der Analyse des Unendlichen. In der mündlichen Prüfung wurde behandelt: Die mathematische Geographie, verschiedene Themen der mathematischen Physik und besonders der Optik, einige algebraische Aufgaben und die Sätze über das Verhältnis von Prisma, Kubus und Zylinder.[1]) – Also hat offenbar günstigen Falles nur eine Minderzahl bester Schüler aus dem Betriebe der Infinitesimalrechnung den rechten Nutzen gezogen.

Auf den Boden der Wirklichkeit stellt sich der Lehrplan von Johannes Schulze (1837), der für den stofflichen Umfang der Mathematik an den Gymnasien die mit geringen Abänderungen noch heute geltenden Normen schuf und also gegenüber dem von Süvernschen Plan eine gewaltige Reduktion brachte. Immerhin ist es wohl wesentlich der bereits vorhandenen Tradition zu danken, daß der Mathematik noch ein angemessenes Maß zugebilligt wurde. Stammt doch von dem Verfasser der Lehrpläne jenes oft wiederholte Wort: „In einer Zeile des Cornelius Nepos liegt mehr Bildungsstoff, als in zwanzig mathematischen Formeln."

Vergleichen wir auch hier wieder mit heute, so fehlt eigentlich nur die analytische Geometrie. Man ist übrigens auch damals schon an manchen Anstalten mehrfach über die vom Lehrplan gesteckten Ziele hinausgegangen, das sieht man beim Studium alter Programme (z. B. derjenigen der Steinbartschen Erziehungs- und Unterrichtsanstalten bei Züllichau, an denen Erler wirkte); gelegentlich wird auch analytische und synthetische Kegelschnittlehre getrieben (Programm, Gymnasium Königsberg NM. 1854). Am Gymnasium zum Grauen Kloster in Berlin wurden sogar, wie sich aus Ausarbeitungen über den „Vortrag" des Professors Wilde in den Jahren 1844/45 ergibt, die Gleichungen n^{ten} Grades mit graphischen Darstellungen, der Funktionsbegriff, unendlich kleine „Änderungen" usw. behandelt.[2])

Häufiger begegnet man der analytischen Geometrie nach den Lehrplänen von 1856, die einschneidende Änderungen nicht brachten; die Abiturientenaufgaben gehen sogar manchmal für ein Gymnasium recht weit. Ich zitiere etwa die Aufgabe (Gymnasium Potsdam 1857):

Eine Kurve ist durch die Gleichung

$$y^2 + x^2 + 3{,}52y - 9{,}36x = 0,$$

eine gerade Linie durch die Gleichung

$$y = 2x + 18{,}6$$

gegeben. Was für eine Kurve wird durch die erste Gleichung dargestellt? In welchem Punkte schneiden sich die Kurve und die gerade Linie? Wo schneidet die Kurve die Koordinatenachsen? Wo schneidet die Linie diese Achsen?

Auch in der sphärischen Trigonometrie geht man über die ersten einleitenden Begriffe hinaus. In der Gleichungslehre werden bisweilen

1) Festschrift zum 350jährigen Jubiläum des Gymnasiums und Realgymnasiums in Bielefeld am 5. und 6. August 1908. Bielefeld 1908.

2) Nach einer gütigen Mitteilung von Herrn A. Thaer.

(z. B. Gymnasium Neu-Ruppin) die Gleichungen dritten Grades behandelt. Schellbach nahm (1876 als 1. Oberlehrer des Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums in Berlin) in O I. die „Elemente der Kurvenlehre und der Reihenlehre" durch und stellte z. B. Aufgaben wie: Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x}} - \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$$

in eine nach Potenzen von x geordnete Reihe.

Aus seinen Schriften[1]) geht hervor, daß er „die Zauberformel"

$$\pi = \frac{2}{i}\, l(i),$$

oder

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$$

gern den Gymnasien zugebilligt hätte.

Die elementare Behandlung von Aufgaben über Maxima und Minima, die Schellbach pflegte, war nach Ausweis der Programme an vielen Gymnasien nicht bloß in Berlin, sondern auch in der Provinz anzutreffen; das lag daran, daß Schellbach einen weitausgedehnten, sehr regsamen Schülerkreis besaß.[2])

Beliebt waren die Kettenbrüche, die heute zwar aus den Lehrplänen, noch nicht aber aus den Lehrbüchern verschwunden sind; man gab im Abiturientenexamen etwa Aufgaben wie (Luisenstädtisches Gymnasium in Berlin):

$\sqrt{19}$ in einen Kettenbruch zu entwickeln, die fünf ersten Näherungswerte zu berechnen und den Fehler des letzten von diesen zu beurteilen.

Die Wurzeln der Gleichung $x^2 + 12x - 9 = 0$ in Kettenbrüche zu entwickeln, deren acht erste Näherungswerte zu berechnen und den Fehler des letzten von diesen zu beurteilen.

Die Realgymnasien gingen, als sie 1859 als Realschulen 1. Ordnung zum ersten Male als berechtigte höhere Schulen auftraten, im Lehrplane etwas über das Gymnasium hinaus, sie betonten vielleicht auch ein wenig mehr die Anwendungen. So heißt es z. B. in den Aufnahmebedingungen für die Sekunda einer solchen Schule: Verlangt wird „Befähigung, die in den niederen Gewerben vorkommenden mathematischen Konstruktionen zu verstehen und verständig auszuführen." Es sei übrigens bemerkt, daß auch an Gymnasien die angewandte Mathematik, z. B. die geometrische Optik, die Statik usw. zuweilen ausdrücklich erwähnt wird.

Die Anforderungen für die Abiturientenprüfung sind in Mathematik die folgenden:

---

1) K. H. Schellbach, Über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien. Berlin, (Reimer) 1887.

2) Man vgl. dazu F. Müller, Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Leipzig (Teubner) 1905.

Der Abiturient hat den Nachweis zu liefern, daß er auf dem ganzen Gebiete der Mathematik, soweit sie Pensum der oberen Klassen ist (Kenntnis der Beweisführung sowie der Ausführungsmethoden einfacher Aufgaben aus der Algebra, die Lehre von den Potenzen, Proportionen, Gleichungen, Progressionen, der binomische Lehrsatz und die einfachen Reihen, die Logarithmen, die ebene Trigonometrie, Stereometrie, die Elemente der beschreibenden Geometrie, analytische Geometrie, Kegelschnitte; angewandte Mathematik: Statik, Mechanik), sichere, geordnete und wissenschaftlich begründete Kenntnisse besitzt, und daß ihm auch die elementaren Teile der Wissenschaft noch wohl bekannt sind. Ebenso muß Fertigkeit in allen im praktischen Leben vorkommenden Rechnungsarten, im Rechnen mit allgemeinen Größen und im Gebrauch der mathematischen Tafeln vorhanden sein. Auf strenge Beweisführung und auf Fertigkeit in der Lösung der Aufgaben ist bei der Abiturientenprüfung besonderer Wert zu legen.

Auch hier gehen viele Anstalten über dieses Maß geforderter Kenntnisse hinaus. Naheliegend ist ja besonders die Erweiterung durch die Infinitesimalrechnung. So finden wir z. B. als Primapensum — nur für das eine der beiden Jahre — einer Berliner Anstalt (Luisenstädtische Realschule, Berlin 1867):

Kombinationslehre, Binomischer Lehrsatz, von den arithmetischen Reihen höherer Ordnungen, Entwicklung der Reihen für die einfachen transzendenten Funktionen, Theorie der Gleichungen, welche den zweiten Grad übersteigen, Elemente der Differential- und Integralrechnung. Mathematische Geographie. Die schwierigeren Beispiele aus den kaufmännischen Rechnungsarten.

Wir haben gesehen, daß die 1878 als dritte Gattung höherer Schulen auftauchenden Oberrealschulen ihren Ursprung aus den Gewerbeschulen genommen haben. Es gab verschiedene Arten von Gewerbeschulen, und dementsprechend waren auch die Ziele in Mathematik außerordentlich verschieden.[1]) Als Muster gebe ich zunächst den Lehrplan einer zweistufigen Provinzial-Gewerbeschule (Elberfeld) von 1867; zweierlei ist daran bemerkenswert: einmal eine etwas kräftigere Betonung der angewandten Mathematik, auf der anderen Seite die unverkennbare Ähnlichkeit mit unseren gegenwärtigen Lehrplänen — ein Zug, den man von einer Fachschule nicht eigentlich erwarten sollte. Lehrstoff der Schule ist:

a) Planimetrie in ihrem ganzen Umfange.

b) Stereometrie. Die Lehre von den Ebenen und den geraden Linien im Raum. Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel, Kugel in ihren wesentlichen Eigenschaften. Körperberechnungen in vielfachen Beispielen. Simpsonsche und Guldinsche Regel. Kegelschnitte.

c) Trigonometrie. Goniometrie. Berechnung ebener Dreiecke mit besonderer Rücksicht auf die Lösung logarithmisch-trigonometrischer Berechnungen. Das

1) Ch. F. H. A. Glasser, Über den Unterschied des Vortrags der Mathematik an Gymnasien und Gewerbeschulen, Progr. königl. Studienanstalt Erlangen 1837, faßt seine Ausführungen so zusammen: „An Gymnasien wird die Mathematik um ihrer selbst willen getrieben, als eine Wissenschaft, welche nach Schillers Epigramm

„göttlich war, eh' sie dem Staate gedient",

während auf die Gewerbeschulen der andere Teil desselben Epigramms richtig angewendet werden kann, in welchem Archimedes zu dem Schüler sagt:

„Willst du nur Früchte von ihr, die kann auch die Sterbliche zeugen."

Material zu den Beispielen liefern Fragen aus dem Gebiet der Geometrie, der Physik (namentlich der Mechanik) und Berechnungen fingierter oder wirklich ausgeführter geodätischer Messungen. Übungen im praktischen Feldmessen und Nivellieren.

d) Arithmetik. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen. Wissenschaftliche Begründung der Dezimalrechnung. Gleichungen des 1. und 2. Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Bestimmungen des Maximums und Minimums algebraischer Funktionen. Kombinationslehre. Binomischer Lehrsatz.

e) Praktisches Rechnen. Übung und wissenschaftliche Begründung der im Geschäftsleben vorkommenden Rechnungsarten.

f) Die Anwendung der Geometrie auf das Projektionszeichnen wird in der beschreibenden Geometrie besonders gelehrt.

Erheblich weiter gingen einzelne Berliner Schulen mit siebenjähriger Kursusdauer; ich wähle als Beispiel die von Gallenkamp geleitete, schon im Abschnitt 1 erwähnte Friedrichs-Werdersche Gewerbeschule in Berlin (nach dem Programm von 1868). In dem folgenden kurzen Lehrplan ist für jede Klasse auch die Zahl der mathematischen Stunden und die Kursusdauer angegeben. Besonders das schnelle Fortschreiten ist recht auffallend; bei halbjähriger Kursusdauer wird an manchen Stellen so schnell wie heute bei ganzjährigem Kursus vorgegangen. Dabei ist allerdings die hohe Stundenzahl und wohl auch ein reiferes Schülermaterial in Rechnung zu ziehen.

U IV. V. VI. (je 7 Std.; je ½ Jahr): Rechnen.

O IV. (7 Std.; ½ J.): Anfangsgründe der Geometrie. Kongruenz der Dreiecke. Parallelogramme. Elemente der Arithmetik, insbesondere der Dezimalbrüche.

U III. (7 Std.; ½ J.): Rechnen in algebraischen Zahlen und in Potenzen. Geometrie.

O III. (7 Std.; ½ J.): Flächen- und Ähnlichkeitslehre. Kreislehre. Arithmetische und algebraische Übungen.

U II. (7 Std.; 1 J.): Kreismessung. Die Gleichungen 1. und 2. Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Die Logarithmen. Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung.

O II. (7 Std.; 1 J.): Trigonometrie und Stereometrie. Dazu 2 Stunden geometrisches Zeichnen: Konstruktionen von geradlinigen Figuren und Kurven. Anfangsgründe der Projektionslehre.

U I. (8 Std.; 1 J.): Vollendung der Stereometrie. Elemente der analytischen Geometrie. Elemente der Differential- und Integralrechnung. Dazu 2 Stunden geometrisches Zeichnen: Konstruktionen nach den Methoden der beschreibenden Geometrie.

O I. (8 Std.; 1 J.): Unendliche Reihen. Analytische Geometrie. Differential- und Integralrechnung. Analytische Mechanik. Dazu 2 Stunden geometrisches Zeichnen: Übungen in der Konstruktionslehre, in der Schattenkonstruktion und in der Perspektive. Aufnahme von Maschinen.

Die Aufgaben für das Abiturientenexamen standen auf entsprechender Höhe. Ich möchte nur eine von ihnen, aus dem Jahre 1867, anführen, um den allgemeinen Eindruck, den der Lehrplan gemacht haben wird, daß trotz Fachschule fast nur reine, fast gar keine angewandte Mathematik getrieben wird, zu verstärken:[1])

1) Ich führe als weiteren Beleg das aus diesem Unterricht hervorgegangene und in ihm benutzte Unterrichtswerk W. Gallenkamp, Die Elemente der Mathematik, 5 Teile, Berlin (Plahn), an und verweise dieserhalb auf Band 1, Heft 1 dieser Abhandlungen.

Wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & f & g \\ f & b-\lambda & h \\ g & h & c-\lambda \end{vmatrix}$$

mit $\varphi(\lambda)$ bezeichnet wird, so läßt sich $\varphi(\lambda)\cdot\varphi(-\lambda)$ in Form einer Determinante darstellen, welche in ähnlicher Weise von λ abhängt, wie $\varphi(\lambda)$ von λ. Welche ist es?

Der angeführte Lehrplan wird gezeigt haben, daß die neuen Oberrealschulen eine gute Tradition übernehmen konnten. Mit neuem Lehrplan traten sie 1882 den anderen Schularten zur Seite.

Diese Lehrpläne behielten für das Gymnasium in Mathematik den bisherigen Stoff bei, nur kam der propädeutische Unterricht hinzu. Beim Realgymnasium fiel das praktische Rechnen weg. Was vorher wenigstens erlaubt, Differential- und Integralrechnung und analytische Geometrie des Raumes, wurde verboten. Hinzu kam die synthetische Geometrie der Kegelschnitte und die sphärische Trigonometrie. Diese Gebiete wurden auch für die Oberrealschulen pflichtmäßig, Differentialrechnung und analytische Geometrie des Raumes wurde ihnen noch belassen.

Der Lehrplan von 1892 ließ den Stoff beim Gymnasium ungefähr beim alten. Beim Realgymnasium und bei den Oberrealschulen wurde die Mathematik weiter eingeschränkt; so verlor die Oberrealschule die Differentialrechnung und die analytische Geometrie des Raumes. „Für die Realanstalten war damit ein Lehrziel zustande gekommen, das über das Gymnasium in kaum etwas Wichtigerem hinausging – wenigstens in nichts, was dem Abiturienten weiterhin hätte von besonderem Nutzen sein können." (Klein-Schimmack). Das ist im wesentlichen noch heute so geblieben, nur die wieder in Ansehen gekommene Bewegungsfreiheit der einzelnen Schulen und der einzelnen Lehrerpersönlichkeiten hat die Möglichkeit eröffnet, sich hier und dort darüber hinwegzusetzen. Im dritten Teile dieses Berichtes wird das eingehend zur Sprache kommen.

13. Die methodischen Bemerkungen der Lehrpläne. Zweck des mathematischen Unterrichts.

Die gegenwärtig in Geltung befindlichen „Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen" von 1901[1]) umfassen drei Teile; die Stundenpläne im ersten Teile und die allgemeinen Bemerkungen des letzten Teiles sind bereits in den vorangegangenen Abschnitten ihrem Inhalte nach berücksichtigt. Der Hauptteil, der die Lehrpläne für die einzelnen Unterrichtsgegenstände bringt, ist nach Fächern gegliedert und bringt für Mathematik ebenso wie für die anderen Lehr-

1) Erschienen Berlin (Hertz) 1901. Abgedruckt z. B. in Beier, l. c. – Der mathematische Lehrplan ist auch, jedoch ohne die methodischen Bemerkungen, in französischer Übersetzung bei Marotte, l. c. S. 40, wiedergegeben.

gegenstände erst die Pensenverteilung für die drei verschiedenen Schularten, dann, für alle drei bestimmt, „Methodische Bemerkungen für Rechnen und Mathematik". Mit ihnen wollen wir uns zuerst beschäftigen.

Es handelt sich in diesen Leitsätzen durchaus nicht um eine Methodik im engeren Sinne, um eine Anempfehlung und Darstellung etwa des heuristischen oder des genetischen oder eines anderen Verfahrens, sondern es werden Bemerkungen zu einzelnen allgemeinen Unterrichtsfragen gemacht. Da sich in ihnen die Anschauungen der Schulregierung widerspiegeln und damit die Gewähr gegeben ist, daß nach ihnen auch wirklich in der Praxis verfahren wird, so glaube ich mich berechtigt, hierbei etwas länger zu verweilen und in dem so gegebenen Rahmen auf die allgemeinen mathematischen Unterrichtsfragen einzugehen.

Die methodischen Bemerkungen beginnen mit einer Festlegung des Zieles des mathematischen Unterrichtes überhaupt:

Für die höheren Lehranstalten besteht die wichtigste Aufgabe des mathematischen Unterrichts in einer Schulung des Geistes, welche den Schüler befähigt, die erworbenen Anschauungen und Kenntnisse in selbständiger Arbeit anzuwenden. Auf allen Gebieten dieses Lehrfaches ist daher ein klares Verständnis der zu entwickelnden Sätze und ihrer Herleitung ebenso wie Übung und Gewandtheit in ihrer Anwendung zu erzielen.

Die Grundstimmung dieses Passus ist ein Ausgleich zwischen dem sogenannten formalen und dem materialen oder utilitaristischen Zweck des Mathematikunterrichtes. Der Wettkampf beider Prinzipien hat seine Geschichte.[1] Zu Beginn des 19. Jahrhunderts, im v. Süvernschen Lehrplan, hat die Anwendung noch einen herrschenden Platz im Lehrplan; dann tritt mehr und mehr der rein formalistische Standpunkt hervor, bedingt nicht zum mindesten durch das notwendige Hervorkehren des formalen Wertes altsprachlichen Unterrichtes im Gymnasium. Auf die allgemeine Schulung des logischen Denkens oder, wie Raspe sagt, die „Geübtheit der Geisteskräfte zu wissenschaftlichem Denken" kommt es an — ganz wie in der lateinischen Grammatik —, der Stoff steht erst in zweiter Linie. Man kann es nicht krasser ausdrücken, als Wittstein es getan hat: Und wenn man all den Stoff auch vergißt, der mathematische Unterricht kann doch seinen Zweck erfüllt haben.

Diesen Geist atmen die Lehrpläne von 1837 und 1856, selbst die der Gewerbeschulen, welche doch alle Ursache gehabt hätten, die Anwendungen zu betonen.[2]

1) Vgl. A. Richter, Der Einfluß, welchen der lateinische Gymnasialunterricht auf den mathematischen vermittelst der Hypothese von der formalen Bildung ausgeübt hat. Progr. Matthias Claudius-Gymnasium in Wandsbeck. Ostern 1894.

2) Mir fällt dabei immer jener Weise in den „Fliegenden Blättern" ein, der Nuß auf Nuß knackt, so daß sich Schalen hier und Kerne dort zum Berge auftürmen, und dem gar nicht der Gedanke kommt, daß man die Kerne doch auch essen kann.

Selbst Männer, die wir als Wegweiser zur praktischen Mathematik anzusehen haben, betonen ausdrücklich das Übergewicht des formalen Prinzipes. So sagt Kretschmer in einer vortrefflichen Abhandlung:[1]) „Eine Zucht des Geistes kann und soll der mathematische Unterricht vor allem sein, eine Schulung zu folgerichtigem Denken und zu klarem präzisen Sprechen. Nicht die Quantität der erworbenen positiven Kenntnisse, wenn auch diese nicht fehlen dürfen, bildet daher das Maß des Erreichten, sondern die Fähigkeit, mathematische Begriffe in voller Schärfe zu fassen, die mathematischen Gesetze gewandt und richtig zu gebrauchen und die Fähigkeit, den Inhalt der Gedankenreihen genau und kurz darzustellen."

Für den formalistischen Betrieb, bis zur letzten Konsequenz durchgeführt, ist es gleichgültig, mit welchem Stoffe die Mathematik ihr Ziel erreicht; ein Schüler, der in einem Gebiete folgerichtig denken gelernt hat, soll damit auch befähigt sein, ein anderes Gebiet sich anzueignen.[2])

Jedem Praktiker wird sich dabei sofort ein Gegenbeispiel aufdrängen. Ein Schüler, der an der Hand der Arithmetik in mathematische Denkweise eingeführt wurde, wäre damit noch lange nicht befähigt, sich nun auch die Geometrie gleichsam spielend anzueignen. Diese Tatsache, die natürlich keinen Moment verborgen bleiben konnte, hat wohl in erster Linie dazu geführt, daß man der rein logischen Schulung noch, wenn auch immer noch unter der Marke der formalen Bildung, die Schulung des räumlichen Anschauungsvermögens zur Seite gestellt hat.

Dieses Ziel ist seitdem nie aus dem Auge verloren worden; wie man darüber vor 20 Jahren dachte, lehrt die Anleitung von Reidt. Dann hat besonders Holzmüller, der auch Mitglied der Dezemberkonferenz 1890 war, in diesem Sinne gewirkt. Die methodischen Bemerkungen heben an späterer Stelle noch ausdrücklich hervor:

Dem Übelstande, daß der Unterricht auf der Oberstufe einen zu ausschließlich rechnerischen Charakter annimmt, wird sich durch Fortsetzung der Übungen in geometrischer Anschauung und Konstruktion steuern lassen. Besonders ist im stereometrischen Unterrichte, ganz abgesehen von dem Betriebe der darstellenden Geometrie, das Verständnis projektivischen Zeichnens vorzubereiten und zu unterstützen.

Daß heute zur Stärkung des Anschauungsvermögens mehr geschieht als früher, das kann man schon der Lehrbuch-Literatur entnehmen,

---

1) E. Kretschmer, Welche Aufgaben soll die Mathematik in der Gymnasial-Erziehung erfüllen? Programm Posen 1875.

2) In einer neuesten Erscheinung: A. Rohrberg, Beitrag zur Reform des mathematischen Unterrichts, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 41 (1910) S. 95 ff. heißt es: „Die Schüler sollen zum scharfen Sehen und zur Findigkeit erzogen werden, ihr Verstand soll fähig gemacht werden, das Unwesentliche vom Wesentlichen zu trennen und den springenden Punkt zu erkennen. Woran man ihnen diese Fähigkeit beibringt, ist völlig nebensächlich, man kann es an umfangreichem Material so gut und schlecht tun wie an wenigem" – allerdings wird dann noch hinzugefügt: „nur ist nicht jedes Material dazu gleich geeignet".

äußerlich auch dem Anwachsen der Modellsammlungen. Daß immer noch mehr getan werden kann und muß, ist aber wohl nicht zweifelhaft. Erst jüngst hat Killing[1]) in seinem Handbuch auf einen Punkt von allergrößter Tragweite hingewiesen; die planimetrischen Beweise begnügen sich häufig mit der Feststellung von Größenbeziehungen in Form von Gleichungen oder Ungleichungen, dabei kommen aber die ebensowichtigen Lagebeziehungen vielfach zu kurz.

Um 1890 herum setzt nun, von vornherein etwas radikal, damit aber auch stoßkräftig, eine Bewegung ein, die mit dem Dogma des formalen Prinzipes bricht und die angewandte Mathematik auf den Schild erhebt. Dem Vorwurf, „die angewandte Mathematik opfere die wissenschaftliche Strenge für das Linsengericht der praktischen Anwendung", begegnete man mit dem nicht weniger scharfen Einwand: „Die reine Mathematik opfere die Übereinstimmung mit der Wirklichkeit für das Linsengericht der formalen Methode."

Das Wiedervordringen der Anwendungen kam nicht unvermittelt. In der Lehrbuch-Literatur wandte man sich ihnen wieder mehr zu, und auch in einigen für die Einzelanstalten verbindlichen, in den Jahresberichten abgedruckten Lehrplänen tritt die angewandte Mathematik merklich hervor; man liest etwa von „Trigonometrischen Übungen, namentlich auch Höhen- und Distanzbestimmungen" (1877). Ebenso zeigen das die Abiturientenarbeiten, besonders bei den Realanstalten, bei denen ja auch das praktische Rechnen bis zur Prima als besonderes Fach beibehalten war.

Aber einen energischen Vorstoß macht die Bewegung erst 1891. A. Richter-Wandsbeck ist ihr Hauptführer. Der Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und in den Naturwissenschaften (jetzt Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts) nahm 1891 einstimmig eine Resolution an, welche in den Augen vieler die Mathematik zu einer Hilfswissenschaft der Naturwissenschaften degradieren mußte. Es wird verurteilt, daß „die Anwendungen der mathematischen Theorien vielfach in künstlich gemachten Beispielen bestehen, anstatt sich auf Verhältnisse zu beziehen, welche sich in Wirklichkeit darbieten." Dann heißt es weiter: „Das System der Schulmathematik (muß) von vornherein, unbeschadet seiner vollen Selbständigkeit als Unterrichtsgegenstand, im einzelnen mit Rücksicht auf die sich naturgemäß darbietende Verwendung in Physik, Chemie, Astronomie usw. und kaufmännischem Rechnen aufgebaut werden."

Die folgenden Tagungen des „Förderungsvereins" führten das weiter aus. Die Bestrebungen der Schulmänner begegneten der 1895 einsetzenden, von seiten der Praxis und der Hochschulen ausgehenden sogenannten Ingenieurbewegung, an deren Spitze Riedler stand.

1) W. Killing und H. Hovestadt, Handbuch des mathematischen Unterrichts. 1. Bd., Leipzig (Teubner) 1910.

Alles das wurde natürlich nicht ohne Widerspruch aufgenommen. Weite Kreise verurteilten mit Schärfe diese, wie Simon sagt, „bedenkliche Hinneigung zu nacktem Utilitarismus". Aber das Resultat war doch, daß die Anwendungen wieder zu allgemeinem Ansehen kamen. Man sah ein, daß auch ein Problem aus der angewandten Mathematik der reinen Mathematik mit all ihren Vorzügen nicht entbehren konnte, nur daß ein „Vorspiel" und ein „Nachspiel" hinzukam: die Idealisierung der Aufgabe aus der Rohform und die Beurteilung der Brauchbarkeit der Lösung.

Diesen Kompromiß spiegelt etwa ein Leitsatz der Rheinischen Direktoren-Versammlung von 1899 wider: „Die Mathematik hat als Unterrichtsgegenstand ihre eigenen Ziele zu verfolgen und darf nicht lediglich zur Dienerin eines anderen Unterrichtszweiges gemacht werden. Bei der Auswahl der Aufgaben jedoch sind die verwandten Fächer zum Zwecke der Konzentration des Unterrichts heranzuziehen und die Fortschritte in Wissenschaft, Technik und Industrie soweit zu berücksichtigen, als sie dem Auffassungsvermögen der Schüler zugänglich sind."

Die Lehrpläne von 1901 stehen auf demselben Standpunkte. In den methodischen Bemerkungen hat es nicht mit jenem oben zitierten allgemeinen Passus über das Ziel des Unterrichtes sein Bewenden. Bei einzelnen Gebieten wird noch ausdrücklich auf die Anwendungen hingewiesen. So heißt es gelegentlich der synthetischen und analytischen Geometrie der Kegelschnitte und der sphärischen Trigonometrie:

Jedenfalls ist hier wie überall darauf zu achten, daß neben der Sicherheit der Kenntnisse Gewandtheit in deren Anwendung zu erstreben ist, und daß dieser Gesichtspunkt bei der Auswahl und Ausdehnung des Lehrstoffes maßgebend sein muß.

Und den Anwendungen der Mathematik auf die Physik ist ein ausführlicher Abschnitt gewidmet:

Die selbständige Bedeutung, welche der Mathematik auf den höheren Lehranstalten zukommt, schließt nicht aus, daß — vor allem auf der Oberstufe — der Unterricht Gewinn davon hat, wenn durch die Aufgaben, deren Lösung er verlangt, auch die Anwendbarkeit der Wissenschaft auf anderen Gebieten, sei es des Lebens, sei es besonders der physikalischen Wissenschaften aufgezeigt und die Gelegenheit geboten wird, den mathematischen Sinn durch die Anwendung auf diese Gebiete zu üben. So wird es gestattet sein, die Teile der Physik, welche eine Verwertung zu Aufgaben zulassen, auch nach dieser Richtung noch mehr auszunützen und Übungen dieser Art nicht nur in den physikalischen, sondern auch in den mathematischen Stunden vorzunehmen.

Gegenwärtig ist die Rücksichtnahme auf die praktischen Anwendungen eine immer mehr gesteigerte; wir haben das im ersten Bericht (Band 1 Heft 1 dieser Abhandlungen) nachweisen können. „Die stetige Steigerung des Kulturlebens, insbesondere der gewaltige Fortschritt der Naturwissenschaften und der Technik, legt der Schule die Aufforderung nahe, den mathematischen Unterricht mehr als bisher den Zwecken der Allgemeinbildung dienstbar zu machen," so ein Leitsatz der Direktorenversammlung Schleswig-Holsteins im Jahre 1907. Ja,

diese Rücksicht auf das praktische Leben geht einigen schon wieder zu weit, wurden doch auf der Posener Direktoren-Versammlung desselben Jahres Befürchtungen laut, die Befolgung der Meraner Vorschläge (vgl. Abschnitt 23), die ja recht lebhaft für Fähigkeit räumlicher Anschauung und Anwendungen eintreten, möchte „zu einer Vernachlässigung der in den Lehrplänen an die Spitze gestellten Aufgabe der Schulung des Geistes führen".

Übrigens ist diese ganze Bewegung im Unterrichtsbetriebe um somehr bemerkenswert, als gegenwärtig an den deutschen Universitäten zumeist gerade die entgegengesetzte Strömung herrscht. In der Zeit der „Arithmetisierung" der Mathematik, wo man in weiten Kreisen die ganze Mathematik „als eine Abstraktion der arithmetischen Wirklichkeit" (Kronecker) auffaßt, ist ja selbst die Geometrie zur angewandten Mathematik geworden.

Die methodischen Bemerkungen erwähnen noch ein letztes Ziel, das der Mathematikunterricht wie alle anderen Fächer nicht aus dem Auge verlieren soll:

Demnächst muß, wie jeder andere Unterricht, so auch der mathematische sich die Pflege der Muttersprache angelegen sein lassen, ein Gesichtspunkt, der besonders bei der Korrektur der schriftlichen Arbeiten zur Geltung kommt, namentlich für die selbständigen häuslichen Ausarbeitungen, die in den oberen Klassen neben den regelmäßigen Klassenübungen in der Regel alle 4 Wochen zu fordern sind.

Wir haben in dem Bericht über die Lehrbücher auf die mathematische Sprache, ihre Vorzüge und ihre Nachteile hingewiesen; vieles was dort gesagt, ist auch vom Unterricht zu sagen.

Es wäre noch manches über mehr sekundäre Ziele des mathematischen Unterrichts hinzuzufügen[1]), über die Erziehung des Willens – man hat da besonders auf die Konstruktionsaufgaben hingewiesen –, über die Bildung des Gefühls, vor allem des ästhetischen Gefühls. Eine Ästhetik der Mathematik hat meines Wissens noch niemand geschrieben, aber sehen wir einmal vom Gegenständlichen der Mathematik ab, so gehört schon zu einer übersichtlichen und insofern ästhetischen Verteilung einer formelreichen Darstellung auf der „begrenzten Ebene" des Heftes oder der Wandtafel unbedingt eine gewisse Geschicklichkeit, die anerziehbar ist.[2]) Höfler erinnert z. B. an jenen Hexameter, der uns allen aus der Schulzeit noch im Ohre liegt:

quidquid agis, prudenter agas et respice finem,

wobei dann allerdings „finis" eine sehr konkrete Bedeutung hat.

1) Ich verweise in dieser Hinsicht besonders auf F. Pietzker, Das humanistische Element im exaktwissenschaftlichen Unterrichte. Programm Königl. Gymnasium zu Nordhausen. Ostern 1894. – Eine umfassende Darstellung des Zieles mathematischen Unterrichtes mit umfangreichem Literaturnachweis gibt M. Nath, Die Bildungsaufgabe der Mathematik im Lehrplan der höheren Schulen. Vortrag auf der 13. Hauptsammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften zu Halle a. S. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft 10 (1904) S. 73 ff., S. 97 ff.

2) Als Regel darf wohl gelten: Spare nicht am Papier, aber spare Tinte! – Die

14. Methodische Bemerkungen zum Rechenunterricht. Zweck des Rechenunterrichtes.

Es ist in diesem Berichte nicht möglich, ein Bild von der Methodik des Rechenunterrichtes überhaupt zu geben. Der Rechenunterricht ist eine der großen Domänen des Elementarunterrichtes, und da in den Kreisen der Elementarlehrer ein spekulativer Sinn für Formulierung und Begründung methodischer Grundsätze sehr ausgebildet ist, so liegt hier eine ausgedehnte Literatur und eine bunte Mannigfaltigkeit der Meinungen vor. Von modernsten, lediglich auf die Erfahrung gegründeten, unter dem Zeichen des Individualismus segelnden Methoden bis hin zu einer formalistisch bis in die kleinsten Einzelheiten ausgetüftelten und aus irgend einem philosophischen System heraus entwickelten Lehrform sind vielfache Übergänge und Schattierungen in Literatur und Unterrichtspraxis vertreten.[1]) Das auszuführen wird Sache eines Berichtes über den Rechenunterricht an Volksschulen sein, den die Internationale Mathematische Unterrichtskommission in Aussicht genommen hat. Hier soll nur zur Sprache kommen, was speziell dem Unter-

---

Lösung der Aufgabe, der Beweis des Lehrsatzes sei knapp und suche auf kürzestem Wege das Ziel; das erhöht, wie bei den Trauben die „Edelfäule", den Wert der Arbeit. Die äußere Form der Darstellung sei durch das Gebot der Übersichtlichkeit bestimmt und scheue nicht eine gewisse Raumverschwendung.

1) Als zwei Gegenpole möchte ich von Erscheinungen der letzten Jahre nennen: H. Knoche, Theoretisch-praktische Anleitung zur Erteilung des Rechen- und Raumlehrunterrichtes für Lehrerbildungsanstalten und Volksschullehrer. Arnsberg (Stahl) 1908 und A. Gerlach, Von schönen Rechenstunden. Leipzig (Quelle & Meyer) 1908. — Ich will, um einen Begriff von den Anschauungen der beiden Verfasser zu geben, die Behandlung einer einzelnen Stoffeinheit wiedergeben, die Ableitung und Einübung der Sechserreihe. Bei Knoche finden wir da folgende Vorschriften: a) An der Rechenmaschine sechs Kugeln vorschieben. „Wieviel Kugeln sind das?" Wieviel fehlen noch, bis der Zehner voll ist? Wenn ich noch einmal sechs Kugeln vorschiebe, wieviel werden es dann sein? Wie rechnest du also $6+6$ vor? ($6+4=10, +2=12, 6+6=12$). Wir mußten erst den Zehner voll machen und dann noch Kugeln an der zweiten Stange vorschieben. Jetzt kommt $12+6$ usw. b) Wiederholung, wobei Ringe auf die Schiefertafeln gezeichnet werden. c) Wiederholung, Ringe in die Luft schreiben, Chorsprechen. d) Vorrechnen ohne Veranschaulichung. Es geht der Reihe nach; jeder Schüler geht um sechs weiter. (Hierbei entdeckt man leicht die Zurückgebliebenen.) e) Aufsagen ohne Vorrechnen: 6, 12 usw.; dann so: 1 Woche $=6$ Arbeitstage, 2 Wochen $=12$ Arbeitstage, bis 10 Wochen $=60$ Arbeitstage. Dieses muß jeder Schüler geläufig hersagen können.

Welch ein Kontrast, wenn man hört, wie bei Gerlach dieselbe Sache gemacht wird: Der Lehrer hat an die Tafel einige Zigarrenkisten gemalt und den Preis auf den Deckeln notiert. Ein Junge wird als Verkäufer engagiert. Ein anderer kauft ein. „Moin!" [d. h. Guten Morgen]. „Moin!" „Ich möchte wohl Zigarren haben." „Was für eine Sorte wünschen Sie?" „Diese da." „Ach, die zu 6 Pfennig." Wieviel wollen Sie haben?" „6 Stück!" — Und dann so weiter.

Wer sich einen allgemeinen Überblick über die Methodik des Rechenunterrichtes verschaffen will, den verweise ich auf H. Gehrig, Methodik des Volks- und Mittelschulunterrichts. II. Band: Die mathematisch-naturkundlichen Fächer. Leipzig (Teubner) 1906.

richte an höheren Schulen eignet, und auch dabei beschränken wir uns auf einige Züge, die die methodischen Bemerkungen berühren.

Ich schicke ein Stichwortschema voraus, das die Verteilung des Pensums im Rechnen auf die einzelnen Klassen angibt:

VI. (Gymnasium und Realgymnasium 4 Stunden, Oberrealschulen 5 Std.): Die vier Rechenoperationen mit ganzen, benannten und unbenannten Zahlen. Die deutschen Maße und Gewichte. Anfangsgründe der Dezimalrechnung.

V. (Gymnasium, Realgymnasium, Oberrealschule 4 Std.): Teilbarkeit der Zahlen. Bruchrechnung. Dezimalrechnung. Einfache Regeldetri.

IV. (Gymnasium und Realgymnasium meist 2, Oberrealschulen meist 3 Std.): Dezimalbruchrechnung. Regeldetri-Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben (Prozent-, Zins-, Rabattrechnung).

U III. (Nur in den Gymnasien mit Ersatzunterricht, den Realgymnasien und den Oberrealschulen; meist 1 Std.) Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben und dem sog. kaufmännischen Rechnen.

Das Ziel des Rechenunterrichtes wird so formuliert:

Der Rechenunterricht hat Sicherheit und Geläufigkeit in den Operationen mit bestimmten Zahlen zu erstreben.

Es ist also hier eines nicht aufgeführt, die Einsicht in die Theorie der Rechengesetze; das bleibt im wesentlichen dem späteren mathematischen Unterrichte vorbehalten. Das sei besonders angemerkt, weil es anderwärts anders ist. In Frankreich z. B. schiebt sich zwischen die Rechenpraxis (= Calcul) und die Arithmetik und Algebra (= Algèbre) die Theorie des Rechnens mit positiven Zahlen (= Arithmétique) ein, die z. B. bereits das Quadratwurzelziehen bringt. Diese „Arithmétique" kehrt dann später auf der Oberstufe noch einmal wieder, wobei sie einen etwas mehr zahlentheoretischen Charakter annimmt.[1])

Der Rechenunterricht soll gleichzeitig – und damit wird ein den Volksschulen fremdes Ziel hinzugefügt – auch die Propädeutik des Algebra-Unterrichtes sein, damit der Sprung vom Zahlen- zum Buchstabenrechnen nicht ein allzu großer sei. Das heben die Bemerkungen besonders hervor:

Damit er (der Rechenunterricht) mit dem darauffolgenden arithmetischen Unterricht im Einklang stehe und diesen vorzubereiten und zu unterstützen geeignet sei, muß sowohl die Wiederholung der Grundrechnungsarten in Sexta als auch die Behandlung des Bruchrechnens unter Anlehnung an die mathematische Form geschehen, so daß dabei auch die Verwendung von Klammern und Vorzeichen dauernd geübt wird.

Bei der Verfolgung dieser Aufgabe entsteht bei vielen Anstalten eine Schwierigkeit daraus, daß der Rechenunterricht vielfach von Ele-

---

1) Vgl. W. Lietzmann, Arithmetik und Algebra in den höheren Schulen Frankreichs. Abschnitt II. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 37 (1906), S. 302 ff.

mentarlehrern erteilt wird[1]), während der Mathematikunterricht ganz in den Händen der Akademiker liegt; damit ist eine durch die Person begründete Diskontinuität geschaffen. Für die objektive Beurteilung dieser Frage ist es genau so wie bei der Frage des Linearzeichnens nicht gerade förderlich gewesen, daß vielerorts zu den sachlichen Erörterungen solche über Standesfragen hinzugekommen sind; in dem vorliegenden Bericht ist diese Seite der Frage selbstverständlich auszuschalten.

Es ist wohl kaum zweifelhaft, daß der Elementarlehrer im Durchschnitt die Schüler in der Rechenfertigkeit weiterbringt, als der Akademiker – in den oberen Klassen der Volksschule ist diese Fertigkeit zuweilen ins Erstaunliche gesteigert. Man rechnet eben um so schneller und sicherer, je mechanischer man verfährt.

Ebensowenig wird aber bestritten werden, daß der Einblick in die Natur der Rechenoperationen, die Frage nach dem Warum bei einer solchen einseitig hervorgekehrten Rechenfertigkeit im allgemeinen schlechter wegkommen wird, als es bei dem durchschnittlichen Unterricht des Akademikers der Fall ist. Ein klares Verständnis (um Mißverständnissen zu begegnen, bemerke ich ausdrücklich, daß ich nicht an Beweise im mathematischen Sinne denke), z. B. des Algorithmus der Division, werden wenige Schüler im Elementarunterricht erlangen. Und doch kommt es gerade auch darauf an: „Ausbildung der Vernunft, insbesondere der Urteilskraft durch Übung im Schließen" gehört auch zu den Zielen des Rechenunterrichtes. Da „lernen" z. B. die Schüler für das Aufsuchen des kleinsten Vielfachen etwa das folgende Verfahren (Höfler schreibt etwas anders und nennt es die „Galgenmethode"):

$$\begin{array}{r|l}
 & 8\cdot 12\cdot 18\cdot 27 \\ \hline
2 & 4\cdot 6\cdot 9\cdot 27 \\ \hline
9 & 4\cdot 6\cdot 1\cdot 3 \\ \hline
3 & 4\cdot 2 \\ \hline
2 & 2
\end{array}$$

$$2\cdot 9\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 216$$

oder in etwas anderer Schreibweise:

---

1) Eine neueste Verfügung vom 4. Februar 1910 setzt fest, daß nicht akademisch gebildete Lehrer, die die Mittelschullehrerprüfung bestanden haben, an höheren Schulen nur in den Unterklassen (VI, V und IV) und – außer in anderen Fächern – im Rechnen, doch nicht in der Mathematik unterrichten dürfen. An den Realschulen war früher Unterricht durch Elementarlehrer auch in höheren Klassen zulässig.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 8\cdot 12\cdot 18\cdot 27 \\ \hline 3 & 4\cdot 6\cdot \not{9}\cdot 27 \\ \hline & 4\cdot \not{2}\cdot 9 \end{array}$$

$$2\cdot 3\cdot 4\cdot 9 = 216.$$

Und wenn dann im späteren Algebra-Unterrichte die Frage nach dem „Warum?“ fällt, so antwortet der Schüler sicherlich mit dem stereotypen „Das haben wir so gelernt!“ – Eines der Schülergebote, die, glaube ich, Cauer einmal aufgestellt hat, heißt: Du sollst nicht sagen, es steht so im Buch. Man könnte mit gleicher Berechtigung für den mathematischen Unterricht auch das andere hinzufügen: Du sollst nicht sagen, das haben wir so gelernt.

Simon, und in gleichem Sinne sprach sich schon Reidt aus, sagt: „Das Gymnasium ist keine Elementarschule, darum soll der Gymnasiast auch anders rechnen, meinetwegen nicht so gut, d. h. nicht so schnell, aber besser, d. h. mit mehr wirklichem Verständnis, und ergo überlasse man den Rechen-Unterricht dem, dem er gebührt, dem Mathematiker.“ Und einen anderen Punkt trifft Höfler: „Es sollte sich von selbst verstehen, daß die Lehrer der Mathematik auch schon in den untersten Klassen ein deutliches Bild davon haben müssen, wo es mit dem ganzen Unterricht auch in den obersten Klassen hinauswill.“

Ein objektiver Bericht erfordert auch die Berücksichtigung des gegenteiligen Standpunktes. Da ist nun sicher, daß mit der besseren Ausbildung in den Volksschullehrerseminaren viele offenbare Nachteile fortfallen. Nur ein Beispiel für viele: Daß man, wie früher gang und gäbe, in der einfachen Regeldetri von der richtigen (z. B. 7 m kosten 35 ℳ, wieviel kosten 9 m?) und der umgekehrten (z. B. 7 Arbeiter arbeiten an einer Arbeit 18 Stunden, wie lange arbeiten 9 Arbeiter daran?) sprach, und nun für diese beiden Fälle einfach ein Schema für die Ausrechnung hatte, wobei dann ein Teil der Schüler mit Eleganz das falsche Schema wählte, dürfte heute zu den großen Seltenheiten gehören. Man löst die Aufgaben, wie die Lehrpläne ausdrücklich vorschreiben, durch Schluß auf die Einheiten, und schult damit das Urteil der Schüler.

Und weiter ist vom Standpunkt der Elementarlehrer einzuwenden: Der Unterricht kann mit Rücksicht auf den späteren Mathematik-Unterricht erteilt werden, sofern der Lehrer einen Einblick in die Grundlagen der Arithmetik und gleichzeitig in den Gesamtlehrstoff der höheren Schulen besitzt; das ist bereits jetzt bei vielen Elementarlehrern der Fall, und wird dann die Regel sein, wenn geeignete Kurse dafür Sorge tragen.

Bei den Rechenaufgaben ist von allergrößter Wichtigkeit die Wahl der Sachgebiete, denn der Unterricht soll den Schülern für das prak-

tische Leben nützliche Kenntnisse übermitteln. Dazu äußern sich die Bemerkungen:

Andererseits sind die Verhältnisse des praktischen Lebens, schon von der untersten Stufe ab, namentlich beim Kopfrechnen, nicht zu vernachlässigen. Die Kenntnis der deutschen Münzen, Maße und Gewichte ist durch die Anschauung zu vermitteln.

Und später:

Auch sind bei der Behandlung der sog. bürgerlichen Rechnungsarten alle Aufgaben auszuschließen, denen für die Schüler unverständliche Vorkommnisse und Gepflogenheiten des rein geschäftlichen Verkehrs zugrunde liegen.

Daß die Schüler von den beim Rechnen mit benannten Zahlen benutzten Maßen auch eine richtige Vorstellung haben, sollte selbstverständlich sein; und doch ist viel dagegen gesündigt worden. Erst allmählich ist man dazu übergegangen, dem Sextaner 1 m, 1 qm, 1 cbm auch wirklich zu zeigen; die Antwort auf Simons Frage: „ich möchte wohl wissen, in wievielen Sexten Deutschlands dem Schüler wirklich etwas vorgewogen wird?“ würde noch heute nicht so ausfallen, wie zu wünschen wäre. Und dabei kann man keineswegs sagen, daß damit bereits das Ideal erreicht wäre. Schon tritt die Forderung mathematischer Laboratorien, in denen die Schüler selber messen und wägen, immer dringender auf und begegnet sich mit den Bestrebungen, die auf die Einführung eines Handfertigkeitsunterrichtes in der untersten Klasse der höheren Schulen zielen. Nicht daß der Lehrer dem Schüler etwas vorwäge, ist das Ziel, sondern daß solches der Schüler selber tue.[1])

Was die Sachgebiete für die Rechenaufgaben anlangt, so ist parallelgehend mit den Bestrebungen bei der algebraischen Aufgabe eine immer größer werdende Rücksichtnahme auf wirklich vorkommende Verhältnisse zu verzeichnen. Es gibt heute, um nur eines herauszugreifen, wohl schon eine ganze Anzahl Schulen, in denen die Schüler etwa der Sexta wirklich ein Kursbuch in die Hand bekommen, und danach Fahrpreis-, Zeit-, Wegberechnungen u. dgl. ausführen. Wie man das moderne Wirtschaftsleben, die Statistik usw. heranziehen kann, das lehrt die Aufgabensammlung von Schülke[2]) und übrigens

---

1) Ohne für diese Fragen umfangreichere Literatur anzugeben, was Sache eines von der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission in Aussicht genommenen Berichtes über Raumlehre sein wird, der auf den Kindergartenbetrieb auf der einen, auf die höheren Schulen auf der anderen Seite übergreifen wird, möchte ich hier doch auf drei kleine Werke hinweisen: A. Pabst, Praktische Erziehung. Leipzig (Quelle & Meyer) und W. Wetekamp, Selbstbetätigung und Schaffensfreude in Erziehung und Unterricht. 2. Aufl. Leipzig (Teubner) 1910. G. Kerschensteiner, Grundfragen der Schulorganisation. 2. Aufl. Leipzig (Teubner) 1910.

2) A. Schülke, Aufgabensammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie. 1. Teil. 1906. 2. Teil, 2. A. Leipzig (Teubner) 1910.

ein allerdings aus Budapester Schulerfahrung erwachsener Aufsatz von Goldziher.[1]

Für die Rechenpraxis von großer Wichtigkeit ist das abgekürzte Rechnen. Man multipliziert:

unabgekürzt:	abgekürzt:
2,7543 · 17,134	2,7543 · 17,134
2 7543	2 7543
1 92801	1 9280
27543	275
82629	83
110172	11
47,1921762	47,192

In entsprechender Weise kann man abgekürzt dividieren und die Quadratwurzel ausziehen. Manche Stimmen lehnen das abgekürzte Rechnen wenigstens für die Gymnasien ab, andere wieder halten es für außerordentlich wichtig, da alles praktische Rechnen im Grunde abgekürztes sein müsse.

Die amtlichen preußischen Lehrpläne geben über die Durchnahme des abgekürzten Rechnens keine Weisungen.[2] Dagegen finden sich entsprechende Bemerkungen in den Lehrplänen einzelner Anstalten. So schreibt z. B. der Lehrplan des Realgymnasiums Elberfeld in U. II vor der Lehre der Logarithmen noch besonders eine „Wiederholung der abgekürzten Rechnung mit Dezimalbrüchen" vor.

Die Frage, wann die Durchnahme zu geschehen hat, wird verschieden beantwortet. Die einen setzen sie für IV an, andere bringen sie erst etwa in O III. Höfler empfiehlt in seiner Didaktik, die Methode gelegentlich der Ausziehung von Quadratwurzeln durch stellenweise fortschreitendes Probieren zu bringen.

Bei den Aufgaben des sog. bürgerlichen Rechnens hat lange Zeit der Geschäftsbereich des Kleinkaufmanns den Aufgabenstoff geliefert, wenigstens für die Gymnasien. So einseitig das auch ist, ebenso

1) K. Goldziher, Der Rechenunterricht auf der Unterstufe der höheren Schulen. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 39 (1908), S. 289 ff.

2) In älteren sächsischen Lehrplänen ist „Rechnung mit unvollständigen Dezimalzahlen" für O III angesetzt, in den neueren ist das verschwunden. In den neuen österreichischen Lehrplänen findet sich die Bemerkung: Das abgekürzte Rechnen wird nicht vor der dritten Klasse (= U III) eingeführt, da es erst in dieser ungezwungen Anwendung findet. Denn werden hier die Bestimmungsstücke (Rechteckseiten, Kreisdurchmesser u. dgl.) möglichst oft durch wirkliches Messen der vom Schüler selbst gezeichneten Figuren gewonnen, so ergibt sich ihm auch ein Urteil über die meist sehr beschränkte Genauigkeit der gegebenen und zu berechnenden Größen und somit auch die Vermeidung von Ziffern über den erreichbaren Genauigkeitsgrad hinaus.

ist jedenfalls zu verwerfen, wenn nun in den oberen Klassen der Realanstalten der Standpunkt des Großkaufmanns mit Diskont, Scheckverkehr, Wechsel usf. der alleinherrschende ist.

Oben war gesagt, daß an den Realanstalten in U. III eine Stunde dem kaufmännischen Rechnen vorbehalten ist; die Entstehung mancher Realanstalten aus Handelsschulen läßt es begreiflich erscheinen, wenn an einzelnen Anstalten dieser Unterricht fakultativ noch bis O III fortgeführt wird. Daß der Unterricht im kaufmännischen Rechnen häufig über den Rahmen einer allgemein bildenden Anstalt hinausgeht, sei aus einem eingeführten Lehrbuche mit zwei Beispielen belegt, die sogar den kaufmännischen Jargon beibehalten:[1])

Auf welche Summe lautet ein Wechsel, von welchem man auf die Zeit vom 27. Juli bis 15. August ℳ 4.26 Diskont à 6 % abzog?

100 Kap. zu 6 % in 18 Tg. = $^{3}/_{10}$ ℳ Disk.;
folglich: $^{3}/_{10}$ Disk. erford. eine reine Val. v. 100; wv. 4,2 Disk.?
0,3 in 420 = 1400 ℳ r. Valuta.

Und noch ein ausgeführtes Beispiel in Form einer Rechnung:

Nota für Herrn N. N., hier,
über von Ihnen à 4 % in Diskont genommene:

ℳ 700.–	pr. 30. Mai . . .	20 Tage . . .	=	ℳ 1.56
„ 2500.–	„ 15. Juni . . .	35 „ . . .	=	„ 9.72
„ 1810.–	„ 18. „ . . .	39 „ . . .	=	„ 7.60
ℳ 5000.–				ℳ 18.78

ℳ 18.88 Diskont
„ 16.67 Provision à $^{1}/_{3}$ %
„ 5.– Ctge. à 1 ‰
„ 4.10 Stempel und Porto

ℳ 44.65

ℳ 4955.65 Saldo per heute.

Dergleichen Aufgaben gehören wohl besser in die Handelsschulen, wenngleich nicht zu leugnen ist, daß eine gewisse Kenntnis von Kurszettel, Scheck- und Effektenrechnung heute für jeden Gebildeten unentbehrlich ist. Die Ansicht Simons: „Tatsache ist, daß der Großhandel keine Lehrlinge aus der Quinta nimmt und im kleinen Verkehr die vier Spezies und gesunder Menschenverstand ausreichen“, ist wohl etwas übertrieben.

Übrigens gilt ein gleiches auch später bei der Anwendung der Reihenlehre auf Zinseszins- und Rentenrechnung, der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Versicherungsrechnung. So nützlich eine Einsicht in die Grundlagen ist, so wenig sollte man den Versuch machen, das wirkliche Geschäftsgebaren usw. der Sparkassen, Rentenbanken und Versicherungsgesellschaften in die Schule zu bringen.

1) M. Löwe, Aufgaben zum kaufmännischen Rechnen. I. Teil, 25. A. 1906. II. Teil, 22. A. 1906 Leipzig (Klinkhardt).

15. Methodische Bemerkungen zum Rechenunterricht. Fortsetzung.

Zur Bruchrechnung bemerken die Lehrpläne:

Ebenso ist die Einführung in das Wesen der Brüche anschaulich zu gestalten und bei den Erklärungen davon auszugehen, daß die Schüler mit Bruchteilen wie mit benannten Zahlen rechnen lernen.

Ein strittiger Punkt, über den eine Einigung noch heute nicht erzielt ist, ist der, ob man, wie die Lehrpläne es tun, mit den Dezimalbrüchen oder, genauer, mit den Dezimalzahlen beginnen soll, oder mit den gemeinen Brüchen. Die einen sagen, ein Dezimalbruch ist eben ein Bruch mit dem Nenner 10, 100 usf. und das Rechnen mit ihm setzt die Rechengesetze für allgemeine Brüche voraus; die andern knüpfen an dezimale Maße an und sagen, 7,55 *M* bedeutet für den Schüler nicht $7^{55}/_{100}$ *M*, sondern 7 *M* 55 *Pf.* Für eine Diskussion der Gründe für und wider ist hier nicht der Platz.[1])

Man legt in Deutschland, zumal an den Realanstalten, großen Wert auf das Kopfrechnen. Über dieses und sein Verhältnis zum schriftlichen Rechnen besagen die methodischen Bemerkungen:

Kopfrechenaufgaben mit kleinen Zahlen gehen zur Vermittelung des Verständnisses auf allen Stufen den schriftlichen Aufgaben mit größeren Zahlen voran. Verwickeltere Rechenaufgaben sind tunlichst zu vermeiden.

Daß die Kopfrechenaufgaben möglichst einfach gewählt werden, liegt in der Natur der Sache; ebenso, daß man das Kopfrechnen methodisch mit dem schriftlichen Rechnen verknüpft und nicht etwa, wie es doch die sächsischen Lehrpläne von 1882 taten, „wöchentlich eine Stunde Kopfrechnen" ansetzt.

Bemerkenswert ist dagegen, daß auch für das schriftliche Rechnen verwickelte Aufgaben verboten werden; das entspricht dem analogen Bestreben in der Algebra, Häufungen von Klammern, Bruchausdrücken usw. zu vermeiden.

Bei dem schriftlichen Rechnen begegnet man an preußischen höheren Schulen zwei Methoden der Subtraktion. Da eine Einheitlichkeit in dieser Hinsicht noch nicht vorhanden ist, seien sie hier erwähnt. Nach der ursprünglich allgemein und heute noch an den Volksschulen fast ausschließlich üblichen Methode rechnet der Schüler die Aufgabe

$$\begin{array}{r} 7235 \\ -\ 2684 \\ \hline 4551 \end{array}$$

in der folgenden Weise (die beim Sprechen betonte Zahl ist fettgedruckt):

1) Man vergleiche dazu etwa die folgenden Autoren: Gegen die Vorwegnahme der Dezimalrechnung ist M. Simon, Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Leipzig (Teubner) 1906, Abschnitt VIII (S. 35 ff.), und Didaktik, S. 74 und 75. Für die Vorwegnahme ist Höfler, Didaktik, S. 74 ff. H. Müller im Handbuch für höhere Schulen (S. 443, 444) läßt die Frage unentschieden, polemisiert aber gegen Simon.

4 von 5 ist 1, 8 von 13 ist 5, 6 von 11 ist 5, 2 von 6 ist 4. Anders die sogenannte österreichische Methode; da heißt es: 4 und 1 ist 5, 8 und 5 ist 13, 6 [und 1 ist] 7 und 5 ist 12, 2 [und 1 ist] 3 und 4 ist 7, wobei das in eckigen Klammern stehende noch weggelassen werden kann.

Der Vorteil der letztgenannten Methode tritt wesentlich bei ihrer Ausdehnung auf Division und Quadratwurzelziehen hervor. An Stelle

$$\begin{array}{l} 57723 : 213 = 271 \\ \underline{426} \\ 1512 \\ \underline{1491} \\ 213 \\ \underline{213} \\ - \end{array}$$

rechnet man:

$$\begin{array}{l} 57723 : 213 = 271 \\ \underline{1512} \\ \underline{213} \\ - \end{array}$$

in Worten: 213 in 577 geht 2 mal, 2 mal 3 ist 6 und 1 ist 7, 2 mal 1 ist 2 und 5 ist 7, 2 mal 2 ist 4 und 1 ist 5 usf. Es wird also dadurch, daß weniger geschrieben wird, an Zeit gespart.

Es ist gesagt worden, daß bei der österreichischen Methode die Gelegenheit zum Fehlermachen größer ist, dem wird aber entgegengehalten, daß das Fehlermachen durch das geringere Maß an Übung bestimmt wird. Je mechanischer man rechnet, desto sicherer. Rechensicherheit kann mit beiden Methoden erreicht werden.

Wir kommen zur letzten der „methodischen Bemerkungen" über den Rechenunterricht.

Der eigentliche Rechenunterricht findet auf dem Gymnasium in Quarta, auf den Realanstalten in UIII seinen Abschluß. Die Sicherheit im Rechnen ist aber im arithmetischen Unterrichte der folgenden Klassen durch fortgesetzte Übungen zu erhalten.

Diese fortgesetzte Übung kann durch immanente Wiederholung gelegentlich der Gleichungslehre usw. erreicht werden.[1]) Hier und da werden aber umfangreichere Wiederholungen nötig werden.

Ich will statt vieler Worte ein Unterrichtsbeispiel geben, das ich beim Besuche eines Gymnasiums gehört habe. Es hat sich in einer Obersekunda herausgestellt, daß die Schüler keine Sicherheit im Rechnen mit großen Zahlen haben. Es wird also ein bis zwei Wochen lang mit großen Zahlen gerechnet. Aber nicht irgendwelche des Interesses bare Aufgaben werden gestellt, sondern zwei umfangreichere numerische

1) Nur ein Beispiel dazu: Die ersten Reihen der Binominalkoeffizienten lassen sich wunderschön aus den Potenzen der Zahl 11 herauslesen.

Berechnungen durchgeführt, wobei denn zur Ermunterung darauf hingewiesen wird, wie Gauß und viele Größen unserer Wissenschaft sich gern mit derartigen Rechnungen abgegeben haben.

Zunächst handelte es sich um die Berechnung von sin 1°, oder, da die Gleichung für sin 1° etwas kompliziert und sin 9° ja bekannt ist, von sin 10°. Für sin 10° ergibt sich, da

$$\sin(3\alpha) = 3 \cdot \sin\alpha - 4 \cdot \sin^3\alpha$$

ist, wenn man

$$\alpha = 10^0 \quad \text{und} \quad 2 \cdot \sin 10^0 = x$$

setzt, die Gleichung

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Die Wurzel dieser Gleichung wird dann nach der Newtonschen Näherungsmethode auf 10 Stellen berechnet.

Die zweite Aufgabe war die an das Delische Problem anknüpfende Berechnung von $\sqrt[3]{2}$. Ist 1 ein erster Näherungswert, dann ist, wenn x der wahre Wert, also $x^3 = 2$ ist, der Fehler:

$$y = x - 1.$$

Danach wird

$$y^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = -3x^2 + 3x + 1$$

und so kann man bei weiterer Potenzierung von y alle Potenzen von x mit größerem Exponenten als 3 fortschaffen. Da $y < 1$, nähert sich y^n mit wachsendem Exponenten immer mehr der Null; man erhält also eine quadratische Näherungsgleichung der Form

$$0 = ax^2 + bx + c.$$

16. Methodische Bemerkungen zum propädeutischen Unterricht in der Raumlehre.

Alle Gebiete der Mathematik, an die die Schule herantritt, sollen in ihren ersten Anfängen einen propädeutischen Charakter haben. Dieser methodischen Forderung tragen die Lehrpläne Rechnung. Wir haben das für Arithmetik bereits angedeutet. Bei der Planimetrie ist der propädeutische Unterricht ein ursprünglich viel diskutierter, seit den letzten Lehrplänen aber nicht mehr in seiner Nützlichkeit und Notwendigkeit umstrittener sicherer Besitz der höheren Schulen. Die „methodischen Bemerkungen“ sagen:

Der geometrische Unterricht beginnt mit einem Vorbereitungsunterricht, welcher, von der Betrachtung einfacher Körper ausgehend, das Anschauungsvermögen ausbildet und zugleich Gelegenheit gibt, die Schüler im Gebrauche von Zirkel und Lineal zu üben.

Auf die ganze Frage des propädeutischen Unterrichtes werfen moderne psychologische Untersuchungen neues Licht. A. Cramer führt in

einem Vortrage[1]) an, daß es den Kindern vor der Pubertät unmöglich ist, „in langen Vorstellungsreihen selbständig zu denken. Sie denken und urteilen in Kurzschlüssen.“ Danach müssen in diesen Jahren längere Beweise zu einer Reihe auswendig gelernter Assoziationen werden.

Was die Lehrbücher für den propädeutischen Unterricht bieten, ist in meinem ersten Berichte kurz dargestellt; dort bin ich auch auf die Verknüpfung mit dem eigentlichen systematischen Geometrie-Unterricht eingegangen. An den meisten Anstalten wird auf den Gebrauch von Lehrbüchern allerdings verzichtet, dafür sind manchmal für die Unterrichtenden bis ins einzelne gehende Lehrpläne vorhanden.[2]) Neue Gesichtspunkte, die sich nicht in den Lehrbüchern finden, treten aber dabei kaum auf.

Vielleicht ist es angebracht, hier noch einmal an den fusionistischen Charakter der Propädeutik zu erinnern, wie er z. B. in dem Lehrplan des Elberfelder Realgymnasiums sehr schön zum Ausdruck kommt:

Propädeutischer Anschauungsunterricht, ausgehend von der Betrachtung der einfachsten Körper. Kugel und Kreis, Würfel und Quadrat, Oblongsäule und Rechteck, Rhomboeder und Rhombus, Rhomboidsäule und Rhomboid.

Die amtlichen Lehrpläne schreiben bei den Gymnasien und Realgymnasien für die erste Zeit des Quarta-Unterrichtes, bei den Oberrealschulen bereits für Quinta (so auch bei Reformanstalten) vor:

Propädeutischer geometrischer Anschauungsunterricht. Übungen im Gebrauche von Zirkel und Lineal.

Es gibt zwar noch immer eine große Anzahl von Anstalten, die trotzdem Propädeutik nur ganz wenig oder gar nicht treiben, auf der anderen Seite aber auch solche, die ihr erheblich mehr Zeit widmen, als die amtlichen Lehrpläne vorsehen.[3]) Ich kann hier nicht den Versuch einer allgemeinen Darstellung des propädeutischen Unterrichtes machen[4]), ich begnüge mich deshalb damit, eine Gruppe von Anstalten herauszugreifen, an denen dieser Unterricht, wie es scheint, sehr gepflegt wird, die Berliner Realschulen.

1) A. Cramer, Pubertät und Schule. Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Heft 4. Leipzig (Teubner) 1910; auch in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 40 (1909), S. 553 ff. und in den Monatsheften für den naturwissenschaftlichen Unterricht 3 (1910), S. 1 ff.

2) Ich habe in den Fachkonferenzen eingehend durchberatene Pläne von vielen Folioseiten eingesehen. Die beste Anschauung von einem propädeutischen Unterricht, wie er sein soll, scheinen mir die Skizzen zu einer „Vorschule der Raumlehre“ in Höflers Didaktik zu geben.

3) Einen mehrjährigen vielstündigen propädeutischen Unterricht in dem Umfange, wie er sich etwa in Frankreich und Italien findet, wo wie bei uns in der Physik der Lehrstoff in zwei konzentrischen Kreisen behandelt wird, gibt es in Preußen wohl nirgends. Wohl aber ist er in anderen Staaten, z. B. in Baden, und übrigens auch in Österreich vorhanden.

4) Eine solche ist von anderer Seite vorbereitet und dürfte in Kürze erscheinen.

Von den 14 Realschulen sind im folgenden die Lehrpläne von 12 berücksichtigt, von den übrigen fehlten mir die Angaben. Die Stundenverteilung für den propädeutischen Unterricht ist recht mannigfach.

In Realschule	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	14
Stundenzahl: Sexta	1	1	1	1	—	1	—	—	1	—	—	1	—
„ Quinta	1	2	2	2	1	2	1	2	2	2	1	2	2
Zusammen:	2	3	3	3	1	3	1	2	3	2	1	3	2

Propädeutischer Unterricht in den Berliner Realschulen.

Als Pensum wird angegeben:

Sexta: Übung der geometrischen Anschauung an einfachen Körpern und Figuren. Einfachste Übungen mit Lineal, Zirkel (R. 2) und Transporteur (R. 3 und 4). Die 6. R. fügt noch hinzu: Die wichtigsten geometrischen Begriffe und Konstruktionen, die 10. R. Messen und Schätzen von Strecken.

Für die Quinta wird, soweit in dieser Klasse der propädeutische Unterricht erst einsetzt (R. 5, 7, 9, 11, 12, 14), etwa dasselbe wie eben gesagt. Die 7. R. fügt hinzu: Entwicklung geometrischer Vorstellungen aus Anschauung und Bewegung. Fundamentalaufgaben. Linien in und am Kreise. Tetraeder, Pyramide, Kugel. Die 14. R. wünscht Übung auch im Gebrauche des Millimetermaßes und des rechtwinkligen Dreiecks. Die 12. R. fordert u. a. Anfertigung einfacher Körper.

In mehreren Anstalten Preußens, das sei hier eingeschoben, geschieht die Anfertigung mathematischer Modelle in einem wahlfreien Handfertigkeitsunterricht. Es dürfte bekannt sein, daß der „*Slojd*“ der nordischen Länder, der *manuel-training* Amerikas auch in Deutschland immer mehr Eingang findet, wie denn auch der naturwissenschaftliche Unterricht heute stark im Zeichen der Selbstbetätigung der Schüler steht.[1])

Diejenigen Schulen, um wieder auf die Berliner Realschulen zurückzukommen, die bereits in Sexta mit der Propädeutik begonnen haben, fordern für Quinta meist „weitere“ Übungen. Zuweilen werden einzelne Teile des späteren Pensums in anschaulicher Form vorweggenommen. So heißt es bei der 2. R.: „Anschauliche Behandlung von Winkeln

1) Vgl. die in Abschnitt 14 gelegentlich der Ausführungen über praktische Messungen im Rechenunterrichte angegebene Literatur. In diesem Zusammenhange sei auch eine „Mathematische Experimentiermappe“ von G. Noodt genannt, deren Erscheinen der Verlag B. G. Teubner-Leipzig für die nächste Zeit ankündigt. — Insoweit die Selbstbetätigung Sache des naturwissenschaftlichen Unterrichts ist, sei auf J. Norrenberg, die naturwissenschaftlichen Schülerübungen an den höheren Lehranstalten Preußens. Monatsschrift für höhere Schulen 8 (1909) S. 481 ff. verwiesen.

und anderen einfachen geometrischen Figuren", bei der 4. R.: „Winkellehre und einfache Konstruktionen ohne Beweis. Gewöhnung an den mathematischen Ausdruck." Noch weiter gehen die 9., 10. und 13. Realschule, wo geradezu eine propädeutische Dreiecks-, Vierecks-, Kreis- und Flächenlehre dem späteren System vorausgeschickt wird. Es heißt z. B. bei der 9. R.: Begriff und Einteilung der Winkel. Konstruktionen der Fundamentalaufgaben. Einfache Konstruktionen von Dreiecken, Vierecken und aus der Kreislehre. Ausmessen von Figuren.

Wie in der Planimetrie, so soll auch in der Trigonometrie und Stereometrie der Unterricht propädeutisch einsetzen. Ich begnüge mich, indem ich wieder auf meinen ersten Bericht und auf das im Abschnitt 6 Gesagte verweise, mit der Anführung des entsprechenden Absatzes:

Der Fortfall eines vorbereitenden Kursus der Trigonometrie und Stereometrie in der UII des Gymnasiums[1]) soll für die spätere Behandlung dieser Gebiete keineswegs ausschließen, daß sie zunächst einen propädeutischen Charakter trage. Die Trigonometrie ist zunächst anschaulich, d. h. geometrisch zu behandeln und, um möglichst bald zur Auflösung von Dreiecken zu gelangen, sind zunächst nur diejenigen Formeln einzuüben, welche dazu unbedingt erforderlich sind. Ebenso ist in der Stereometrie von der Betrachtung einfacher Körper, wie Würfel und Prisma, auszugehen und erst später eine strengere systematische Lehrweise anzuwenden. Bei den für die Realanstalten vorgesehenen Vorkursen in der Trigonometrie und Stereometrie ist jene propädeutische Behandlungsweise durchweg und ausschließlich inne zu halten. Hier, wie auch schon auf den früheren Stufen, werden Modelle, mathematische Wandtafeln usw. für die Veranschaulichung und Vertiefung des Unterrichts sich hilfreich erweisen.

17. Methodische Bemerkungen zu den Konstruktionsaufgaben.

Der Abschnitt, der den Konstruktionsaufgaben gewidmet ist, besagt:

Auf allen Anstalten ist schon von III an der Übung im Konstruieren die sorgfältigste Pflege zu widmen; sie muß bis in die oberste Klasse neben den dort behandelten Gebieten fortgesetzt werden. Dabei sind jedoch unbedingt alle Aufgaben auszuschließen, deren Lösung die Kenntnis entlegener Lehrsätze oder besonderer Kunstgriffe erfordert. Der Lehrer hat auch hier durch besonnene Auswahl solcher Aufgaben, deren Lösung nach häufig anwendbaren Methoden und aus dem bereits bekannten Lehrstoff heraus erfolgen kann, sowie durch klare Anleitung in dem Schüler das Gefühl des selbständigen Könnens zu wecken und die bildende Kraft dieser Übungen zur Geltung zu bringen.

---

1) Die vorhergehenden Lehrpläne sahen wie an den Realanstalten auch an den Gymnasien einen solchen Kursus in Trigonometrie und Stereometrie vor. Der Wegfall ist vielfach bedauert worden; man hätte lieber, wie es die Meraner Vorschläge tun, den Logarithmus nach OII verschoben gesehen als diese trigonometrische und stereometrische Propädeutik. – Um der Gefahr, die Schüler der Gymnasien möchten bei Aussetzen des stereometrischen Unterrichts von der propädeutischen Raumlehre der Quarta an bis zur Prima in der Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens schwer geschädigt werden, einigermaßen vorzubeugen, ist mehrfach eine Art gemäßigte „Fusion" vorgeschlagen; ich nenne besonders J. Schacht, die Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens im mathematischen Unterricht des Gymnasiums. Programm Kgl. Marien-Gymnasium 1903.

Die Einschätzung der Konstruktionsaufgabe ist eine wechselnde gewesen und ist es so auch heute noch. Auf der einen Seite Warnungen vor Überschätzung, so von Wernicke, von A. Richter und vielen anderen, und dazu oft wiederkehrend die bekannte Geschichte, wie Dirichlet-Vater die Konstruktionsaufgabe, die Dirichlet-Sohn in der Tertia oder sonstwo als häusliche Arbeit aufbekommen hat, nicht lösen kann.[1]) Auf der anderen Seite eine unvergleichlich hohe Wertung: „Die Konstruktionsaufgabe ist in den Mittelpunkt des planimetrischen Unterrichts zu stellen", so ein Leitsatz der Rheinischen Direktoren-Versammlung vom Jahre 1899. Zwischen den beiden Extremen dann die verschiedensten Übergänge.

Die Lehrpläne legen der Konstruktionsaufgabe jedenfalls außerordentliche Wichtigkeit bei; im Gymnasium kehrt von UIII an im Pensum jeder Klasse der Hinweis auf die Konstruktionsaufgaben wieder, beim Realgymnasium und den Oberrealschulen fehlt ein solcher ausdrücklicher Vermerk allerdings für die Prima. Die elementar-synthetische, d. h. im wesentlichen Apollonische Kegelschnittlehre und die Darstellende Geometrie gibt aber auch in dieser Klasse ausgiebige Gelegenheit zu Konstruktionen.

Über die Art der Aufgaben und insbesondere über die auch von der oben angeführten Stelle angedeutete Methodenlehre bringt mein erster Bericht ein Kapitel. Hier sei nur einiges über die Form gesagt.

In den meisten Fällen wird die Reihenfolge Aufgabe, Analysis, Konstruktion, Beweis, Determination innegehalten. Oft fällt dabei als praktisch entbehrlich der Beweis, noch häufiger die Determination fort, zumal wenn immer nur mit zahlenmäßig gegebenen Werten operiert wird. Von anderer Seite ist dagegen mit großem Nachdruck auf den Wert der Determination hingewiesen, auch darauf, wie sie Gelegenheit zur Untersuchung funktionaler Abhängigkeiten gibt. Meist verfährt man wohl nach dem Satze: „Die Determination ist auf die Fälle zu beschränken, welche ein mathematisches Interesse darbieten."

Um die Form — es haben sich da oft ganz bestimmte Wendungen im Ausdruck herausgebildet — im einzelnen zu zeigen, will ich zwei Beispiele aus Abiturientenarbeiten wortgetreu wiedergeben.

Ich werde im folgenden noch mehrfach Abiturientenarbeiten abdrucken; ich möchte dazu ganz allgemein die Bemerkung einschalten, daß es sich dabei nicht um nachträglich verbesserte, sondern bis auf ausdrücklich angedeutete Kürzungen wortgetreue — auch das „Schülerdeutsch" ist nicht ausgemerzt — Beispiele handelt, die

1) In einem neueren Aufsatze über die Konstruktionsaufgabe im gymnasialen Unterricht findet sich das Monstrum

$$\Delta \text{ aus } \frac{h_b - h_a}{u - v}, \quad a + b, \quad p - q.$$

durchaus nicht immer gerade die besten Schüler des Jahrganges zu Verfassern haben. Wenn also Mängel zutage treten, so bedenke man, daß es sich um Klausurarbeiten handelt, die unter dem Druck des Examens angefertigt sind; es schienen mir aber diese Reifeprüfungen die zur Kennzeichnung der Resultate geeignetsten, gewissermaßen amtliche Dokumente zu sein.

Von den Abiturienten eines Gymnasiums wurde die folgende Aufgabe behandelt: Ein Dreieck zu zeichnen aus den beiden Abschnitten, welche eine Winkelhalbierende auf der Gegenseite erzeugt und einer nicht zugehörigen Seitenhalbierenden ($u = 5$ cm, $v = 2$ cm, $s_a = 4$ cm).

Ein Schüler schreibt:

Gegeben sind drei Strecken k, l, m.

Gesucht ist ein Dreieck, in dem die Abschnitte, welche eine Winkelhalbierende auf der Gegenseite erzeugt, und eine nicht zugehörige Seitenhalbierende bestimmte Größen haben.

Analysis: Angenommen, das nebenstehende Dreieck ABC sei das gesuchte. Dann ist

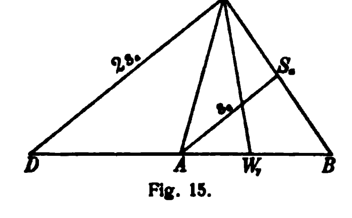
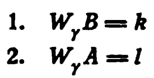


Fig. 15.



1. $W_\gamma B = k$
2. $W_\gamma A = l$
3. $A S_a = m$.

Um das Dreieck zeichnen zu können, verschiebt man die Seitenhalbierende AS_a parallel mit sich selbst bis C. Sie möge die Verlängerung von BA in D schneiden. Da S_aB gleich S_aC ist, ist nach den Sätzen von Strahlen, geschnitten durch Parallelen, AD gleich AB und DC gleich 2 S_aA.

Die Punkte A, B und D lassen sich finden, da AB ($= u + v$) bekannt ist und AD gleich AB ist. C liegt, weil DC gleich $2 \cdot AS_a$ ist, 1. auf dem Kreise um D mit 2 m als Halbmesser. Nach bekanntem Lehrsatze verhalten sich die Abschnitte, welche die Winkelhalbierende auf der Gegenseite erzeugt, ebenso wie die ihnen anliegenden anderen Seiten. Da diese Abschnitte gleich k und l gegeben sind, verhält sich CB zu CA wie k zu l; C liegt also 2. auf dem Kreise, welcher AB im Verhältnis $l : k$ harmonisch teilt. So ist das gesuchte Dreieck genügend bestimmt.

Konstruktion: Man legt eine Strecke, die gleich $k + l$ ist, hin, nennt sie AB und verdoppelt sie über A hinaus bis zu einem Punkte D. Dann beschreibt man um D mit 2 m als Radius den Kreis. AB teilt man im Verhältnis l zu k harmonisch, macht die gefundene Entfernung der Teilpunkte zum Durchmesser eines Kreises und nennt einen Schnittpunkt dieses Kreises mit dem vorher gezeichneten C. Dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis: Das Dreieck ABC entspricht der Aufgabe, denn AB ist gleich $k + l$ nach Konstruktion, und die beiden anderen Seiten verhalten sich nach Konstruktion wie die Abschnitte, welche von der Winkelhalbierenden erzeugt sind, zueinander. Die Seitenhalbierende AS_a ist gleich m, weil nach Konstruktion ihre Parallele durch C gleich 2 m ist und BS_a sich zu BC verhält, wie AS_a sich zu DC verhält, nämlich wie 1 : 2. Das Dreieck ABC entspricht also der Aufgabe.

Von einigen Seiten ist die Forderung erhoben worden, man solle diese strenge Form der Darstellung verlassen. „Das wäre ja wohl dasselbe, als wenn ein Lehrer des Deutschen sämtliche Aufsätze nach dem Schema der Chrie anfertigen ließe", sagt Schwering einmal. Und der anonyme Verfasser der kleinen, bereits zitierten Methodik:

Ist Mathematik Hexerei? führt in einem Dialog zwischen zwei Kollegen aus, man solle die Analysis beiseite lassen. Von einem Gymnasium deshalb ein zweites Beispiel, das eine nicht so starre Form zeigt:

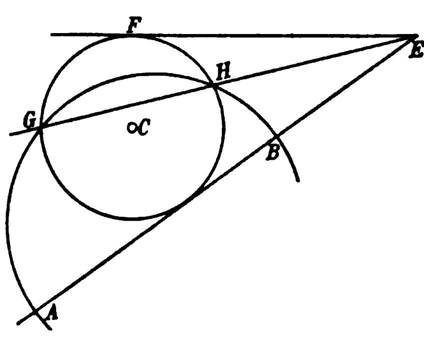


Fig. 16.

Aufgabe: Auf der Tangente eines Kreises sind auf verschiedenen Seiten des Berührungspunktes zwei Punkte A und B gegeben. Man lege durch A und B einen Kreis, der den ersteren berührt.

Lösung: Ich lege durch die Punkte A und B einen Kreis, der den gegebenen in H und G schneidet. Die Verlängerungen von HG und AB schneiden sich in E. Von E lege ich an den Kreis um C die Tangente EF und lege endlich durch A, B, F einen Kreis, der die Aufgabe löst. Eine uneigentliche Lösung ist die Gerade AB, wenn man sie als Kreis betrachtet, dessen Mittelpunkt im Unendlichen liegt.

Beweis: Der Lösungskreis um O geht durch die Punkte A, B, F, was unmittelbar aus der Zeichnung folgt. Da F ein Punkt des gegebenen Kreises ist, so hat der Lösungskreis wenigstens einen Punkt mit dem gegebenen gemein, ebenso mit EF, der Tangente an den Kreis um C. Angenommen, er schneidet die Tangente zum zweiten Male in F'. Dann ergibt sich

$$EF \cdot EF' = EA \cdot EB$$

bezüglich des Lösungskreises,

$$EA \cdot EB = EG \cdot EH$$

bezüglich des Hilfskreises;

$$EG \cdot EH = EF^2$$

bezüglich des gegebenen Kreises. Folglich wäre

$$EF^2 = EF \cdot EF'$$

oder

$$EF = EF'$$

Dies ist unmöglich, da ein Teil nie gleich seinem Ganzen ist. F und F' fallen also zusammen. EF ist also an den Lösungskreis wie an den gegebenen Tangente. F ist Berührungspunkt beider Kreise, folglich ist der Lösungskreis Berührungskreis an den gegebenen.

18. Die Bewegungsfreiheit in den Lehrplänen.

Die methodischen Bemerkungen enthalten noch eine ganze Reihe bisher noch nicht berührter Abschnitte. Aus ihnen allen wollen wir nur ein wichtiges Charakteristikum der Lehrpläne herauslesen, die Bewegungsfreiheit, die dem Lehrer oder besser der Fachkonferenz der einzelnen Anstalt gelassen wird.

Zu einer Frage, die seit langem die Schulmänner beschäftigt, nehmen die Lehrpläne keine Stellung:

Ob die verschiedenen Gebiete des Pensums neben- oder nacheinander zu behandeln sind, ist nach den jeweiligen Verhältnissen der Anstalt zu entscheiden.

Dieses Nacheinander der Fächer bezieht sich nur auf die einzelnen Klassen, der gesamte Lehrstoff zeigt durchaus das Nebeneinander der

Fächer. Young vergleicht unser Verfahren mit dem amerikanischen (soweit nicht Reformen inzwischen eingesetzt haben) und kommt zu dem Schlusse, daß unser Weg der praktischere sei. Er stellt eine Liste auf, welche die Zeiten angibt, die den einzelnen Gebieten in Preußen (er hat offenbar das Gymnasium im Auge) und ebenso in Amerika gewidmet sind:

Fächer:	Jahre: in Preußen,	in Amerika
Arithmetik	3	$4\frac{1}{2}$
Planimetrie	5	1
Algebra	6	$2\frac{1}{8}$
Stereometrie	3	$\frac{1}{2}$
Trigonometrie	2	$\frac{1}{8}$.

Für die einzelnen Klassen ist die Frage aufgeworfen worden, ob man Arithmetik bzw. Algebra und Geometrie nach- oder nebeneinander betreiben solle. Einer Posener Direktoren-Versammlung vom Jahre 1895 lag die These vor: es empfiehlt sich, die verschiedenen Gebiete der Mathematik in derselben Klasse nicht nebeneinander, sondern nacheinander zu betreiben und namentlich einem ganz neu auftretenden Gebiete anfangs die gesamte Stundenzahl zuzuweisen. Die These fand aber, namentlich mit Rücksicht auf die UIII des Gymnasiums, für welche Klasse sie wohl in erster Linie gedacht, keine Annahme. Dagegen wurde ein fast gleichlautender Leitsatz, der nur durch die Einschiebung „zeitweise" etwas abgemildert war, 1899 auf einer Direktoren-Versammlung in der Rheinprovinz angenommen.

Was den Lehrstoff der Mittelklassen anlangt, so geht die Tendenz der methodischen Bemerkungen auf eine möglichste Sichtung des Materials und auf eine Scheidung in das System inhaltlich und auch gedächtnismäßig fest einzuprägender Lehrsätze auf der einen und den Übungstoff auf der anderen Seite. In welcher Weise dies zu geschehen hat, ist wieder in das Urteil der Fachkonferenzen und des einzelnen Lehrers gelegt. Es heißt da zunächst:

Am Gymnasium ist bei der durch manche Rücksichten gebotenen Beibehaltung von drei Stunden in U und OIII eine planmäßige Sichtung des Lehrstoffes geboten. Aber auch an den Realanstalten empfiehlt es sich, z. B. in der Planimetrie, nur die für das System unentbehrlichen Sätze einzuprägen, alles andere als Übungsstoff, womöglich in der Form von Aufgaben, zu behandeln. In der Arithmetik wird von manchen Gebieten abgesehen werden können, die auf späteren Stufen seltener Verwendung finden, wie z. B. von der Division eines umfangreichen Polynoms durch ein anderes, von der Quadrat- und Kubikwurzelausziehung aus größeren algebraischen Summen u. ä.

Auf zwei Punkte in diesen Ausführungen sei besonders hingewiesen. Der eine ist die sorgsame Behandlung des Gymnasiums. Die späteren Abschnitte werden zeigen, daß trotz des beträchtlichen Stundenunterschiedes der Lehrstoff der Realanstalten äußerlich nur um ein weniges umfangreicher als der der Gymnasien ist, und das gilt vor allem von den Mittelklassen. Klein-Schimmack bemerken zu

diesem Punkte: „Es scheint hier und an manchen anderen Stellen ... doch die Idee mitgewirkt zu haben, die Humanisten als Träger aller Berechtigungen zu schonen und darum die Realisten keine höhere Lehrstufe nach irgendeiner Richtung erreichen zu lassen, damit sie den Humanisten nicht in bestimmter Hinsicht unbedingt voraus seien!" Übrigens werden die Anhänger des humanistischen Gymnasiums in ihren Bestrebungen unterstützt auch von einer Gruppe von Oberrealschulmännern, die bei jeder Überschreitung des Gymnasialpensums das Gespenst der Fachschule zu sehen vermeinen. Das zweite Moment ist jene Scheidung in System und Übungsmaterial. Der Gedanke wird an letzter Stelle noch einmal aufgenommen, wohl in schweigender Bezugnahme auf die in allen Ländern so viel erörterte Frage der mathematischen Begabung.

Ich will auf die rege Diskussion über diese Frage nicht eingehen; die herrschende Ansicht kann vielleicht so resümiert werden: Zweifellos gibt es besonders für Mathematik beanlagte Schüler, diese scheiden aber für die Beurteilung des allgemeinen Durchschnittes aus, auf den der Unterricht zugeschnitten ist.[1]) Das Maß der Anforderungen ist nun derart, daß dieser allgemeine Durchschnitt dem Unterricht durchaus folgen kann, oder negativ ausgedrückt, daß die Zahl derjenigen, deren Fähigkeiten nicht für die Bewältigung des Lehrstoffes der Schule ausreichen, für die Mathematik nicht größer als für andere Fächer ist.

Wenn das für frühere Zeiten vielleicht scheinbar nicht überall zutraf, so lag das zum Teil an der fehlenden Methodik – die Methodik der Mathematik hat nicht die Tradition und die Entwicklungszeit gehabt wie beispielsweise diejenige der alten Sprachen. Einer allgemeinen Gegensätzlichkeit mathematischer und sprachlicher Beanlagung läßt sich an der Hand der Abiturientenzeugnisse statistisch entgegentreten.

Wie gesagt, die Bemerkungen gehen auf diese Frage nicht ein, sie klingt nur mit an:

Da die Schwierigkeiten, welche der mathematische Unterricht in den oberen Klassen zuweilen macht, erfahrungsgemäß fast ausnahmslos auf Lücken in den Grundlagen beruhen, so ist auf die Einprägung dieser Grundlagen im Anfangsunterricht die nötige Zeit und Sorgfalt zu verwenden. Dabei empfiehlt es sich, an den einzelnen Anstalten den unentbehrlichen Gedächtnisstoff besonders der unteren und mittleren Stufe festzustellen und durch stete Wiederholungen in den folgenden Klassen zu befestigen.

Das System wird meist in den Lehrsätzen eines Leitfadens gegeben sein, die Aufstellung eines besonderen Satzkanons für die einzelnen Anstalten dürfte nach meinem Wissen recht selten sein. Immer-

---

1) Von manchen Seiten, so besonders von J. Petzoldt, sind Vorschläge gemacht, für hervorragend Befähigte Sonderschulen zu gründen. Es hat den Anschein, als ob diese Vorschläge aus dem Studium bloßer Diskussion in den nächsten Jahren in das des praktischen Versuchens treten werden. Es soll nicht verschwiegen werden, daß gewichtige pädagogische Bedenken gegen diese Sonderschulen für Befähigte erhoben sind.

hin sind sogar Stimmen laut geworden, die ein allgemein-verbindliches Satzsystem wünschen. In dem Werke von Lexis über die Reform des höheren Schulwesens sagt M. Heynacher: „Sehr wünschenswert wäre die amtliche Ausgabe eines ganz detaillierten Lehrplans der Mathematik, der für alle Klassen den Lehrstoff in allen Einzelheiten unter Beschränkung auf das Allernotwendigste genau enthielte und in Anmerkungen die nicht durchzunehmenden Sätze bestimmt hervorhöbe." Würde diesem Vorschlage, der wohl von der Anschauung, die Mathematik sei ein starres Aggregat bestimmter Lehrsätze, ausgeht, Folge geleistet, so wäre das eine gewaltsame Erschwerung, wenn nicht der Tod jeglichen Fortschrittes des mathematischen Unterrichtes.

Erfreulicherweise steht solchen Wünschen nach einer genauen Festlegung des Pensums bis in die kleinsten Einzelheiten die Anschauung der höchsten Schulbehörde entgegen. Man braucht nur immer wieder das schon einmal zitierte Wort des Ministers Studt anzuführen: „Die Lehrpläne wollen nur als grundlegender Anhalt, nicht aber als strikte Vorschriften aufgefaßt sein!"

Für die Oberklassen heben das auch die Lehrpläne selbst gelegentlich ausdrücklich hervor. So wird z. B. von den Oberrealschulen gesagt, daß je nach den Verhältnissen entweder das arithmetische oder das geometrische Pensum weitergeführt werden kann. Das wird dann in den methodischen Bemerkungen noch ausdrücklich unterstrichen:

An den Realanstalten wird auch der Ausbau der einzelnen Lehrgebiete nach den Jahrgängen der Schüler etwas verschieden sein, und zwar an der Oberrealschule weitergehend als am Realgymnasium. Die in den Lehrplan als wahlfrei aufgenommenen Gebiete näher zu umgrenzen, scheint nicht angängig. Es soll auch nicht als durchaus notwendig bezeichnet werden, sie eingehend zu betreiben. Aber andererseits soll die Möglichkeit, diese Disziplinen unterrichtlich genauer durchzuarbeiten, nicht vorenthalten werden. Die so gesammelten Erfahrungen werden späterhin eine mehr ins einzelne gehende Festsetzung der Lehrziele ermöglichen.

Aus diesem Passus, ebenso auch aus einem sogleich noch anzuführenden, läßt sich die Berechtigung herleiten, auch bei den jetzt vorhandenen Lehrplänen einen guten Teil von Reformvorschlägen durchzuführen. Wie sehr in der Tat von dieser Freiheit Gebrauch gemacht wird, das soll hier nicht erst angedeutet werden, der ganze dritte Teil dieser Arbeit wird vielmehr gerade dieser Frage gewidmet sein. Jener in letzter Zeit viel zitierte Satz der methodischen Bemerkungen, der vordem wohl so manchem entgangen war, heißt:

In der obersten Klasse wird auf den verschiedenen Lehrgebieten neben der fortgesetzten Übung im Lösen von Aufgaben eine zusammenfassende Rückschau auf den erledigten Lehrstoff anzustreben sein. Dabei wird sich Gelegenheit bieten, den Schülern ein eingehendes Verständnis des Funktionsbegriffes, mit dem sie schon auf früheren Stufen bekannt geworden sind, zu erschließen.

Daraus geht hervor, daß die Lehrpläne eine Beschäftigung mit dem Funktionsbegriff in den Ober-, aber auch schon in den Mittelklassen

wünschen, ohne daß über das Wie in der Pensenverteilung Andeutungen gemacht sind.

Der Abschnitt weist auf eine zusammenfassende Rückschau hin; eine solche kann sich um den Funktionsbegriff gruppieren; eine andere, die die Lehrpläne besonders anführen, um den Zahlbegriff. Es ist anzunehmen, daß die Lehrpläne, wenn sie es auch nicht besonders hervorheben, eine zusammenfassende Rückschau auch für die Geometrie wünschen. Leider geschieht in dieser Hinsicht erheblich weniger als in der Arithmetik. Eine methodisch wertvolle Ausgestaltung werden diese Rückblicke erhalten, wenn, worauf allerdings nicht ausdrücklich hingewiesen wird, das historische Moment in geeigneter Weise berücksichtigt wird.

19. Der Lehrplan des Gymnasiums.

Der Lehrstoff der höheren Schulen wird altem Herkommen gemäß in einzelne Kapitel geteilt, deren Inhalt meist durch ein kurzes Stichwort gekennzeichnet wird. Der Umfang dieser Kapitel wird im einzelnen Falle nicht angegeben; welche Sätze, Konstruktionen usw. also z. B. zum Kapitel Flächenlehre gehören, darüber sind nähere Vorschriften nicht gegeben. Darüber zu entscheiden ist Sache des Lehrers, der sich dabei vom Lehrbuche, das an der Anstalt eingeführt ist, oder auch von den Festsetzungen der Fachkonferenz beraten lassen wird. Immerhin hat sich dank der Lehrbücher eine ziemlich eindeutige Tradition zum mindesten für das Minimum herausgebildet.

Hier soll nicht auf den Umfang der einzelnen Gebiete, etwa auf einen Satzkanon, eingegangen werden; nur an zwei Stellen will ich von diesem Verfahren abweichen, einmal bei den Zielleistungen der einzelnen Anstalten, die ich durch Abiturientenarbeiten auch im einzelnen belegen will, und dann, weil hier von längerer Tradition noch nicht die Rede sein kann, bei den im letzten Teile dieses Berichtes zu kennzeichnenden Einflüssen der Reformbewegung. Im übrigen aber beschränke ich mich auf ein Stichwortschema, indem ich darin dem von Klein und Schimmack in ihrem Buche benutzten Verfahren folge.

Der Lehrplan von 1901 verteilt den Lehrstoff der Gymnasien auf die einzelnen Klassen in der Weise, wie es das auf nächster Seite folgende Schema andeutet; dabei sind UI und OI nicht besonders unterschieden.

Auf kleinere Abweichungen, die sich hier und da finden, und die meist auf eine Weiterführung des Pensums hinauslaufen, will ich nicht im einzelnen eingehen; nur zwei Abarten des Gymnasialpensums sollen besprochen werden.

Wir hatten früher gesehen, daß einzelne Gymnasien bzw. Progymnasien auf der Unterstufe an Stelle des Griechischen englischen Ersatzunterricht eingeführt haben und daß dabei für Mathematik mehr oder weniger viele Stunden über den üblichen Lehrplan hinaus

Klasse	Arithmetik und Algebra	Geometrie
VI	Rechnen mit positiven ganzen und gebrochenen Zahlen; die bürgerlichen Rechnungsarten.	–
V		–
IV		Propädeutik. Lehre von Geraden, Winkeln und Dreiecken.
UIII	Grundrechnungen mit relativen Zahlen mit Benutzung der Gleichungen ersten Grades.	Erweiterung der Dreieckslehre. Viereckslehre. Kreis (Sehnen und Winkel).
OIII	Proportionen; Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.	Kreislehre; Flächenlehre.
UII	Potenzen, Wurzeln [1]) und Logarithmen (4- oder 5-stellig). Einfache quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.	Ähnlichkeitslehre; Kreisberechnung.
OII	Gleichungen, besonders quadratische, mit mehreren Unbekannten.	Harmonische Punkte und Strahlen; Transversalen. Sogenannte algebraische Geometrie. Goniometrie; einfache trigonometrische Berechnungen.
I	Arithmetische Reihen 1. Ordnung und geometrische Reihen (Zinseszins- und Rentenrechnung). Kombinatorik (mit Wahrscheinlichkeitsrechnung). Binomischer Lehrsatz für positive ganze Exponenten. Wiederholender Aufbau der Arithmetik. [2]) Gleichungen, auch höheren Grades, die auf quadratische zurückführbar sind.	Weitere planimetrische Konstruktionen und trigonometrische Berechnungen. – Stereometrie und deren Anwendung auf die mathematische Erd- und Himmelskunde. Perspektivisches Zeichnen räumlicher Gebilde. Koordinatenbegriff (mit Anwendung auf die Kegelschnitte. [3])

Schema des Lehrplans der Gymnasien.

1) Beim Wurzelausziehen beschränken sich die meisten humanistischen und realistischen Anstalten auf Quadratwurzeln; nur einige wenige geben in ihren Lehrplänen auch die Kubikwurzeln an. Die Mehrzahl der Lehrer ist jedenfalls für den Wegfall des Kubikwurzelausziehens, wenngleich nicht verschwiegen werden darf, daß erst neuerdings wieder Höfler in seiner Didaktik (S. 162, 163) lebhaft dafür eingetreten ist.

2) Die Lehrpläne fügen hinzu: „Erweiterung des Zahlenbegriffs durch die algebraischen Operationen von der ganzen positiven bis zur komplexen Zahl". Der Ausdruck „algebraische Operationen" dürfte nur versehentlich angewandt sein, denn es liegt wohl im Sinne der Lehrpläne, daß auch der transzendenten Irrationalitäten dabei gedacht wird.

3) Ergänzend sagen dazu die methodischen Bemerkungen, daß die Grundeigenschaften der Kegelschnitte auch in synthetischer Form gegeben werden: „Aber es ist weder in analytischer noch in sogenannter neuerer Geometrie ein systematischer Unterricht beabsichtigt." Eine These der Rheinischen Direktoren-Versammlung 1899 lautet: „Auf dem Gymnasium ist bei den Grundlehren von den Kegelschnitten eine gemischte Behandlungsweise der analytischen vorzuziehen."

in UIII bis UII verfügbar werden. Die amtlichen Lehrpläne sagen über den Mathematikunterricht an diesen Anstalten:

An denjenigen Anstalten, welche die Einrichtung von Ersatzunterricht an Stelle des Griechischen haben, soll je eine Stunde in UIII und OIII auf kaufmännisches Rechnen, elementare Körperberechnung und das Notwendigste über Wurzelgrößen, in UII auf die Anfänge der Trigonometrie verwendet werden.

In praxi ist die Lehrplangestaltung der Anstalten mit Ersatzunterricht eine sehr mannigfaltige, wie schon daraus erhellt, daß die einen nur eine, andere bis zu vier Stunden für die Mathematik freistellen. Am naheliegendsten ist die im engsten Anschluß an den Vorschlag erfolgende Verteilung, wie sie etwa das Städtische Gymnasium Wattenscheid[1]) hat:

UIII Kaufmännisches Rechnen.

OIII Das Notwendigste über Wurzelgrößen. Berechnung der Oberfläche und des Inhalts einiger Körper.

UII Trigonometrie.

Dieser Lehrplan kehrt nun in den verschiedensten kleinen Variationen wieder. So fällt z. B. im Städtischen Progymnasium Werl und im Städtischen Progymnasium Ratingen das UII-Pensum weg, das Progymnasium Eupen verlangt in OIII ausdrücklich: Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel. Das Königliche Gymnasium Wittstock dehnt das Rechnen bis OIII aus und nimmt dafür in UII Stereometrie und Trigonometrie usf. Zum Schluß nur noch ein etwas ausführlicherer Lehrplan vom Gymnasium in Northeim:

UIII 1 Std. Zinsrechnung und verwandte Geldrechnungen, Warenberechnungen, Gesellschaftsrechnung und Mischungsrechnung, zusammengesetzte Regeldetri und Kettensatz.

OIII 1 Std. Mischungsrechnung, Münz- und Wertpapierrechnung, Terminrechnung. Geometrische und algebraische Rechnungen.[2])

UII 2 Std. Planimetrie: Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Konstruktionsaufgaben. Arithmetik: Wiederholungen. Trigonometrie: Grundlegung der Geometrie; einfache Dreiecksberechnungen. Stereometrie: die einfachen Körper nebst Berechnungen von Kantenlängen, Oberflächen und Inhalten.

Erheblicher als bei diesen Anstalten mit Ersatzunterricht sind die Abweichungen bei den Reformanstalten. Zunächst müssen ja hier die Lehrstoffe in den Mittelklassen denen der Realanstalten angeglichen werden. Das ist aber nicht der einzige Grund für eine, bei gleichbleibender Zielleistung durchgeführte Verschiebung des Stoffes aus oberen in untere Klassen. Das späte und dann sehr kräftige Einsetzen der Sprachen in höheren Klassen hat rein zahlenmäßig, wie wir schon gesehen, zur Folge, daß die Oberklassen in Mathematik eine Stunde darangeben müssen. Dafür erhalten sie auf den Unter- und Mittelstufen entsprechende Mehrzahlen gegenüber dem alten Gymnasium.

---

1) Hier und in den folgenden Fällen sind die in den Programmen von 1909 veröffentlichten Lehrpläne zugrunde gelegt.

2) Es handelt sich hier um Flächen- und Körperberechnungen, sowie um eingekleidete algebraische Aufgaben aus den letzten Abschnitten von Chr. Harms und A. Kallius, Rechenbuch. 24. A. Oldenburg und Leipzig (Stalling) 1908.

So ist das Typische des Lehrplanes der Reformgymnasien darin zu suchen, daß zunächst ein etwa einjähriger Vorsprung vor den alten Gymnasien rasch erreicht wird, der dann allmählich wieder sich verringert, bis er in der Prima ganz fortgefallen ist.

Von seiten der Mathematiker sind gegen dieses Verfahren lebhaft Einwendungen gemacht worden. Man hat besonders darüber Klage geführt, daß die Gestaltung des Lehrplanes lediglich durch die sprachlichen Fächer bedingt sei, während „dem exakt-wissenschaftlichen Unterricht überall gerade der Platz zugewiesen worden ist, der nach Erfüllung der für den Sprachunterricht als unerläßlich erachteten Forderungen übrig blieb.“ 1)

Die Lehrpläne der Reformgymnasien weichen in Kleinigkeiten voneinander ab, wir halten uns hier an denjenigen des Goethe-Gymnasiums in Frankfurt a. M., indem wir zum Vergleich noch die des Königlichen Friedrichs-Gymnasiums in Breslau und die des Königlichen Marien-Gymnasiums zu Posen heranziehen.

Das Pensum der Sexta ist das alte; in Quinta begegnen wir einer Propädeutik der Geometrie. Auch im Rechenunterrichte wird die vermehrte Stundenzahl bereits für eine erste Vorbereitung auf die Algebra ausgenutzt; so wird beispielsweise in einem Falle ausdrücklich auf den Potenzbegriff hingewiesen. –

Für das weitere begnüge ich mich mit der Angabe des Vorsprunges gegenüber dem amtlichen Plane des alten Gymnasiums:

IV. Arithmetik: Grundrechnungen mit allgemeinen Zahlen. (Posen schreibt vor: Die drei ersten Grundrechnungen mit absoluten und relativen Zahlen. Leichte Gleichungen ersten Grades. Leichte Textgleichungen. Breslau fordert: Multiplikation von algebraischen Summen. Divisionen.)
Geometrie: Vieleckslehre und Kreislehre erster Teil.

U III. Arithmetik: Potenzen mit positiven ganzen Exponenten, Proportionen, Quadratwurzeln. (Posen bringt die Quadratwurzeln erst in O III.)
Geometrie: Flächenlehre.

O III. Arithmetik: Gleichungen zweiten Grades. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen. – Die Logarithmenlehre in O III und das Quadratwurzelziehen in U III bedeuten ein Überschreiten sogar des Oberrealschullehrplanes. –
Geometrie: Ähnlichkeitslehre, Kreisberechnung.

U II. Arithmetik: Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Zinseszinsrechnung.
Geometrie: Anfangsgründe der Trigonometrie und Stereometrie. – Beim Abschluß der Unterstufe ist damit etwa das Ziel der Realanstalten erreicht.

O II. Arithmetik: Arithmetische und geometrische Reihen; Zinseszins- und Rentenrechnung.
Geometrie: Fortführung der Trigonometrie und Stereometrie (zum Pensum der O II des alten Gymnasiums gehört noch u. a. die sogenannte neuere Geometrie, d. h. die Lehre von den harmonischen Punkten, Strahlen usw. Dieses Kapitel ist hier nach der Prima verschoben).

1) Vgl. in A. Gutzmer, Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Leipzig (Teubner) 1908, den ersten Bericht der sog. Stuttgarter Vorschläge: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht an den Reformschulen.

I. Hier ist die eben erwähnte sogenannte neuere Geometrie durchzunehmen. Der Lehrplan gibt auch Maxima- und Minima-Aufgaben an, die zwar nicht im amtlichen Lehrplan des alten Gymnasiums ausdrücklich erwähnt werden, die aber doch recht oft dazu genommen werden. Der Ausdruck „Graphische Darstellungen" im Anschluß an den Koordinatenbegriff weist darauf hin, daß der Reformgedanke in diesem Lehrplan eine, wenn auch sehr späte Stelle findet.

Wir werden im dritten Teile dieses Berichtes noch Lehrpläne auch von Reformanstalten kennen lernen, bei denen ein Eingehen auf die mathematische Reformbewegung von der Unterstufe an zu verzeichnen ist.

20. Das Lehrziel des Gymnasiums.

Den Lehraufgaben, welche die Verteilung des Stoffes auf die einzelnen Klassen bringen, stellen die Lehrpläne einen Abschnitt „Allgemeines Lehrziel" voran. Das ist das folgende:

Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen mit bestimmten Zahlen, besonders auch im Kopfrechnen, und in der Anwendung dieser Fertigkeiten auf die gewöhnlichen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens. Arithmetik bis zur Entwicklung des binomischen Lehrsatzes für ganze positive Exponenten. Algebra bis zu den Gleichungen zweiten Grades einschließlich. Die ebene und körperliche Geometrie und die ebene Trigonometrie. Der Koordinatenbegriff. Einige Grundlehren von den Kegelschnitten.

Die Rechenfertigkeit kommt in der Reifeprüfung nur mittelbar zur Geltung. — Die den deutschen Schulen eigentümliche Lehre von der allmählichen Erweiterung des Zahlenbereiches auf Grund des Permanenzgesetzes endet auf dem Gymnasium in einer kurzen Theorie der komplexen Zahlen.

Übrigens sind gegen diese Herrschaft des Permanenzprinzipes neuerdings mehrfach Einwendungen gemacht: zum mindesten ist die Forderung, der formalen, rein logischen Definition stets die anschauliche in Zahlgerade und Zahlebene zur Seite treten zu lassen, unbedingt berechtigt. Denn anders könnte es leicht gehen, wie es Mephisto in einer mathematischen Parodie des Faust sagt:

Denn eben, wo die Resultate fehlen,
Stellt ein Symbol zur rechten Zeit sich ein...
Symbole lassen trefflich sich traktieren,
Mit einem Strich ist alles auszuführen.
Und mit Symbolen kommt man immer aus. —

Wie weit in der Lehre von den komplexen Zahlen gegangen wird, ist nicht eindeutig zu beantworten. Auch die Art der Definition, ob mehr anschaulich im Sinne von Gauß oder mehr formal — arithmetisch oder mit Benutzung des Vektorbegriffes, ist wechselnd. Eine moderne Einführung ist die folgende, die einer Lehrstunde in einem Berliner Gymnasium entnommen ist[1]):

1) Vgl. dazu die etwas anders geartete Entwicklung von O. Janzen, Die komplexen Zahlen im Unterricht der höheren Lehranstalten. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 40 (1909) S. 487 ff.

Es werden Zahlen a in einer Zahlebene definiert, die auf einer Geraden liegen, welche mit der positiven Seite der Geraden der reellen Zahlen den Winkel α einschließt. Dann definiert man, was unter $a_\alpha + b_\beta$ zu verstehen ist, daß

$$a_\alpha \cdot b_\beta = (a \cdot b)_{\alpha+\beta}$$

sein soll, also

$$(a_\alpha)^n = (a^n)_{n\alpha}$$

$$\sqrt[n]{a_\alpha} = \left(\sqrt[n]{a}\right)_{\frac{\alpha}{n}+\frac{k\,360^\circ}{n}}$$

usf. Es ergibt sich, daß hier auch die Radizierung negativer Zahlen möglich ist. Man führt dann die Zerlegung in Komponenten ein und setzt zur Abkürzung:

$$1_{90^\circ} = i.$$

Bei dieser Form der Darstellung ist das Moivresche Theorem, bis zu dem wohl nur wenige Gymnasien vorschreiten, eine einfache Folge der Potenzdefinition.

Gebiete aus der Arithmetik und Algebra, die in der schriftlichen Reifeprüfung bei den Gymnasien bevorzugt werden, sind die Zinseszins- und Rentenrechnung, als Anwendung der Lehre von den geometrischen Reihen, und die Gleichungen zweiten Grades.

Ein Beispiel aus der Zinseszinsrechnung ist etwa das folgende von einem rheinischen Gymnasium:

Ein Kapital steht zunächst 10 Jahre zu 5 % auf Zinseszins, dann werden 7000 Mark zurückgezogen. Die folgenden 30 Jahre wird der Rest zu $4\frac{1}{2}$ % ausgeliehen und wächst durch Zinseszins auf 70000 Mark an. Wie groß war das ursprüngliche Kapital?

Lösung eines Schülers: Angenommen, das ursprüngliche Kapital sei x, so wertet dieses Kapital nach 10 Jahren bei einer Verzinsung von 5 %

$$x \cdot 1{,}05^{10}.$$

Nun werden 7000 Mark zurückgezogen, dann beträgt das Kapital noch

$$x \cdot 1{,}05^{10} - 7000.$$

Die folgenden 30 Jahre wird dieses Kapital dann zu $4\frac{1}{2}$ % ausgeliehen und soll am Ende der 30 Jahre den Wert 70000 Mark erreicht haben, mithin besteht die Gleichung:

$$(x \cdot 1{,}05^{10} - 7000) \cdot 1{,}045^{30} = 70000.$$

Aus dieser Gleichung bestimme man x...

$$x = \frac{70000 + 7000 \cdot 1{,}045^{30}}{1{,}05^{10} \cdot 1{,}045^{30}}.$$

Dann folgt die logarithmische Ausrechnung dieses Wertes.

Bei den quadratischen Gleichungen, die bei der schriftlichen Reifeprüfung an den Gymnasien sehr beliebt sind, kehren häufig solche mit zwei Unbekannten wieder; auch Gleichungen höheren Grades, die auf quadratische reduzierbar sind, begegnen uns, z. B. von einem schlesischen Gymnasium:

$$4\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 9\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 37$$

$$4x^2 - 3y^2 + 2x - 5y = 34.$$

Von Gleichungen höheren Grades mit einer Unbekannten kommen oft die reziproken vor; hier ein Beispiel aus der Provinz Hannover:

$$12x^5 - 68x^4 + 145x^3 - 145x^2 + 68x - 12 = 0.$$

Der Weg, den ein Schüler bei der Lösung einschlägt, ist, etwas gekürzt:

$$12(x^5 - 1) - 68x(x^3 - 1) + 145x^2(x - 1) = 0.$$

Die Gleichung durch $x - 1$ dividiert, gibt (!) . . .

$$12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0$$

$$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 56\left(x + \frac{1}{x}\right) + 89 = 0.$$

$x + \frac{1}{x}$ setzt man gleich u, dann ist . . .

$$u^2 - \frac{28}{6}u + \frac{65}{12} = 0 \ldots$$

$$u_1 = \frac{15}{6};\quad u_2 = \frac{13}{6}; \ldots$$

$$x_2 = 2;\quad x_3 = \frac{1}{2};\quad x_4 = \frac{3}{2};\quad x_5 = \frac{2}{3}.$$

Den Wert $x_1 = 1$ erhält man dadurch, daß man die Gleichung bereits durch $x - 1$ dividiert hat (!), da dann $x - 1 = 0$ sein muß. Die Werte x_2 und x_3 sind ebenso wie die Werte x_4 und x_5 reziprok.

Aus der Planimetrie werden vielfach Konstruktionen als Prüfungsaufgaben gestellt; wir haben bereits im Abschnitt 17 zwei Beispiele gegeben. Manche Gymnasien gehen, was bei den Realanstalten die Regel, bis zum Apollonischen Berührungsproblem. Das steht z. B. ausdrücklich im Lehrplan des Königlichen Katholischen Gymnasiums in Groß-Glogau.

Der planimetrischen Konstruktion entspricht die trigonometrische Berechnung.[1]) Es sind zwei divergierende Richtungen, die hier verfolgt werden. Auf der einen Seite Dreiecksberechnungen aus möglichst unangenehmen Stücken, bei denen aber die sogenannte r-Methode dem, der den nötigen Formelschatz besitzt, einen sicheren Weg zur Lösung weist, auf der anderen Seite Berechnungen aus möglichst leicht beobachtbaren Stücken in einem der Wirklichkeit entlehnten Falle, wenn möglich mit Fehlerabschätzung. Ich gebe für beide Richtungen ein wortgetreues Beispiel, beide von Gymnasien in der Provinz Hannover.

Aufgabe: Ein Dreieck zu berechnen aus

$$\frac{\varrho_a}{\varrho_b} = \frac{m}{n},\quad \varrho_c + \varrho = k \text{ cm};\quad c = l \text{ cm}.\quad [m:n = 2:1;\ k = 25{,}667;\ l = 21].$$

1) Dieses Entsprechen ist natürlich kein vollständiges, wenn man sich auf den Standpunkt der praktischen Anwendung stellt. Dann spielt in der konstruierenden Geometrie die Strecke die Hauptrolle; ein Dreieck wird aus seinen drei Seiten bestimmt. In der praktischen Trigonometrie hinwiederum spielt der Winkel die Hauptrolle, es genügt eine Basis und im übrigen operiert man mit Winkeln.

A. **Allgemeine Ausrechnung.** Da ich mit Hilfe von r und den Dreieckswinkeln leicht jedes gewünschte Stück ausrechnen kann, beschränke ich mich zunächst darauf, r, α, β, γ auszurechnen. Es sei $r = x$ cm, $\alpha = \varphi$; $\beta = \psi$; $\gamma = \chi$. Da ich vier Unbekannte habe, muß ich auch vier Gleichungen aufstellen.

I. $$\varphi + \psi + \chi = 180^\circ.$$

II. $$\frac{m}{n} = \frac{4x \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\psi}{2} \cdot \cos\frac{\chi}{2}}{4x \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2} \cdot \cos\frac{\chi}{2}} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\psi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2}} = \frac{m+n}{m-n};$$

$$\frac{\sin\frac{\varphi+\psi}{2}}{\sin\frac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{m+n}{m-n};$$

III. $$k = 4x\left(\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\psi}{2} \cdot \sin\frac{\chi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2} \cdot \sin\frac{\chi}{2}\right) = \cdots$$

$$= 4x \cdot \cos\frac{\varphi+\psi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi-\psi}{2}.$$

IV. $$l = 2x\sin\chi = 2x \cdot \sin(\varphi + \psi)$$

$$l = 4x \cdot \sin\frac{\varphi+\psi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi+\psi}{2}.$$

$\frac{\text{III.}}{\text{IV.}} = \text{V.}$ $$\frac{\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\psi}{2}} = \frac{k}{l}.$$

$$\sin\frac{\varphi+\psi}{2} = \frac{l}{k} \cdot \cos\frac{\varphi-\psi}{2}$$

eingesetzt in II:

$$\frac{l \cdot \cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{k \cdot \sin\frac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{m+n}{m-n}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{k(m+n)}{l(m-n)}.$$

Aus Gleichung V finde ich $\frac{\varphi+\psi}{2}$. Damit kenne ich aber auch φ, ψ und auch χ. Aus Gleichung IV finde ich

$$x = \frac{l}{2 \cdot \sin\chi}.$$

Damit ist die Aufgabe im Prinzip gelöst.

Dann folgt in der Ausarbeitung ein Abschnitt: B. Zahlenbeispiel. — Die zweite trigonometrische Berechnung, die ich anführen möchte, ist von ganz anderer Art:

Aufgabe: Um die Höhe $CS = h$ eines der drei Masten der funkentelegraphischen Station in G. zu messen, ist auf der benachbarten Wiese eine Basis $AB = c$ abgesteckt und jeder der Winkel $CAB = \alpha$, $CBA = \beta$ in der Horizontalebene sowie der Höhenwinkel $SAC = \vartheta$ gemessen. Wie hoch ist der Mast, und wie groß ist der Fehler dieser Bestimmung, wenn wegen der Ungenauigkeit der Libelle des Theodoliten bei dem Höhenwinkel ϑ ein Fehler von 0,1° möglich ist, während die Fehler bei der Messung der anderen Größen vernachlässigt werden können (folgen die Zahlenwerte).

Lösung eines Schülers: Von Dreieck ABC sind bekannt AB, α und β, also auch

$$\sphericalangle ACB = 2R - (\alpha + \beta).$$

Vermittelst des Sinussatzes läßt sich die Seite AC finden. Dann kennen wir von dem rechtwinkligen Dreieck ACS zwei Stücke, $\sphericalangle \vartheta$ und AC. Es ist . . .

$$SC = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \tan \vartheta .$$

Um den Fehler zu bestimmen, der sich für SC ergibt, wenn bei ϑ ein Fehler $\Delta\vartheta$ gemacht ist, differenziert man SC nach ϑ und multipliziert den Differentialquotienten mit $\Delta\vartheta$ · —

Dann folgt die Ausrechnung.

In der Stereometrie liefern Inhalts- und Oberflächenberechnungen den häufigsten Aufgabenstoff. Solch ein Beispiel ist etwa:

Der Rauminhalt eines abgestumpften geraden Kegels ist gleich V, der Radius der Grundfläche das n-fache, die Seitenlinie das p-fache vom Radius der Gegenfläche. Diese wird von einer Halbkugel überdeckt. Wie groß ist deren Volumen? ($V = 300$; $n = \frac{3}{2}$; $p = 4$).

Auch Anwendungen der Guldinschen Regel spielen im Aufgabenmaterial eine Rolle, wie denn auch dieses Kapitel in den Lehrplänen einzelner Gymnasien ausdrücklich angeführt wird; als Beispiel sei das Königliche Prinz Heinrichs-Gymnasium in Schöneberg (Grundlehrplan. Nach den Lehrplänen von 1901 revidiert. Berlin 1902) genannt. Es ist überflüssig zu sagen, daß diese alten künstlichen Integrationen nach der Meinung der Reformer entweder weggelassen oder durch offene Integrationen ersetzt werden müßten.

Der Stereometrie wird die sphärische Trigonometrie, am Gymnasium nur in beschränktem Umfange, angeschlossen. Die methodischen Bemerkungen sagen ausdrücklich:

Ebensowenig erfordern die zum Verständnis der mathematischen Erd- und Himmelskunde nötigen Formeln eine eingehende Behandlung der sphärischen Trigonometrie. Sie lassen sich in einfacher Weise bei der Behandlung der dreiseitigen Ecke ableiten.

Sehr viele Lehrer beschränken sich überhaupt auf den Cosinussatz und nehmen also als Abiturientenaufgabe etwa die Bestimmung der Entfernung zweier Orte auf der Erde. Vielleicht nehmen sie auch noch den Sinussatz hinzu. Auch die vollständige Behandlung der rechtwinkligen – bzw. rechtseitigen – Ecke an der Hand der Neperschen Regel und damit ein umfangreiches Aufgabenmaterial aus der mathematischen Astronomie ist nicht eben selten.

Auch bei der analytischen Geometrie auf dem Gymnasium kehrt eine Warnung vor dem Zuviel wieder. Immerhin werden hier die Kegelschnitte vielfach recht gründlich behandelt. Das zeige ein Beispiel von einem Gymnasium aus der Provinz Hannover:

Aufgabe: In einer Ellipse mit den Halbachsen a und b sind zwei konjugierte Durchmesser gleich. Welche Koordinaten haben ihre Endpunkte?

Lösung eines Schülers: Angenommen, die Koordinaten des Endpunktes wären x_1, y_1. Dann lautet die Gleichung des zugehörigen Durchmessers

$$y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$$

und, da die Gleichung der Tangente in P

$$b^2 \cdot x \cdot x_1 + a^2 \cdot y \cdot y_1 = a^2 b^2$$

lautet, die Gleichung des konjugierten Durchmessers

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x.$$

Wenn in einer Ellipse zwei konjugierte Durchmesser gleich sind, so haben sie selbst sowie auch ihre Endpunkte symmetrische Lage. Die absoluten Werte der Ordinaten müssen einander gleich sein, ebenso wie die absoluten Werte für die Abszissen einander gleich sein müssen. Daher müssen auch die absoluten Werte der Richtungskonstanten, die sich aus jenen Werten zusammensetzen, einander gleich sein.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Aus dieser Gleichung kann ich x_1 berechnen, indem ich sie vereinfache und y_1 durch x_1 und die Halbachsen ausdrücke: dann finde ich leicht y_1 und die Koordinaten des anderen Schnittpunktes, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden.

$$y_1^2 a^2 - x_1^2 b^2 = 0$$

$$y_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2}, \dots$$

$$x_1 = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}\,;\ y_1 = \cdots \frac{b}{2} \sqrt{2}.$$

(Es folgen dann noch x_2 bis y_4).

Von den Anwendungen der Kegelschnitte sind Aufgaben im Anschluß an die Keplerschen Gesetze zu erwähnen. Ich möchte einige Beispiele wenigstens nennen, die wegen der Einbeziehung des Vektorbegriffes Interesse haben[1]):

Der am 13. August 1898 entdeckte Planet Eros hat die große Halbachse der Bahn $a = 1{,}4581$ Erdbahnradien und die numerische Exzentrizität $\varepsilon = 0{,}22273$. Wie groß ist die größte und kleinste Geschwindigkeit desselben?

1) E. Höhnemann, Die Verwendung von Vektoren für elementare Behandlung physikalischer Probleme. In der Festschrift zum fünfzigjährigen Jubiläum des Königlichen Gymnasiums mit Realschule zu Landsberg a. W. II. Teil 1909. — Die Grundbegriffe der Vektorenrechnung, soweit sie allenfalls für die Schule in betracht kommt, behandelt J. Frischauf, Das Rechnen mit Vektoren. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 35 (1904) S. 249 ff.

. Der Komet von Tuttle hat als große Halbachse seiner Bahn $a = 5{,}757$ Erdbahnradien und die numerische Exzentrizität $\varepsilon = 0{,}821$. Wie groß ist seine Geschwindigkeit in einem Punkte der Bahn, der $r = 2{,}478$ Erdbahnradien von der Sonne entfernt ist, und welchen Winkel bildet seine Bewegungsrichtung in diesem Punkte mit dem Radiusvektor?

Es war hier nur möglich, an einigen wenigen Beispielen die in der Reifeprüfung am Gymnasium geforderten Leistungen zu zeigen. Absichtlich sind möglichst verschiedenartige Formen von Aufgaben angeführt, auch wenn moderne Bestrebungen mit gutem Rechte die eine oder andere Gruppe als allzu „formalistisch" ablehnen. Es handelt sich eben um eine Darstellung der tatsächlichen Verhältnisse, und zu deren Kennzeichnung gehören auch diese Aufgaben. Übrigens begegnet man „formalistischen" Aufgaben auch im Gefolge der Reformbewegung.

Es gibt eine Reihe von Aufgabensammlungen, die als Aufgaben von preußischen Reifeprüfungen zusammengestellt sind, z. B. diejenige von Martus[1]) und zahlreiche Programmarbeiten, die sich dann oft auf Aufgaben einer Schule oder eines Lehrers beschränken. Diese Aufgaben geben hinsichtlich der Reichhaltigkeit und des Stoffumfanges ein weit besseres Bild, als das hier möglich war, sie berücksichtigen aber zumeist nicht die allerletzte Zeit.

Hier helfen die Jahresberichte der einzelnen Schulen aus. Aber auch die große Arbeit einer Durchsicht der Programme dürfte nicht durch eine genaue Vorstellung von dem wirklich Erreichten belohnt werden. Ich habe deshalb hier, meines Wissens zum ersten Male, die wenigen Beispiele, mit denen ich mich begnügen mußte, zum größten Teile mit den Schülerlösungen versehen. So wird es möglich sein, was hier nur an einigen Stellen bis ins einzelne ausgeführt wurde, an der Hand jener Aufgabensammlungen zu einem vollständigen Bilde zu ergänzen.

21. Der Lehrplan des Realgymnasiums und der Oberrealschule.

In gleicher Weise wie beim Gymnasium geben wir auch für die Realanstalten zunächst ein Stichwortschema des Lehrplanes. Dabei sind diejenigen Kapitel, die bei der Oberrealschule auftreten, jedoch beim Realgymnasium fehlen, bzw. erst in der nächst höheren Klasse zur Behandlung kommen, mit einem Stern bezeichnet. Der Vergleich des Lehrplanes mit dem des Gymnasiums wird unsere frühere Bemerkung bestätigen, daß die Unterschiede zwischen beiden nicht so sehr in der Stoffwahl als in der mehr oder weniger gründlichen Behandlung des Stoffes liegen. Noch heute können die Lehrpläne der

1) H. C. E. Martus, Mathematische Aufgaben. 1. Teil: 11. A. 1903. 2. Teil: Ergebnisse. 11. A. 1903. 3. Teil: Aufgaben. 2. A. 1904. 4. Teil: Ergebnisse. 2. A. 1906. Dresden und Leipzig (Koch).

Realanstalten ihre Entstehung aus denen der Gymnasien nicht verleugnen.

Bei den Realanstalten tritt als ergänzender Faktor der Mathematik das Linearzeichnen auf mit je zwei wahlfreien Stunden von O III bis O I. Ich gehe darauf nicht näher ein, da sich damit ein besonderer Bericht der Internationalen Mathematischen Unterrichts-Kommission beschäftigen wird. Nur so viel muß hier gesagt werden, daß, zumal wenn der Unterricht vom Mathematiklehrer der Klasse erteilt wird, die Mathematik große Förderung erfahren kann, nicht bloß in der darstellenden Geometrie der Oberstufe, wie das auf der Hand liegt, sondern auch gelegentlich schon auf der Unterstufe, ganz allgemein aber in Rücksicht auf eines der Hauptziele mathematischen Unterrichts überhaupt, die Fähigkeit räumlicher Anschauung.

Es gibt Anstalten, an denen das Linearzeichnen kaum noch wahlfrei zu nennen ist, wo fast alle Schüler daran teilnehmen. So heißt es in dem Programm einer Oberrealschule und Realschule im Westen: „Der Unterricht im Linearzeichnen ist wahlfrei; Dispensation findet jedoch nur statt, wenn der Schüler im Anfang des Schuljahres schriftlich den dahingehenden Wunsch seines Vaters oder dessen Stellvertreters dem Direktor vorlegt. Bei der besonderen Wichtigkeit dieses Zeichnens für die Vermittlung räumlicher Vorstellungen dürfte es sich empfehlen, von dieser Bestimmung nur ganz ausnahmsweise Gebrauch zu machen.“ Eine andere Anstalt schreibt: „Für Schüler einer Oberrealschule gilt die Teilnahme am Linearzeichenunterricht für selbstverständlich. Eine Befreiung von diesem so wichtigen Fache kann nur auf schriftlichen Antrag der Eltern erfolgen.“ Allerdings ist durch eine vor ganz kurzer Zeit erlassene Ministerial-Verfügung eine derartige starke Beeinflussung zur Teilnahme an wahlfreien Stunden eingeschränkt worden.[1])

1) Während dieser Bericht bereits in Druck ist, wird von den Provinzialschulkollegien auf Versuche hingewiesen, das Linearzeichnen ganz in den mathematischen und den obligatorischen Zeichenunterricht aufzuteilen. „In diesem Falle würde in den beiden Klassen O III und U II eine Verteilung des Lehrpensums des Linearzeichnens in der Weise eintreten müssen, daß das geometrische Darstellen einfacher Körper in schräger und in normaler Parallelprojektion mit Schnitten und Abwickelungen, so wie es bisher schon in dem mathematischen Lehrplane der U II an Realanstalten vorgesehen war, im Anschlusse an den stereometrischen Unterricht behandelt würde, während auf das Maßstabzeichnen und das geometrische Darstellen einfacher Geräte und Architekturformen in verschiedenen Ansichten in jedem der beiden Jahre etwa ein Viertel der für den obligatorischen Zeichenunterricht angesetzten Zeit zu verwenden wäre. In entsprechender Weise würden auf der Oberstufe die spezielle darstellende Geometrie, die Schattenlehre und Perspektive einen wesentlichen Teil des mathematischen Pensums bilden, die malerische Perspektive und Schattenstruktion aber wie auch die projektivische und perspektivische Darstellung von Geräten und Gebäudeteilen, von Eisenkonstruktionen, einfachsten Maschinenteilen sowie einfache Terrainaufnahmen eine Aufgabe des obligatorischen Zeichenunterrichtes sein.“

Klasse	Arithmetik und Algebra.	Geometrie.
VI	Rechnen mit positiven ganzen und gebrochenen Zahlen, besonders mit Dezimalzahlen; die bürgerlichen Rechnungsarten.	–
V		*Propädeutik.
IV	Rechnen desgl. *Anfangsgründe der Buchstabenrechnung.	Geraden und Winkel; Dreieckslehre, *Viereckslehre.
U III	Bürgerliches und kaufmännisches Rechnen. Buchstabenrechnen; Proportionen; Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.	Viereckslehre; Kreislehre; Flächenlehre.
O III	Potenzen und Wurzeln. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Einfache Gleichungen zweiten Grades.	Ähnlichkeitslehre; Kreisberechnung.
U II	Logarithmen. Gleichungen zweiten Grades.	Elemente der Trigonometrie. Elemente der Stereometrie; schräge Parallelprojektion. Algebraische Geometrie.
O II	Arithmetische und geometrische Reihen (Zinseszins- und Rentenrechnung). Imaginäre Größen. Reziproke und binomische, schwierigere quadratische Gleichungen.	Harmonische Punkte und Strahlen, Chordalen, Ähnlichkeitspunkte usw. Fortführung der Trigonometrie. Systematische Stereometrie.
I	Kombinatorik (mit Anwendung auf Wahrscheinlichkeitsrechnung). Binomischer Lehrsatz für beliebige Exponenten. Die wichtigsten Reihen der algebraischen Analysis. Wiederholender Aufbau der Arithmetik. Kubische Gleichungen. Maxima und Minima.	Sphärische Trigonometrie (Kosmographie). Darstellende Geometrie. Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Analytische Geometrie der Ebene.

* „Für Oberrealschulen ist die Behandlung der wichtigsten Reihen der algebraischen Analysis verbindlich. An diesen Anstalten kann je nach den Verhältnissen entweder das arithmetische Pensum durch die Behandlung allgemeiner Lehren von den Gleichungen sowie der Methode zur angenäherten Lösung numerischer, algebraischer und transzendenter Gleichungen oder des geometrischen durch die Weiterführung der darstellenden synthetischen oder analytischen Geometrie erweitert werden."

Schema des Lehrplans der Realgymnasien und Oberrealschulen.

Wenn wir nun einen Blick werfen auf die häufigsten Abweichungen von den offiziellen Lehrplänen, so ist zunächst der Realschulen zu gedenken. Die Lehraufgaben für die Realschule sind diejenigen der

Unterstufe von Oberrealschule oder Realgymnasium. (Vom Realgymnasium nur dann, wenn der deutsche Unterricht verstärkt ist, Typus D[1] der amtlichen Lehrpläne, vgl. Abschnitt 6.) Es heißt einfach im Lehrplan:

Lehraufgaben wie in VI bis U II der Oberrealschulen oder (für Plan D[1]) des Realgymnasiums.

Übrigens zeigt, das sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, manche Oberrealschule noch heute ihre Entstehung aus der Realschule. So deutet manchmal der Fortfall der geometrischen Propädeutik in Quinta zugunsten des Deutschen an, daß die Schule einst aus einer Realschule von jenem Typus D[1] hervorgegangen ist, und auf den Realschullehrplan geht auch das Linearzeichnen in der U III mancher Oberrealschule zurück, während der normale Beginn erst in O III liegt.

Immerhin hat die Realschule mit Rücksicht auf die vielen mit dem Einjährigenzeugnis ins praktische Leben tretenden Schüler ihren eigenen Charakter.[1]) Die Schüler sollen mit dem Abschluß der Schule eine abgeschlossene Bildung erhalten haben. Danach ist der amtliche Lehrplan eingerichtet; will man dieses Moment noch mehr zur Geltung bringen, so wird man bestrebt sein, den in der obersten Klasse neu eintretenden Unterrichtsgegenständen wie Trigonometrie, Stereometrie, Logarithmenlehre eine vertiefte Wirksamkeit zu geben.

Ich will an Hand der Lehrpläne von 12 Berliner Realschulen (es fehlen wieder 1 und 8) zeigen, wie das geschehen kann; ähnliches findet sich an anderen Realschulen.

Wir hatten schon gesehen (Abschnitt 15), wie der propädeutische Unterricht an diesen Schulen erweitert wird. Auf dieser Grundlage ist es nun bei diesen Schulen möglich, den offiziellen Lehrplan in etwas schnellerem Tempo zu behandeln, so daß jene oben genannten Endgebiete in verstärktem Maße durchgenommen werden können. Ich gebe hier nur die Plusforderungen gegenüber den offiziellen Lehrplänen an.

In Quarta werden von Realschule 4, 5, 11, 13, 14 die Kreislehre, oder doch deren wichtigste Sätze durchgenommen, Realschule 14 fügt sogar noch den Inhalt geradliniger Figuren hinzu.

Tertia (= U III). Bei R. 2, 6, 9, 10, 13 tritt bereits hier eine Einleitung in die Ähnlichkeitslehre auf, etwa bis zum vierten Ähnlichkeitssatz, also ohne die Proportionenlehre am Kreise. Die R. 4, 5, 11, 14 bringen sogar die ganze Ähnlichkeitslehre. In der Arithmetik kommt

1) Vgl. den Artikel von H. Halfmann, Die Verhältnisse der Nichtvollanstalten, in W. Lexis, Die Reform des höheren Schulwesens in Preußen, und speziell für den mathematischen Unterricht den Bericht von H. Schotten, Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht an den sechsklassigen Realschulen. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 37 (1906) Seite 235 ff. Aus diesem Bericht ist in stark veränderter Form der Abschnitt Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht an den Realschulen in den Stuttgarter Vorschlägen der Unterrichtskommission hervorgegangen; vgl. A. Gutzmer, Gesamtbericht l. c. S. 182 ff.

gegenüber dem normalen Pensum das Quadratwurzelziehen (R. 2, 6, 9, 10, 13) in einem Falle (R. 4) auch das Kubikwurzelziehen hinzu.

Sekunda (= O III). Aus der Planimetrie der letzten Klasse wird in einzelnen Fällen (R. 4, 5, 7, 9) die sogenannte algebraische Geometrie vorweggenommen, aus der Arithmetik von den meisten (R. 2, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14) die Logarithmenlehre. Eine Einführung in die Trigonometrie, meist bis zur Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks gehend, geben bereits in dieser Klasse die R. 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

Prima (= U II). Hier dürfte sich der Vorsprung der Realschulen hauptsächlich in den weitergehenden Anwendungen in der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie zeigen. In der Arithmetik nimmt man oft (R. 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 14) die arithmetischen und geometrischen Reihen hinzu, um dann die Zinseszins- und Rentenrechnung zu betreiben. In der Trigonometrie begegnet man manchmal dem Additionstheorem u. dgl., in der Stereometrie den grundlegenden Sätzen über die Lage von Ebenen und Geraden im Raume, – alles Kapitel, die an der Oberrealschule in der Mehrzahl der Fälle erst in der Oberstufe ihre Behandlung finden.

Aus dem Pensum der Oberstufe der Realanstalten sollen hier nur einige Abweichungen erwähnt werden, alle die vielen stofflichen und methodischen Fragen, die mit der Frage des Funktionsbegriffes usw. zusammenhängen, kommen ja später noch ausführlicher zur Sprache.

Viele Schulen verschieben, teils mit Rücksicht auf das Linearzeichnen, teils im Interesse der besseren Verbindung mit dem stereometrischen Lehrstoffe, die darstellende Geometrie aus der U I nach der O II. Die orthogonale und schräge Parallelperspektive wird vollständig (so z. B. an der Luisenstädtischen Oberrealschule in Berlin, der Hohenzollernschule in Schöneberg, der Oberrealschule in Barmen, der Oberrealschule I an der Waitzstraße in Kiel) oder doch in ihren grundlegenden, auf die Darstellung begrenzter Geraden und Ebenen sich beziehenden Teilen (so z. B. an der Berger-Oberrealschule in Posen) bereits in O II, meist wohl im Anschluß an die Stereometrie durchgenommen. An anderen Anstalten geschieht das gleiche, doch in den wahlfreien, für die Schüler mehr oder weniger pflichtmäßig gemachten Stunden des Linearzeichnens.

Da das Pensum der O II einer Oberrealschule an und für sich schon recht umfangreich und noch mehr mannigfaltig ist[1]), zumal wenn man bedenkt, daß der Charakter dieser Schulen ein aus den verschiedenen Realschulen sich rekrutierendes und also der betreffenden Schule noch zu einem großen Prozentsatz fremdes Schülermaterial mit

1) Darauf ist z. B. schon von H. Schotten in einem Vortrage: Welche Aufgaben hat der mathematische Unterricht auf den deutschen Schulen und wie passen die Lehrpläne zu dieser Aufgabe? hingewiesen. Vgl. Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg. Leipzig (Teubner) 1905 und Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 35 (1904), S. 578 ff.

sich bringt, so tritt in manchen Fällen eine Entlastung für die Neuaufnahme der darstellenden Geometrie ein. Meist wird wohl ein Teil des Planimetriepensums, so die Lehre von den Chordalen, Polaren u. dgl., nach Prima verschoben (so z. B. in der Berger-Oberrealschule in Posen, in der Oberrealschule in Barmen) und dort mit der synthetischen Geometrie verknüpft, wie Quossek schon vor Jahren gelegentlich einer Direktorenversammlung[1]) vorgeschlagen hat.

In Berlin kann man leichter von einer solchen Verschiebung absehen, ja sogar, da die Sätze von Pascal und Brianchon für den Kreis allein keinen vollen Wert haben, in O II die Definitionen und die einfachsten Eigenschaften der Kegelschnitte durchnehmen und dann nach den in der darstellenden Geometrie gelehrten Methoden der Zentralprojektionen diese Sätze von Pascal und Brianchon auf die Kegelschnitte ausdehnen.[2])

Dort wird nämlich in der Unterstufe der Oberrealschulen, und wie wir gesehen auch in vielen Realschulen, bereits dem O II-Pensum vorgearbeitet, nicht nur in der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie, sondern gelegentlich auch in der Planimetrie; treten doch z. B. im Lehrplan der 3. Oberrealschule i. E. zu Berlin in O III harmonische Punkte und Strahlen auf, sicherlich ohne der Fassungskraft der Schüler Schwierigkeiten zu machen.

Von Erweiterungen des Primapensums sollen an dieser Stelle zwei kurze Erwähnung finden. Manche Anstalten führen auch die Wurzellösung der allgemeinen biquadratischen Gleichung im Lehrplan auf (so die Oberrealschule in Pankow), manche andere werden die Durchnahme vom jeweiligen Standpunkt der Schülergeneration abhängig machen. Der aus den Lehrplänen der Oberrealschulen seit 1892 verbannten analytischen Geometrie des Raumes bin ich ausgesprochenermaßen nur einmal begegnet, an der Oberrealschule zu Stolp, doch wird sie, wie mir bekannt, auch an anderen Anstalten bei guten Generationen berücksichtigt.

Es bleibt uns noch übrig, die Abweichungen zu kennzeichnen, die sich bei den Reformrealgymnasien gegenüber den alten Realgymnasien finden. Der Grundzug in den Abweichungen ist derselbe wie bei den Reformgymnasien, eine Verschiebung des Lehrstoffes aus oberen in untere Klassen zum Zwecke der Entlastung der Oberklassen zugunsten der Sprachen. Auch dieselben Bedenken gelten hier wie beim Reformgymnasium.[3]) Noch ein zweites Merkmal ist wesentlich: Der

1) Verhandlungen der siebenten Direktorenversammlung in der Rheinprovinz. 1899. Berlin (Weidmann) 1899.

2) Vgl. eine Bemerkung von C. Färber: Darstellende Geometrie in Obersekunda. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter 5 (1908), S. 181.

3) Vgl. dazu H. Börner, Über die Stellung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtes in dem jetzigen Lehrplan der Reformgymnasien Frankfurter Systems. Monatsschrift 1 (1902), 627.

Lehrplan des Reformrealgymnasiums gleicht nach Möglichkeit demjenigen des Reformgymnasiums bis O III einschließlich.

Zur Kennzeichnung der Lehrpläne will ich wieder nur die jeweiligen Mehr- oder Minderleistungen in den einzelnen Klassen gegenüber dem alten Realgymnasium anführen. Ich greife als Beispiel heraus die Lehrpläne des Elberfelder Realgymnasiums[1]), als einer Anstalt, die den alten Lehrplan nur in wenigen Punkten geändert hat, und die Lehrpläne der Musterschule in Frankfurt a. M., die in der Änderung der Stoffverteilung sich freier von der alten Vorlage gemacht hat.

Quinta. Elberfeld (E.) gibt in einer Stunde wöchentlich während des ganzen Jahres eine Propädeutik der Geometrie; Frankfurt a. M. (F.) dasselbe im Winterhalbjahr, dazu noch die Lehre von den Geraden und Winkeln.

Quarta. Arithmetik. F.: Die Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlen: Addition und Subtraktion von Buchstabenausdrücken, Auflösen von Klammern. Positive und negative Größen. Die einfachsten Fälle der Multiplikation und Division mit Ausschluß der Partialdivision. E. gibt keine Propädeutik der Arithmetik.

Geometrie: E. geht in der Kreislehre bis zur Tangente vor, F. fordert die Sätze aus der Kreislehre, die mit Hilfe der Sätze vom gleichschenkligen Dreieck zu beweisen sind, mit Ausnahme der Tangentialsätze.

U III. Arithmetik. F. hat hier schon das Ausziehen der Quadratwurzel. Geometrie. E. nimmt hinzu die Proportionalität an Linien, F. einfache Berechnungen mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes.

O III. Arithmetik. Bei F. fehlen einfache Gleichungen zweiten Grades, die der Lehrplan der alten Realgymnasien hat. E. hat in der Geometrie: Einfache algebraische Geometrie; bei F. ist diese algebraische Geometrie überhaupt aus dem Lehrplan gestrichen.

U II. Keine Abweichungen.

O II. F. bringt schon hier die Kombinatorik mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und den binomischen Lehrsatz für positive ganze Exponenten. Dafür sind die reziproken und die schwierigeren quadratischen Gleichungen u. dgl. ganz weggefallen. Von der sogenannten neueren Geometrie werden Teile, z. B. das Taktionsproblem, aus der O II nach Prima verwiesen.

Das Pensum der Prima hier anzugeben, kann unterbleiben; die Elberfelder Schule weist die schon besprochene Gruppenbildung auf; sie, wie auch die Musterschule treiben in der Oberklasse Differential- und Integralrechnung, und so wird auf ihre Lehrpläne im Zusammenhang mit anderen Schulen gleichen Charakters noch zurückzukommen sein.

---

1) Die Lehrpläne der Reformabteilung und der nach Fachgruppen geteilten Primen. Städtisches Realgymnasium Elberfeld. Programm Ostern 1909.

22. Das Lehrziel des Realgymnasiums und der Oberrealschule.

Als allgemeines Lehrziel der Realanstalten geben die Lehrpläne an: Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen mit bestimmten Zahlen, besonders auch im Kopfrechnen, und in der Anwendung dieser Fertigkeiten auf die gewöhnlichen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens. Arithmetik bis zur Entwicklung des binomischen Lehrsatzes für beliebige Exponenten und der einfacheren unendlichen Reihen. Algebra bis zu den Gleichungen dritten Grades einschließlich. Ebene Geometrie einschließlich der Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen, Chordalen, Ähnlichkeitspunkten und -achsen; körperliche Geometrie nebst den Grundlehren der darstellenden Geometrie. Ebene und sphärische Trigonometrie. Elementare Aufgaben über Maxima und Minima. Analytische Geometrie der Ebene.

Dann folgt noch jener auf die Oberrealschulen bezügliche Abschnitt, den wir im Stichwortschema des vorangehenden Abschnittes am Schlusse des Primapensums eingefügt haben.

Als Aufgabenstoff bei der Reifeprüfung findet man bei den realistischen Anstalten zunächst denjenigen des Gymnasiums, und zwar am Realgymnasium häufiger als an der Oberrealschule; dahin gehören Berechnungen aus der ebenen Trigonometrie, Aufgaben aus der Zinseszins- und Rentenrechnung, Lösungen von binomischen Gleichungen der Form

$$x^n = a + bi$$

mit Hilfe des Moivreschen Theorems u. dgl. – Immerhin überwiegen bei weitem diejenigen Gebiete, die dem Gymnasialpensum fremd sind, oder die doch an diesen Schulen nicht in derselben eingehenden Weise behandelt werden wie in den Realanstalten.

Zum Pensum der Gymnasien gehörte auch die Kombinatorik mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Spricht aber der Lehrplan der Gymnasien nur von Grundlagen und nächstliegenden Anwendungen, so fallen im Lehrplan der Realanstalten diese Einschränkungen fort. Aber trotzdem sind in den Reifeprüfungsarbeiten sehr selten Aufgaben aus diesen Gebieten anzutreffen, weil sich diese Dinge – von einigen lebhaften Fürsprechern abgesehen – nicht eben besonderer Wertschätzung erfreuen, ja an manchen Anstalten ganz gestrichen sind. Wenigstens ein Beispiel von einem Realgymnasium, das allerdings in andere Gebiete hinübergreift, sei angeführt:

Der Fußboden eines Zimmers ist mit regelmäßigen sechseckigen Parkettfeldern belegt, die je eine Seite von 10 cm besitzen. Wenn man nun ein Markstück, dessen Durchmesser 24 mm beträgt, auf den Boden wirft, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß das Geldstück vollständig innerhalb eines Feldes zu liegen kommt?

Ungleich häufiger begegnet man Gleichungen dritten Grades. Knüpft man die Lösung an die graphische Darstellung an, worauf im dritten Teile noch einzugehen ist, so begnügt man sich mit Rücksicht auf die recht knapp bemessene Zeit meist mit fertig gegebenen Gleichungen; sonst aber werden häufig eingekleidete Gleichungen vorgelegt. Eine mit Variationen mehrfach wiederkehrende Aufgabe ist etwa (von einem Realgymnasium):

Eine Kugel mit dem Radius 1 wird durch eine Ebene in zwei Abschnitte geteilt, deren Rauminhalte sich wie 1 : 3 verhalten. Wie groß ist der Abstand dieser Ebene vom Kugelmittelpunkte?

Die Aufgabe führt, wenn x die Höhe eines Kugelabschnittes ist, auf die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0,$$

die auf die reduzierte Form

$$y^3 - 3y - 1 = 0$$

gebracht und dann nach dem casus irreducibilis gelöst wird.

Durch Zurückführung auf Gleichungen dritten Grades löst man auch spezielle Gleichungstripel mit drei Unbekannten, also etwa das folgende Gleichungssystem

$$2x + y + z = 4$$
$$2xy + yz + 2xz = -11$$
$$xyz = -15.$$

Dabei ist dann besonders auf die Angabe aller Lösungen zu achten.

Gleichungen vierten Grades sind, weil sie nicht im Lehrplan vorgeschrieben sind, recht selten. Besondere mathematische Fähigkeiten müssen schon vorhanden sein, wenn ein Abiturient einer Berliner Oberrealschule die biquadratische Gleichung

$$x^4 - 4x^2 + 5x - 4 = 0$$

erst algebraisch löst und dann graphisch durch Schnitt der Parabel

$$y = x^2$$

mit dem Kreise

$$y^2 + x^2 - 5y + 5x - 4 = 0$$

Näherungswerte erhält, die er nach der Newtonschen Methode verbessert.

Vielfach wird übrigens bei vorgelegten Gleichungen vierten Grades eine rationale, ganzzahlige Wurzel durch Probieren gefunden und dann die Gleichung auf eine solche niederen Grades reduziert. So findet der Schüler (Beispiel von einer Oberrealschule), daß die Gleichung

$$x^4 - x^3 - 38x^2 - 39x + 77 = 0$$

die Wurzel $x_1 = 1$ hat. Er kommt damit auf eine kubische Gleichung, von der er möglicherweise auch wieder einen Wurzelwert $x_2 = 7$ durch Probieren finden kann.

Als Anwendung der Lehre von den unendlichen Reihen sind in den Abiturientenarbeiten Berechnungen von Logarithmen, von trigonometrischen Funktionen vorgegebener Winkel u. dgl. beliebt. Als Beispiel gebe ich etwa die Berechnung des gemeinen und des natürlichen Logarithmus von 105 (Lösung des Schülers einer Oberrealschule):

Um den Neperschen oder natürlichen Logarithmus zu berechnen, bedient man sich der Reihe

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots.$$

Diese Reihe ist gültig für alle Werte von x zwischen den Grenzen -1 bis $+1$, sowie für die obere Grenze selbst. Habe ich den natürlichen Logarithmus der Zahl $(a+b)$ zu berechnen, so setze ich

$$\lg(a+b) = \lg\left(a\left[1+\frac{b}{a}\right]\right) = \lg a + \lg\left(1+\frac{b}{a}\right),$$

doch ist darauf zu achten, daß $a > b$ ist, daß also stets der größere Summand ausgeklammert wird, damit $\frac{b}{a} < 1$ ist. – Ich setze in unserer Aufgabe also

$$\lg 105 = \lg(100+5) = \lg 100 + \lg(1+0{,}05).$$

Es ist nun

$$-1 < 0{,}05 < +1$$

und ich kann die Reihe ansetzen. Es ist

$$\lg(1+0{,}05) = 0{,}05 - \frac{0{,}05^2}{2} + \frac{0{,}05^3}{3} - + \cdots$$

mithin erhalte ich folgende Näherungswerte:

a) $0{,}5$;

b) $0{,}05 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}05^2 = 0{,}04875$;

c) $0{,}05 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}05^2 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}05^3 = 0{,}0487917$;

d) . . . 0,0487901.

Ich habe also den sehr guten Näherungswert

$$\lg(1+0{,}05) = 0{,}04879$$

erhalten. Wie groß ist nun lg 100? Zwischen dem gemeinen und dem natürlichen Logarithmus einer Zahl besteht die Beziehung

$$\log z = M \cdot \lg z,$$

worin $M = 0{,}43429$ der Modul des Systems ist. Also ist . . . [folgt die Ausrechnung]

$$\lg 105 = 4{,}65399.$$

Somit habe ich den natürlichen Logarithmus von 105 gefunden. Den Briggschen Logarithmus erhalte ich aus folgender Beziehung:

$$\log 105 = M \cdot \lg 105 = \cdots = 2{,}0212.$$

Zuweilen wird bei solchen Aufgaben auch mehr als rechnerische Anwendung bekannter Reihen verlangt. So wurde an einer Oberrealschule die Aufgabe gestellt[1]):

---

1) Es darf dieser Aufgabe vielleicht angefügt werden, daß C. Störmer die vollständige Lösung der Gleichung

$$l \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + m \operatorname{arctg}\frac{1}{y} + n \operatorname{arctg}\frac{1}{z} = k \cdot \frac{\pi}{4}$$

in ganzzahligen l, m, n, x, y, z und $k > 1$ angegeben hat (Archiv for Mathematik og Naturvidenskab 1896). Außerdem behandelt das Problem: Th. Meyer, Über die zyklometrischen Formeln zur Berechnung von π und über eine abgekürzte Bezeichnung der zyklometrischen Funktionen. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 35 (1904) S. 1 ff.

Es soll bewiesen werden, daß

$$3 \operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{99}=\frac{\pi}{4}$$

ist, und auf Grund dieser Gleichung soll mit Hilfe der Reihe für arctg x die Zahl π auf vier Dezimalstellen berechnet werden.

Lösung eines Schülers: Wir setzen arctg $\frac{1}{4}=u$ und arctg $\frac{5}{99}=v$, dann ist tg $u=\frac{1}{4}$ und tg $v=\frac{5}{99}$. Wenn obige Gleichung richtig ist, dann muß

$$\operatorname{tg}(3u+v)=1$$

sein. ... Zunächst müssen wir tg $3u$ berechnen.

$$\operatorname{tg} 3u=\operatorname{tg}(2u+u)\ldots$$

Für tg $2u$ ergibt sich

$$\operatorname{tg} 2u=\frac{2 \operatorname{tg} u}{1-\operatorname{tg}^2 u}=\cdots=\frac{8}{15},$$

tg $3u$ erhalten wir auf dieselbe Weise

$$\operatorname{tg} 3u=\cdots=\frac{47}{52}.$$

Nun bestimmen wir

$$\operatorname{tg}(3u+v)=\cdots=1.$$

Da tg $(3u+v)=1$ ist, so muß

$$3 \operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{99}=\frac{\pi}{4}$$

sein; denn $\frac{\pi}{4}$ ist der Bogen, dessen Tangente gleich 1 ist. Um die Zahl π zu berechnen, entwickeln wir arctg $\frac{1}{4}$ und arctg $\frac{5}{99}$ in Reihen nach der Reihe für arctg x..., so erhalten wir

$$\frac{\pi}{4}=3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4^3\cdot 3}+\frac{1}{4^5\cdot 5}-+\cdots\right)+\left(\frac{\frac{5}{99}}{1}-\frac{\left(\frac{5}{99}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{5}{99}\right)^5}{5}-+\cdots\right).$$

Nun folgt die Ausrechnung. Ein anderer Schüler gibt noch folgenden Beweis:

Um die Summen von arctg x + arctg y auszudrücken, setzt man arctg $x=u$, arctg $y=v$. Dann ist tg $u=x$ und tg $v=y$.

$$\operatorname{tg}(u+v)=\frac{\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v}{1-\operatorname{tg} u\cdot\operatorname{tg} v}=\frac{x+y}{1-x\cdot y}.$$

Hieraus folgt

$$u+v=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-x\cdot y}.$$

Setzt man für u und v ihre Werte ein, so ergibt sich

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-x\cdot y}.$$

Unter Benutzung dieser Formel erhält man

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{99}=\operatorname{arctg}\frac{119}{391},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{119}{391}=\operatorname{arctg}\frac{867}{1445},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{867}{1445}=\operatorname{arctg}\frac{4913}{4913}=\frac{\pi}{4}.$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so erhält man

$$3 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{5}{99} = \frac{\pi}{4}.$$

Schließlich sind bei Gelegenheit der unendlichen Reihen noch lim-Berechnungen recht häufig; es handelt sich dabei um Ausdrücke wie etwa den folgenden (Oberrealschule):

$$\lim_{x=0} \frac{e^x - \cos x - x - x^2}{x - \sin x},$$

dessen Berechnung manche Schüler in zwei oder drei Zeilen geben.

In der Geometrie haben wir zunächst an die sphärische Trigonometrie zu erinnern; wir hätten Aufgaben schon beim Gymnasium anführen können. Bei den Realanstalten herrscht das schiefwinklige sphärische Dreieck vor; Aufgaben aus der mathematischen Astronomie sind sehr häufig. Nur ein Beispiel (von einer Oberrealschule):

Bis wieviel Uhr mitteleuropäischer Zeit hat ein Wanderer am 20. Juli in der Umgegend von Frankfurt a. M. ($\varphi = 50^\circ\, 6{,}7'$; $\lambda = 0^h\, 34{,}8^m$) auf Tageslicht, die Dämmerung mitgerechnet, zu rechnen, wenn die Deklination der Sonne an diesem Tage $\delta = 20^\circ\, 38'$ ist und der Depressionswinkel der Dämmerung $\omega = 6^\circ\, 30'$ angenommen wird? Zeitgleichung $z = 6^m$.

Bei den Aufgaben aus der darstellenden Geometrie entzieht sich die Lösung meist der Wiedergabe, da wir die Zeichnungen, die hier in erster Linie, manchmal auch allein, verlangt werden, nicht reproduzieren können. Ich begnüge mich also mit der Angabe einiger Beispiele. Zunächst zwei sehr einfache von einer Oberrealschule:

Es ist gegeben ein gerades fünfseitiges Prisma, dessen Höhe 10 cm ist, und dessen beliebige Grundfläche im Grundriß liegt. Von dem Prisma wird durch eine zur Aufrißebene senkrechte Ebene, welche mit der Grundrißebene einen Winkel von 45° bildet, ein oberes Stück abgeschnitten. Von dem Restkörper ist das Netz zu zeichnen.

Gegeben ist durch Grundriß und Aufriß eine gerade Pyramide mit der Höhe 10 cm. Die Grundfläche ist ein reguläres Sechseck mit der Seitenlänge 2,5 cm, sie liegt in der Grundrißebene, und zwar so, daß ihr Mittelpunkt 4 cm von der Achse entfernt und ein Seitenpaar parallel der Achse ist. Durch den Mittelpunkt der Höhe ist eine Ebene gelegt, die mit ihr einen Winkel von 30° bildet und senkrecht zur Aufrißebene liegt. Die wahre Größe der Durchschnittsfigur ist zu konstruieren.

Wenn eine schriftliche Darlegung der Konstruktion verlangt wird, so kann die Aufgabe nicht gut komplizierter gewählt werden, weil sonst die Zeit nicht zur Ausführung einer sauberen Zeichnung ausreicht. Bei der folgenden Aufgabe (von einem Realgymnasium) war nur die Zeichnung verlangt:

Von einem geraden auf der Horizontalebene stehenden Kreiskegel ist gegeben der Radius des Grundkreises = 3, der Mittelpunkt dieses Kreises $M = 7;\ 4;\ 0$; und die Höhe = 7,5. Der Kegel wird geschnitten von einer Ebene E, die die Projektionsachse im Nullpunkt schneidet und deren *H.Sp.* (= Grundrißspur) E' mit dieser Achse einen Winkel von 60° bildet, während die Ebene E selbst mit der *H.E.* (= Grundrißebene) einen Winkel von 30° bildet. Gesucht:

a) die Projektionen des Kegels;
b) die *V.Sp.* (= Aufrißspur) E'' der Schnittebene;
c) die Projektionen der Achsen des Kegelschnittes;
d) die Projektionen des ganzen Kegelschnittes selbst;
e) die wahre Gestalt des Schnittes;
f) die Projektionen der Brennpunkte des Kegelschnittes.

Neben diesen Aufgaben, die dem Gebiete der Orthogonalprojektion entnommen sind, mögen noch einige andere verwandte Fragen hier einen Platz finden – ich bin gerade hier ein wenig ausführlicher, weil die landläufigen Aufgabensammlungen, die über die Reifeprüfung in Preußen orientieren könnten, es hier an Material fehlen lassen.

(Von einer Oberrealschule:) Auf der Erdoberfläche ist ein Kreis gezogen, der den Abstand des Nordpols von Kiel zum Durchmesser hat. Man soll von der entstandenen Kugelhaube das Bild in stereographischer Projektion auf der Ebene des Äquators zeichnen und den Maßstab der Karte angeben.

(Von einem Realgymnasium:) Das perspektivische Bild eines Würfels mit aufgesetzter, abgestumpfter gerader Pyramide zu entwerfen. Würfelkante 3 cm, Höhe des Pyramidenstumpfes 1,5 cm, Oberkante 2 cm. Lage der Bildebene, des Grundrisses und des Augenpunktes sind aus beifolgender Skizze [deren Reproduktion wir hier unterlassen] zu erkennen.

(Von einer Oberrealschule:) Gegeben ein Dreieck ($a = 8$ cm, $b = 7$ cm, $c = 5$ cm) mit einbeschriebenem Kreise. Es soll das harmonische Bild der Figur bestimmt werden, wenn der Mittelpunkt des Kreises Projektionszentrum und die Seite a Fluchtgerade ist.

Lösung eines Schülers (die Figur ist nicht wiedergegeben): Soll eine Figur harmonisch abgebildet werden, so muß der Abstand des Projektionszentrums von der Fluchtgeraden gleich dem von Fluchtgerade und Projektionsachse sein. Da der Kreis die Fluchtgerade berührt, so liegt das Bild des Berührungspunktes im Unendlichen, das Bild des Kreises hat einen Punkt im Unendlichen, ist also eine Parabel. Man bildet einzelne Punkte des Kreises ab, indem man den Sehstrahl zieht, den betreffenden Punkt mit G (der Projektion von z auf f) verbindet und im Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit a auf a das Lot errichtet; dieses schneidet den Sehstrahl im Bildpunkt. Da der Gegenstand symmetrisch zu ZG liegt, so gilt dasselbe für das Bild; hieraus folgt die Konstruktion weiterer Punkte des Bildes. Die Seite a bildet sich im Unendlichen ab. b und c werden abgebildet, indem man den Bildpunkt ihres Schnittpunktes mit den Schnittpunkten von a mit b und c verbindet. Die Bilder von b und c müssen auch an der Parabel Tangenten sein.

Aus dem Gebiete der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte werden wohl regelmäßig Konstruktionsaufgaben gestellt. Ich begnüge mich mit der Anführung eines nicht sehr schwierigen Beispieles von einer Oberrealschule:

Gegeben sind von einem Kegelschnitt zwei Tangenten, der Berührungspunkt auf einer derselben und ein Brennpunkt. Es soll der Kegelschnitt konstruiert werden.

Lösung eines Schülers. Überlegung: Für den zweiten Brennpunkt, den Mittelpunkt des Leitkreises, sind zwei geometrische Örter bekannt. Der erste ist die Symmetrale der Gegenpunkte des gegebenen Brennpunktes in bezug auf die Tangenten. Der zweite Ort ist die Verbindungslinie des einen Gegenpunktes mit dem entsprechenden Berührungspunkt. Ist der zweite Brennpunkt bekannt, so ist der Leitkreis der um diesen Brennpunkt durch den Gegenpunkt gezogene Kreis.

Konstruktion: Man zeichnet eine Tangente t_1 mit ihrem Berührungspunkte B_1, den Brennpunkt F_1 und zieht eine zweite Tangente. (Bemerkung des Lehrers

am Rande: Diese Stücke sind gegeben!) Dann fällt man $F_1F_1' \perp t_1$ und $F_1F_1'' \perp t_2$ und macht $F_1G_1 = 2F_1F_1'$ und $F_1G_2 = 2F_1F_2''$. Darauf zeichnet man die Symmetrale von G_1 und G_2 und bringt sie zum Schnitt mit G_1B_1. Der Schnittpunkt ist der gesuchte Brennpunkt F. Dann zieht man mit FG_1 um F den Kreis. Dieses ist der Leitkreis.

Als letztes, in den Reifeprüfungen auftretendes Gebiet sei die analytische Geometrie genannt. Beispiele, sogar nicht ganz einfache, waren schon beim Gymnasium gegeben; auf solche, die auf die Benutzung der Infinitesimalrechnung Bezug haben, gehen wir im dritten Teile ein. Hier nur einige ergänzende Anmerkungen.

Man geht in der analytischen Geometrie der Ebene bis zur allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte und bis zu Potenzgeraden und dergleichen vor. Wir treffen z. B. an einer Oberrealschule die folgende Aufgabe:

Die Gleichungen zweier Kreise sind

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 14y + 38 = 0.$$

Welches sind die Gleichungen ihrer Zentral- und ihrer Potenzlinie? Welchen Abstand haben beide Linien vom Koordinatenanfangspunkt?

(Von einem Realgymnasium:) Von einer Ellipse mit dem Mittelpunkte O sind gegeben die halbe Länge OA der Hauptachse und die halben Längen OE_1 und OE_2 zweier konjugierter Durchmesser. Gesucht

a) die halbe Nebenachse;
b) die Koordinaten von E_1 in bezug auf die Mittelpunktsgleichung der Ellipse und die Richtungskonstante von OE_1;
c) die Richtungskonstante von OE_2;
d) $\sphericalangle E_1OE_2$;
e) Nachweis, daß ΔOE_1E_2 gleich dem achten Teile des Rechtecks aus den beiden Achsen der Ellipse ist . . .

Schließlich noch eine Anwendung der analytischen Geometrie auf die Astronomie, von einer Oberrealschule:

Ein Komet beschreibt eine parabolische Bahn und befindet sich bei einer Anomalie von $\varphi_1 = 90°$ in einer Entfernung von der Sonne, die 1,5 mal so groß ist als ein Erdbahnhalbmesser. Nach $t = 10$ Tagen ist er von der Sonne ebensoweit entfernt wie die Erde, und die Anomalie beträgt $\varphi_2 = 120°$. Wann ist der Komet der Sonne am nächsten?

Lösung eines Schülers: In der Figur ist K_1 der Stand des Kometen zur Zeit der ersten Beobachtung. Sein Brennstrahl ist $1{,}5\,r$. K_2 ist der Kometenstand nach $t = 10$ Tagen. Der Brennstrahl ist r. In P ist der Komet im Perihel. Sein Brennstrahl ist $\frac{1{,}5}{2} r$. Um die Zeit x zu berechnen, welche der Komet braucht, um von K_2 nach P zu kommen, verwende ich das Keplersche Gesetz: „Die Brennstrahlen beschreiben . . ." oder mit Anwendung auf unsere Aufgabe . . .

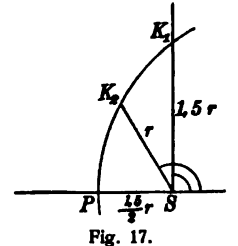


Fig. 17.

Es verhält sich also

$$PSR_1 : PSR_2 = (t + x) : x.$$

Der Inhalt des Parabelsektors PSR_1 ist

$$J_1 = \frac{1{,}5r \cdot \sin\varphi_1}{6}(p + 1{,}5r).$$

Folglich, falls $p = 1{,}5r$,

$$J_1 = \frac{1{,}5r^2 \cdot \sin\varphi_1 \cdot 3}{6}.$$

Der Inhalt von PSR_2 ist

$$J_2 = \ldots = \frac{2{,}5r^2 \cdot \sin\varphi_2}{6}.$$

Mithin verhält sich

$$\frac{3 \cdot 1{,}5r^2 \cdot \sin\varphi_1}{6} : \frac{2{,}5r^2 \cdot \sin\varphi_2}{6} = (t + x) : x.$$

[Daraus ergibt sich durch Einsetzen von φ_1 und φ_2] ...

$$x = \frac{43{,}30}{4{,}67} = 9{,}27.$$

Antwort: Der Komet ist der Sonne am nächsten 9,27 Tage nach der zweiten Beobachtung.

Dritter Teil.

Der Einfluß der Reformbewegung auf die Lehrpläne.

23. Die Vorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte und ihr Verhältnis zu den amtlichen Lehrplänen.

Die Reformbewegung im mathematischen Unterricht findet ihren schärfsten Ausdruck in den sog. Meraner und Stuttgarter Vorschlägen[1]) der von der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte eingesetzten Unterrichtskommission. Ich will mit einer kleinen Jahrestabelle beginnen, welche die wichtigsten äußeren Momente der Bewegung angibt und an die Junikonferenz von 1900 anschließt, mit der wir im Abschnitt 1 unsere geschichtliche Einleitung beschlossen haben.[2])

1900. Junikonferenz, Berlin. Von Mathematikern nahmen teil Hauck, Klein, Schwalbe, Slaby.

1902. Artikel von Klein und Götting über eine Änderung des Lehrzieles im mathematischen Unterricht.[3])

1903. Naturforscherversammlung in Kassel: Gemeinsames Vorgehen mit den Biologen.

1904. Göttinger Ferienkurs mit Vorlesungen von Klein: Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen.[4]) Naturforscherversammlung in Breslau: Einsetzung der Unterrichtskommission (Mathematiker in der Kommission: v. Borries, Gutzmer, Klein, Peters, Pietzker, Poske, Schotten).

1905. Naturforscherversammlung in Meran: Meraner Vorschläge.

1906. Naturforscherversammlung in Stuttgart: Stuttgarter Vorschläge.

---

1) Vgl. A. Gutzmer, Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Leipzig (Teubner) 1908.

2) Der im 3. Bande dieser Abhandlungen erscheinende Bericht von R. Schimmack wird in seiner Darstellung der Reformbewegung ausführlicher zwar erst mit dem Jahre 1907 einsetzen, aber in der Einleitung mit einem Rückblick auf die Entwicklung bis dahin beginnen. Auf ihn sei hier nachdrücklich hingewiesen.

3) Klein, Über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 11 (1902), S. 128ff. Götting, Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht an höheren Realanstalten. Ebenda 11 (1902), S. 192ff. Beide Aufsätze sind wieder abgedruckt in Klein-Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts der höheren Schulen. Leipzig (Teubner) 1904, S. 33ff., S. 48ff.

4) Abgedruckt in den eben genannten Neuen Beiträgen von Klein und Riecke. Hier findet sich die klare Formulierung: Die vorbereitende Darlegung des Funktionsbegriffes ... und die erste Einführung in die analytische Geometrie und die Anfänge der Differential- und Integralrechnung sollte allen Arten höherer Schulen gemeinsam sein.

1907. Naturforscherversammlung in Dresden: Dresdener Vorschläge. Auflösung der Unterrichtskommission.

1908. Gründung des Deutschen Ausschusses für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Damnu); Mathematiker im Ausschuß: Gutzmer, Klein, Poske, Schotten, Stäckel, Thaer, Treutlein.[1])

Von den Vorschlägen der Unterrichtskommission kommen hier in Betracht: 1) Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den mehrklassigen höheren Lehranstalten. Meran 1905. 2) Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht an den Reformschulen. Stuttgart 1906. 3) Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht an den sechsklassigen Realanstalten. Stuttgart 1906.

Die Vorschläge der Unterrichtskommission sehen als zwei Hauptziele des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen an:

a) die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens;

b) die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens.

Im einzelnen suchen sie diese Aufgaben zu erreichen, indem sie wünschen:

I. „den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen". Dieses psychologische Prinzip äußert sich in der Betonung des propädeutischen Unterrichts in Arithmetik und Geometrie, in der Forderung eines allmählichen Überganges vom anschaulichen zum deduktiven Verfahren;

II. „die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zur möglichsten Entwicklung zu bringen". Dieses utilitaristische Prinzip äußert sich in der Wertschätzung der Anwendungen;

III. „den Zusammenhang des Wissens in sich von Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewußten zu machen". Dieses didaktische Prinzip führt zur Konzentrierung des gesamten Unterrichtes um einen Hauptbegriff, die Funktion, im algebraischen oder geometrischen Gewande.

Alle diese Forderungen sind an sich nicht neu; einzelne weitblickende Männer haben schon vor 20 und 30 Jahren das, was die Meraner Vorschläge wollen, in ihrem Unterrichte mehr oder minder in die Tat umgesetzt. Eine spätere Geschichte der Reformbewegung, welcher ein größerer Abstand von dieser noch so sehr im Fluß befindlichen Bewegung gestattet, vollkommen objektiv zu urteilen, wird Belege in reicher Zahl finden.

Das psychologische Prinzip hat schon vor der eigentlichen Reformbewegung eifrigste Förderer gehabt, ich nenne nur Treutlein in Baden und Höfler in Österreich. Es gibt aber manche Mathematiklehrer, die, obgleich sonst durchaus Freunde der Reformbewegung, sich in diesem Punkte nicht allen ihren Folgerungen anschließen.

1) Die „Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" erscheinen in Heften bei Teubner, Leipzig.

Das utilitaristische Prinzip ist, wie wir schon im Abschnitt 13 ausführten, bereits seit 1891 dem früher vorherrschenden formalistischen gleichwertig zur Seite getreten[1]), und insbesondere nach der Seite des räumlichen Anschauungsvermögens hin herrschend geworden.

Nicht in gleichem Maße ist der Konzentrierung des Unterrichts um den Funktionsbegriff[2]) vorgearbeitet. Hier war die starre Figur, die unveränderliche Zahl herrschend. Immerhin findet man um so mehr Vorkämpfer auch für dieses didaktische Prinzip, je mehr man Literatur und Unterrichtsweise danach durchforscht. Aus der Schulbuchliteratur ist einiges in meinem Bericht über die Lehrbücher (S. 77/78) zusammengetragen; und auch aus der dem allgemeinen Studium fast gänzlich verschlossenen Lehrtätigkeit werden immer mehr Beispiele bekannt. Ich muß es mir aber versagen, hier einzelne Fälle anzuführen, nur an eine, wie es scheint, ziemlich vergessene Rede von A. v. Oettingen „Über den mathematischen Unterricht in der Schule" (Festrede zur Jahresfeier der Stiftung der Universität Dorpat. Dorpat (Mattiesen) 1873), sei erinnert, wo als Forderungen klar formuliert werden:

1) die Einführung der Abhängigkeit veränderlicher Größen, kurz gefaßt, des Begriffes der Funktionen;
2) die hieran sich eng anschließenden, kaum zu umgehenden Elemente der analytischen Geometrie sowie die der Differentialrechnung.

Aber ganz verfehlt ist die Meinung, der man in manchen Kreisen begegnet, die Reformvorschläge der Unterrichtskommission bedeuteten überhaupt nichts Neues, was sie wollten, hätte man schon lange vorher ausgeführt. Höfler, glaube ich, hat einmal jenen um den mathematischen Unterricht hochverdienten Männern, für welche diese Anschauung zutreffen könnte, gesagt, es wäre nur ein Lob für die Reformbewegung, wenn sie hörte: „wenns weiter nichts ist?" Aber möchten auch noch so viele Vorläufer sich finden, allein schon die Zusammenschweißung aller dieser, vorher nicht selten einander scharf befehdender Forderungen zu einem stoßkräftigen Ganzen und dann das machtvolle Eintreten führender Persönlichkeiten für das so Gewonnene bedeutet eine Tat, die in der Geschichte des mathematischen Unterrichts kaum ein Analogon findet.

---

1) Vgl. dazu die Notiz A. Richter, Die Reform des mathematischen Gymnasialunterrichtes durch die Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37 (1906), S. 141 ff. Als Beispiel eines älteren Lehrplanes, der bereits in weitem Maße „praktische Aufgaben" berücksichtigt sei, der des Königstädtischen Realgymnasiums in Berlin, Programm 1903, genannt.

2) Inwieweit übrigens die Zukunft über diese Vorschläge hinausgehend den allgemeineren Mengenbegriff oder den Gruppen- und Invariantenbegriff gleichfalls dem elementaren Unterricht anfügen wird, läßt sich nicht voraussagen; erste Ansätze dazu sind jedenfalls in einzelnen Ländern vorhanden.

Daß tatsächlich seit den Meraner Vorschlägen eine vollständige Wandelung eingetreten ist, daß der Unterricht in der Verwendung des Funktionsbegriffes und der Infinitesimalrechnung ganz allgemein freigebiger und „aufrichtiger“ geworden ist, ist eine Tatsache, die kaum bestritten werden wird. F. Marotte schrieb nach einer Hospitationsreise im Jahre 1903: „*La notion de fonction, la réprésentation géométrique y sont encore peu employées.*“ Mir ist auf einer Reise im Jahre 1909, bei der ich auch eine ganze Anzahl von Schulen, die als Gegner der Reformbewegung galten, besuchte, keine Schule begegnet, in der mir nicht der Funktionsbegriff, nur eine, in der mir nicht die graphische Darstellung in der einen oder anderen Form, auf der Unter- oder erst auf der Oberstufe, entgegengetreten wäre. So bedeutend sind die Wandlungen in einer verschwindend kurzen Zeit gewesen. Von jenen Zeiten allerdings, in denen der Funktionsbegriff als beherrschender Begriff den ganzen mathematischen Unterricht von den Mittelklassen an „wie ein Ferment durchsetzt“, sind wir gegenwärtig noch recht weit entfernt; das werden die nächsten Paragraphen zeigen.

Die Meraner Vorschläge enthalten für die verschiedenen Schularten nur einen Musterlehrplan, der auf das Gymnasium zugeschnitten ist. Dieser Lehrgang war durchaus nicht, wie zuweilen angenommen wird, als bindende Vorschrift gedacht, er sollte „nur eine von vielen Möglichkeiten darstellen, wie man die Ideen der Unterrichtskommission in die Wirklichkeit umsetzen kann, ohne mit den bestehenden Lehrplänen in einen allzuscharfen Gegensatz zu geraten“.[1])

Es ist vielfach bedauert worden, daß die Beratungen in der Kommission nicht zu einem Lehrplan auch für die Realanstalten, insbesondere für die Oberrealschule, geführt haben. Denn hier ist bei der größeren Stundenzahl die Möglichkeit gegeben, die Ideen der Vorschläge kräftiger durchzuführen als bei den Gymnasien; außerdem ist, wie auch aus dem Nachfolgenden sich zeigen wird, mit dem weiteren Umfange des mathematischen Unterrichts mehr Spielraum zur Anpassung an die Vorschläge unter Wahrung der Grundgedanken in den amtlichen Lehrplänen und der eigenen Anschauungen gegeben.

Eine sehr klare Gegenüberstellung des amtlichen preußischen Lehrplanes für das Gymnasium und des Meraner Lehrplanes hat M. Nath seinerzeit gegeben.[2]) Es ist anzunehmen, daß die Meraner Vorschläge in aller Hände sind; ich gehe also nicht näher auf sie ein. Zudem werden wir einige Beispiele kennen lernen, die sich sehr eng diesen Plänen anschließen.

1) Vgl. H. Schotten, Die Meraner Vorschläge in der Praxis des mathematischen Unterrichts. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 15 (1909) S. 97 ff. und Zeitschrift für mathem. u. naturwissenschaftl. Unterricht 40 (1909) S. 571 ff.

2) M. Nath, Die preußischen Lehrpläne für den mathematischen Unterricht am Gymnasium und die Vorschläge der Breslauer Unterrichtskommission. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 15 (1906) S. 93 ff.

Nur auf eines sei jetzt schon hingewiesen: die Lehrpläne sind, wie alle, da bei den Verhandlungen der Unterrichtskommission einer Majorisierung aus dem Wege gegangen ist, ein Kompromißprodukt. Das äußert sich an einer Stelle mit großer Deutlichkeit: in der Stellungnahme zur Differential- und Integralrechnung. Da offenbar eine volle Übereinstimmung in der Kommission nicht bestand, ließ man diese wichtige Frage offen; man spricht von einer „eventuellen" Heranziehung der Begriffe des Differentialquotienten und des Integrals. Man darf wohl sagen, daß die uneingeschränkte Forderung der Grundtatsachen aus der Infinitesimalrechnung auch für die Gymnasien — für die realen Anstalten bedeutet sie eine Selbstverständlichkeit — der Bewegung eine noch größere Stoßkraft gegeben hätte. Tatsächlich bringen denn auch alle nach dem Meraner Plane unterrichtenden Gymnasien und daneben viele andere die Infinitesimalrechnung voll zur Geltung.

Die Stuttgarter Vorschläge gehen noch einmal ausführlich auf die Reformschulen und die sechsklassigen Realschulen ein. Was den Lehrplan anlangt, so wird bei den Reformschulen auf den Hauptgedanken der Meraner Vorschläge verwiesen, für die Realschulen ist ein Lehrplan angedeutet.

Da die Vorschläge davon ausgehen, daß die Zielleistungen der Realschule in der Mathematik etwa dieselben oder gar noch etwas geringer als die der Unterstufe gymnasialer Anstalten sind, wohingegen anderseits das Rechnen bis zur letzten Klasse durchgeführt wird, stehen sie in einem beträchtlichen Gegensatz zu den amtlichen Lehrplänen, welche die Realschulen im wesentlichen als die Unterstufen der höheren Schulen erscheinen lassen. Daß diese Pläne für die Realschulen an einer preußischen Anstalt erprobt würden, ist mir nicht bekannt; sind doch schon in ihnen z. B. das logarithmische Rechnen, der Zusammenhang zwischen Koeffizienten und Wurzeln und die graphische Auflösung von Gleichungen zweiten Grades ganz gestrichen, und die Trigonometrie geht nur bis zur Ausführung „einfacher Rechnungen über das rechtwinklige Dreieck". Damit würden diese Realschulen sogar hinter den durch die Verfügung vom Februar 1910 reorganisierten preußischen Mittelschulen zurück bleiben (vgl. Abschnitt V).

Nach allem sind für die Reformbewegung im wesentlichen die Meraner Vorschläge allein Wegweiser gewesen. Wie die praktische Lehrerfahrung darauf reagiert hat, versuchen die folgenden Abschnitte objektiv und ohne daß zu den einzelnen Richtungen Stellung genommen wird, darzustellen.

24. Vorbemerkungen über die Reformbewegung im mathematischen Unterricht der höheren Schulen.

Wer einen Begriff davon geben will, wie weit bis jetzt die sogenannte Reformbewegung in die mathematischen Lehrpläne der einzelnen Anstalten eingedrungen ist, sieht sich mannigfachen Schwierig-

keiten gegenüber. Ist es schon an und für sich eine nicht ganz leichte Aufgabe, von einer noch im Fluß befindlichen Umgestaltung eine Darstellung zu geben, wo jedes Jahr eine Verschiebung des Bildes gegen das Vorjahr zeigt, so reicht das Beginnen an die Unmöglichkeit heran, wenn man bedenkt, daß nicht nur jede einzelne Anstalt, nein, daß geradezu jede einzelne Lehrerpersönlichkeit ihren wesentlichen Anteil an den Einzelheiten des Bildes hat. Oft stellen sich an ein und derselben Anstalt die verschiedenen Mathematiklehrer durchaus verschieden zu den grundlegenden Fragen, und gar in deren Umwertung in ihrem Unterricht werden sie meist noch weiter auseinandergehen. Nicht selten wird der eine ein wenig stürmischer vorgehende Kollege von einem zurückhaltenden Eklektiker der eigenen Anstalt als Manierist verdammt werden.

Es braucht nicht besonders ausgeführt zu werden, daß diese Herrschaft des Individualismus sicherlich für das Gesamtergebnis weit fruchtbringender ist, als es ein Schematismus sein könnte; die lebendige Einwirkung der Persönlichkeit des Lehrenden auf den Lernenden kommt nur so zur rechten Geltung. Unannehmlichkeiten, die für die Schüler daraus entstehen, lassen sich leicht auf ein Mindestmaß zurückführen, einmal dadurch, daß das Aufrücken der Lehrer mit den Schülern während mehrerer Jahre (z. B. von Quarta bis UII und wieder von OII bis OI) besonders auf der Oberstufe zur Regel wird; anderseits dadurch, daß über die ungefähre Gestaltung der Lehraufgaben eine, sei es nun in persönlicher Fühlungnahme der Beteiligten, sei es in Fachkonferenzen, eingehendere Verständigung erfolgt.

Größer sind die Schwierigkeiten allerdings, wenn ein Schüler von einer Anstalt – etwa von einer nach Meraner Lehrplan unterrichtenden – zu einer anders gearteten übergeht. Aber solche Übergänge sind, wenigstens auf der Oberstufe, glücklicherweise nicht gar zu häufig; auf der Unterstufe lassen sich die Gegensätze in wenigen Stunden, die vielfach von den beteiligten Lehrern ohne Entgelt erteilt werden, überbrücken; sie dürften übrigens nicht schwerwiegender sein als etwa bei den neueren Sprachen, wo hier mehr nach der sogenannten direkten, dort mehr nach der alten Methode unterrichtet wird.

An manchen Stellen wird allerdings der Unterricht genötigt sein, diesen Verschiedenheiten in der Vorbildung in ausgedehnterer Weise Rechnung zu tragen; das gilt vor allem von den Obersekunden der Oberrealschulen, die in der Regel äußerst verschiedenartig vorbereitete Schüler aus den umliegenden Realschulen aufnehmen, deren Wissen einigermaßen homogen zu machen eine oft nicht leichte Aufgabe ist. Es sei nur als durchaus nicht besonders abnormes Beispiel angeführt, daß in einer OII einer Oberrealschule in Mitteldeutschland mit 33 Schülern 8 verschieden vorbereitete Gruppen waren. Von den 23 neu in die Anstalt eingetretenen Schülern gingen allerdings 13 im ersten Halbjahr wieder ab.

Das Material, auf Grund dessen das Bild von dem gegenwärtigen Stande der Reformbewegung in der Praxis des Unterrichts zu konstruieren ist, liefern in erster Linie die Programme.[1]) Einige Worte müssen darüber gesagt werden, wie unzulänglich diese Nachweise sind. Früher brachten fast alle Jahresberichte die Pensenverteilung. Infolge einer neuerlichen Verfügung (vgl. Abschnitt 2) ist das in vielen Fällen weggefallen; dann kann man nur aus den Abiturientenaufgaben, die aber auch schon nicht mehr in allen Fällen veröffentlicht werden, einen Schluß auf die Stellung zur Reformbewegung ziehen. Sicher ist dabei der Schluß naturgemäß nur in dem Falle, wo man den Einfluß der Reform erkennt; wo das nicht der Fall ist, kann gleichwohl der Unterricht von der Reform Notiz nehmen, ohne daß gerade eine einschlägige Abiturientenaufgabe dies anzeigt. Wie dann aber die Reform durchgeführt ist, entzieht sich ganz dem Blick.

Immerhin gibt es noch sehr viele Anstalten, die in den Programmen den Lehrplan abdrucken; aber auch dann ist oft recht wenig gewonnen. Es kommt mehrfach vor, daß der Lehrplan von einer Reform auch nicht eine Spur zeigt, und doch kann man aus anderen Dingen entnehmen, daß sie vorhanden ist. So ergibt sich z. B. beim Königlichen Gymnasium in Wittstock aus einer Programmarbeit von Hoefinghoff[2]), daß der Verfasser in OIII und OII nach modernen Grundsätzen unterrichtet hat; der Verfasser tritt dabei sogar für die Differentialrechnung in der OII der Gymnasien ein. Am Realgymnasium Stralsund ergibt sich aus den Abiturientenaufgaben die Verwendung graphischer Darstellungen; das Gymnasium Allenstein veröffentlicht u. a. die Aufgabe: Für welchen Wert von x erreicht die Funktion

$$y = \frac{a + x}{x}\sqrt{24 + x^2}$$

ihren kleinsten Wert, und wie groß ist derselbe? – Und doch finden sich im Lehrplan selbst hier wie dort keine Andeutungen über die Reform.

Das ist im Grunde nicht so verwunderlich, als es auf den ersten Blick erscheint. Auch unsere amtlichen Lehrpläne haben die Gewohnheit, mehr anzugeben, was zu behandeln ist, als wie es zu behandeln ist (die neuen österreichischen Lehrpläne handeln darin ganz anders), und wer sagt also, daß, wenn da steht, Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten, dabei nicht die graphische Darstellung mitbenutzt ist? Es ist außerdem auch nicht viel mehr für die Einsicht in den Unterrichtsbetrieb gewonnen, wenn das stereotype Wort „graphische Darstellung“ immer wieder in den einzelnen Klassen ohne nähere

1) Wo nichts anderes vermerkt, ist das Osterprogramm des Jahres 1909 benutzt.

2) Hoefinghoff, Über die neueren Bestrebungen zur Umgestaltung des mathematischen Unterrichts. Programm des Königl. Gymnasium Wittstock. Ostern 1909.

Angabe wiederkehrt (z. B. an der städtischen Realschule Gronau i. W. für die Klassen 3, 2 und 1).

Die Einfügung des Funktionsbegriffes und der graphischen Darstellung bedeutet eben auf der ganzen Unterstufe und für einen Teil der Oberstufe in den allermeisten Fällen nur eine Änderung in der Behandlungsweise des seinem Gegenstande nach beibehaltenen Lehrplanes; erst in den letzten Klassen führt sie vielfach auch zu Änderungen des Lehrstoffes.

Wenn ich nun trotz alledem[1]) versuche, gerade an der Stellungnahme zum Funktionsbegriff den gegenwärtigen Stand des Vordringens der Reform zu fixieren, so tue ich das, weil ohne eine solche Darstellung eine Kennzeichnung des mathematischen Unterrichtes der Gegenwart unvollständig wäre, und weil man sich, wie ich meine, auch aus dem wenigen Material eine Vorstellung von den verschiedenen Anschauungen in der Praxis des Unterrichtes machen kann. Ich nehme dabei zur Ergänzung der Programmangaben noch die Erfahrungen hinzu, die ich auf einer Rundreise an höheren Lehranstalten Preußens sammeln durfte; ich hoffe so, auf die Gefahr hin, Neoimpressionismus schlimmster Sorte zu treiben, wenigstens einen ungefähren Begriff auch von dem Unterrichtsbetriebe zu geben.

Ich möchte für die Unterstufe in Rücksicht auf die Stellungnahme zum Funktionsbegriff drei Richtungen unterscheiden.

Die Richtung *A* werde kurz dahin gekennzeichnet, daß sie dem Funktionsbegriff auf der Unterstufe den Eintritt ganz verwehrt; die Geometrie ist ihr die starre des Euklid, die Arithmetik das Rechnen mit der allgemeinen, aber konstanten Zahl. Das Wort Funktion dringt höchstens gelegentlich der trigonometrischen Funktionen an das Schülerohr; der Begriff des rechtwinkligen Koordinatensystems bleibt dem mathematischen Unterricht der Unterstufe fremd.

Der Richtung *B* mögen dann die Anstalten angehören, die zwar an dem amtlichen Lehrplane durchaus festhalten, aber an geeigneten Stellen den Funktionsbegriff hervorkehren.

Die Richtung *C* schließlich verwertet den Funktionsbegriff nicht nur als ein akzessorisches Element, sie läßt vielmehr durch ihn Auswahl und Gliederung des Lehrstoffes bestimmt sein und weicht deshalb in ihrem Lehrplan auch rein stofflich, nicht nur methodisch, vom Üblichen ab.

Ich habe die drei Richtungen eben nur in allgemeinen Worten

---

1) Was H. Wieleitner in einer Besprechung meines ersten Berichtes (Bd. I Heft 1 dieser Abhandlung) in dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 19 (1910) S. 34/35 vom Lehrbuch sagt, läßt sich auch auf die Lehrpläne übertragen; wenn auch im einzelnen der Unterricht dem Lehrplane sicher oft nicht entspricht, so gilt doch auch hier das Gesetz der großen Zahlen, d. h. die Betrachtung einer ganzen Reihe von Lehrplänen wird im Durchschnitt doch ein richtiges Bild liefern.

angedeutet, das folgende soll dem erst einen Inhalt geben. Es bedarf keiner Erwähnung, daß die Grenzen zwischen den einzelnen Richtungen, zumal zwischen *B* und *C*, nicht streng zu ziehen sind.

Wie heute die einzelnen Richtungen zahlenmäßig zueinander stehen, läßt sich einigermaßen verläßlich kaum übersehen. Sicherlich hat die Gruppe *C* nur erst wenige Vertreter, die Gruppen *A* und *B* werden nach meiner Ansicht etwa die gleiche Stärke haben.

25. Der Funktionsbegriff auf der Unterstufe der Gymnasien.

Über die Gruppe *A* brauche ich nichts mehr zu sagen; ich wende mich gleich zu *B*. Als Beispiel einer gemäßigten, immerhin der Richtung *C* sich schon sehr nähernden Reform will ich etwa den Lehrplan des Gymnasium Augustum zu Görlitz anführen.[1]) Ich begnüge mich hier und in den folgenden Fällen meist mit der Angabe der für uns in Betracht kommenden Stellen der Lehrpläne und verzichte also, von einigen Ausnahmen abgesehen, auf eine vollständige Wiedergabe.

IV. Beweglichkeit der Figur. Lagebeziehung zwischen Gerade und Kreis. Abhängigkeit der Dreiecksstücke untereinander.

U III. Arithmetik: Die Rechnungsregeln der ersten und zweiten Stufe systematisch mit Buchstabenformeln. Besonderer Nachdruck ist auf die Einführung der Formeln $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)\cdot(a-b)$ zu legen; empfehlenswert ist deren geometrische Veranschaulichung. Einführung der positiven und negativen Zahlengröße unter Beschränkung auf das Notwendigste; Entwicklung derselben an praktischen Beispielen und Veranschaulichung durch die beiderseits unendlich ausgedehnte Zahlenlinie. Fortsetzung der Übungen in Auswertung von Buchstabenausdrücken unter steter Betonung des funktionalen Charakters der auftretenden Größenveränderungen, insbesondere bei den Formeln der Zinsrechnung, wie z. B. $t=\frac{Z\cdot 100}{K\cdot p}$. Unterschied zwichen identischen und Bestimmungsgleichungen. Auflösung einfacher reiner und eingekleideter Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

O III. Arithmetik: U. a. Anfänge in graphischer Darstellung können im Anschluß an physikalische Vorgänge gemacht werden.

Raumlehre: U. a. Annäherungsberechnung krummlinig begrenzter Flächen.

U II. Arithmetik: Wurzeln. Logarithmen. – Abhängigkeit eines Größenausdrucks von einer in ihm auftretenden Variablen. Graphische Darstellung einfacher linerarer Funktionen $\left(\text{und der Funktionen } y=x^2 \text{ und } y=\frac{1}{x}\right)$ und Benutzung dieser Darstellung zur Auflösung von Gleichungen. Graphische Darstellung der Exponentialfunktion $y=2^x$.

Gehen wir kurz auf einige bezeichnende Stellen ein, in denen dieser Lehrplan den Funktionsbegriff hervorhebt. Zunächst haben wir von Quarta an in der Geometrie den Hinweis auf die gegenseitige Abhängigkeit der Stücke voneinander, die besonders bei Benutzung der Beweglichkeit der Figuren deutlich wird. Ändert man den Abstand einer Kreissehne vom Kreismittelpunkt, so ändert sich auch ihre Länge; wird der Abstand größer, so wird die Sehne kürzer. Oder

1) Lehrpläne, 2. Heft. Jahresbericht Gymnasium Augustum der Stadt Görlitz. Ostern 1906.

ändert man von zwei Nebenwinkeln den einen, so ändert sich auch der andere; nimmt der eine zu, so nimmt der andere ab. Im ersten Falle kann man die herrschende Abhängigkeit (das Wort Funktion braucht noch nicht zu fallen) dem Quartaner nicht angeben, im zweiten Falle ist das möglich.

Diesergestalt bei der einen oder anderen Gelegenheit dem Funktionsbegriff schon an früher Stelle vorzuarbeiten, bedeutet keine einschneidende Neuerung, ist doch dies Verfahren in vielem gleichwertig mit der sogenannten genetischen Methode; es bedeutet nur eine ganz geringe Änderung, wenn, wie das z. B. in der Geometrie von Koppe-Diekmann[1]) geschieht, der Funktionsbegriff auch ausdrücklich zu Worte kommt.

Im arithmetischen Anfangsunterricht ist es dann die Zahl-Gerade, im beschränkteren Maße auch, wenn ich so sagen darf, die Zahlfläche, die für die Ableitung der Rechengesetze von Wert ist.

Eine offene und mehrfach erörterte Frage ist es, ob man schon in UIII die lineare Funktion graphisch darstellen soll, wenn die Gleichung ersten Grades durchgenommen wird, mit der die Einübung der Rechenoperationen zu verknüpfen ist.

Einige Stimmen haben sich dagegen ausgesprochen; so befürwortete z. B. P. Kokott auf dem Göttinger Ferienkurs 1908 die Behandlung einfacher quadratischer Funktionen vor den linearen Funktionen; die Gerade $y = x$ biete den Schülern gewisse Schwierigkeiten.[2]) Ähnlich führte bei anderer Gelegenheit C. Färber[3]) aus, daß gerade die lineare Funktion dem Verständnis eines Tertianers deshalb besondere Schwierigkeiten bereiten wird, „weil bei dieser die Verpflichtung besteht, das aus der Gleichung konstruierte Gebilde mit einem schon vorher bekannten zu identifizieren, während etwa für die Kurven $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x, \ldots$ eine solche Notwendigkeit nicht vorliegt."

Weniger wichtig erscheint die Frage, ob man bereits in UIII oder erst in OIII, wenn auch der Physikunterricht gebieterisch dazu drängt, die graphische Darstellung empirischer Kurven üben soll. Der Wert, der in weiten Kreisen der Reformer auf empirische Punktkonstruktionen gelegt wird, wird von anderer Seite stark in Zweifel gezogen, meist wohl mit dem Hinweis auf die geringe Strenge dieses graphischen Interpolationsverfahrens. Hauck[4]) hat demgegenüber einmal

1) Koppe und Diekmanns Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. Ausg. für Realanstalten. Neue Bearbeitung von R. Knops. 1. Teil, 24. Aufl. 1908.

2) R. Schimmack, Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichtes im Sinne der neueren Reformideen, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 39 (1908) 513 ff.

3) C. Färber, Über die Reformbestrebungen im arithmetisch-algebraischen Unterricht an höheren Schulen. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 8 (1909) S. 55 ff.

4) G. Hauck, Über angewandte Mathematik. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 36 (1905) S. 149 ff.

darauf hingewiesen, daß der Graphiker nicht eine willkürliche Kurve durch die vorgegebenen Punkte lege, sondern die schönste, nämlich die Kurve des stetigsten Krümmungswechsels, und daß dieselbe das nämliche Recht habe, wie etwa die übrigens auch in diesem Sinne „schönste“ Parabel, welche das Lagrangesche Interpolationsverfahren liefert.

In O III und U II sind graphische Darstellungen der Gleichungen ersten und zweiten Grades schon vieler Orten gang und gäbe (z. B. beim Gymnasium in Wattenscheid, beim Reformgymnasium Barmen usw.).

Von rationalen Funktionen kommt für die Unterstufe des Gymnasiums, Richtung *B*, keine weitere, von transzendenten nur die Funktion $y = \log x$, allenfalls auch $y = a^x$ (etwa für $a = 10$ oder, wie wir bei dem Görlitzer Lehrplan gesehen, für $a = 2$) in Betracht.

Wird die graphische Darstellung weiter ausgedehnt, als das in den bisherigen Lehrplänen der Fall ist, werden z. B. in ausgedehnterem Maße empirische Punktkonstruktionen von anderen Kurven, oder eine eingehendere Untersuchung der allgemeinen Parabel zweiten Grades

$$y = ax^2 + bx + c$$

oder im Anschluß an die algebraische Geometrie auch die Gleichungen des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel, nämlich

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

und

$$y = \sqrt{x^2 - a^2}$$

durchgenommen, so ist eine Verkürzung des sonstigen von den amtlichen Lehrplänen vorgeschriebenen Stoffes wohl angebracht.

In dem folgenden, der Richtung *C* zuzurechnenden Lehrplan ist beispielsweise die Logarithmenlehre aus der Untersekunda nach der Obersekunda verschoben. Dieser Plan, der gegenwärtig an den Königl. Gymnasien zu Göttingen und Hann.-Münden dem Unterrichte zugrunde liegt, hat eine historische Bedeutung. Er ist nämlich älter als der Meraner und diente diesem zur Vorlage. Der ursprünglich von Behrendsen und Götting verfaßte Plan ist um eine Kleinigkeit ausführlicher als der hier abgedruckte, der mir von Herrn Direktor Buchholz zur Verfügung gestellt wurde, stimmt aber in allem wesentlichen mit ihm überein.

VI. Die Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen, benannten und unbenannten. Die deutschen Maße, Gewichte und Münzen; Übungen in der dezimalen Schreibweise und in den einfachsten dezimalen Rechnungen als Vorbereitung für die Bruchrechnung.

V. Rechnen: Fortgesetzte Übung im Rechnen mit benannten Dezimalzahlen, unter Erweiterung des Gebietes der zur Verwendung kommenden Maße (auch ausländische Gewichte und Münzen); einfachste Aufgaben der Flächen-, Raum- und Gewichtsberechnung im Anschluß an die Raumlehre (bei allen derartigen Rechnungen ist stets ein Überschlag der Größenordnung des Ergebnisses vorauszuschicken). Teilbarkeit der Zahlen durch: 3, 4, 5, 6, 10. Gemeine Brüche mit Ausscheidung aller verwickelten Aufgaben. Übungen im Kopfrechnen.

Propädeutische Raumlehre. Einführung in die Grundbegriffe der Raumanschauung, die, von bestimmten Körpern ausgehend, Fläche, Linie und Punkt erläutert und diese Gebilde dann von den Körpern abstrahiert und selbständig betrachtet. Zeichnung von Linien, Flächen und Körpern der einfachsten Art.

IV. Rechnen: Dezimalbruchrechnung. Einfachste Regeldetriaufgaben, besonders aus dem bürgerlichen Leben. Zins- und Rabattrechnung. Berechnung des Wertes einfacher Buchstabenausdrücke durch Einsetzung einfacher Zahlen. Vorbereitung des arithmetischen Unterrichts durch Wiederholung geigneter, früher gelöster Aufgaben unter Verwendung von Buchstaben.

Raumlehre: Lehre von den Geraden, Winkeln, Dreiecken und Parallelogrammen unter tunlichster Vermeidung der euklidischen Methode. Die Beweise stützen sich auf die Anschauung und die Zeichnung der Gebilde.

U III. Arithmetik. Buchstabenrechnung mit den vier Grundoperationen. Begriff der relativen Zahlen an der Zahlenreihe erläutert. Einfachste Gleichungen mit einer Unbekannten, Übungen im Einsetzen von Zahlenreihen in Buchstabenausdrücke und propädeutische Betrachtung funktionaler Änderungen.

Raumlehre: Erweiterung der Lehre vom Viereck, Lehre vom Kreis mit möglichster Beschränkung des Stoffes. Betrachtung des Einflusses, welchen die Größenänderung einzelner Stücke auf den Gesamtcharakter der Figur ausübt. — Einfachste Konstruktionsaufgaben.

O III. Arithmetik. Ergänzung und Erweiterung der Buchstabenrechnung, namentlich Zerlegung von Polynomen. Einfachste Sätze über Proportionen. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Abhängigkeit eines Größenausdruckes von einer in ihm auftretenden Variablen. Graphische Darstellung einfacher linearer Funktionen und Benutzung dieser Darstellung zur Auflösung von Gleichungen, kontrolliert durch gleichzeitige Berechnung.

Raumlehre: Flächenvergleichung und Flächenberechnung unter Heranziehung von Gebilden mit verwickelterer geradliniger Begrenzung; Annäherungsberechnung krummlinig begrenzter Flächenstücke. Lösung einfacher Konstruktionsaufgaben auf Grund einer Analyse.

U II. Arithmetik: Potenzen und Wurzeln. Reine und eingekleidete Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten. Betrachtung des von einer Variablen abhängenden quadratischen Ausdruckes in seiner dadurch bedingten Veränderlichkeit unter graphischer Darstellung und Lösung von Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten durch Parabel.

Raumlehre: Ähnlichkeitslehre, Proportionen am Kreise, der Goldene Schnitt nur als Übungsbeispiel. Berechnung von Näherungswerten für Kreisumfang und Kreisinhalt durch polygonale Annäherung. Aufnahmen am Meßtisch.

Es ist in dem, was bisher für die Umwertung der Lehrpläne in dem Unterrichtsbetrieb angeführt ist, die graphische Darstellung, das geometrische Bild der Funktion, immer als das Sekundäre, der arithmetische Ausdruck als das Primäre angesehen worden. Es gibt eine Richtung unter den Reformern, die diese Beziehung umkehrt. Es sei dieser vom methodischen Gesichtspunkt aus fundamentale, bislang aber wohl nur von wenigen Fachkollegen geteilte Standpunkt an einem Beispiel deutlich gemacht.

Als Wurzel der quadratischen Gleichung

$$(1) \qquad x^2 + ax + b = 0$$

definiert man in üblicher Weise diejenigen Werte von x, die dieser Gleichung genügen; man findet auf arithmetischem Wege mit Hilfe der quadratischen Ergänzung die Lösung

(2) $$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

und zeigt dann, daß sich geometrisch diese Werte durch den Schnitt der Parabel $y = x^2 + ax + b$ mit der x-Achse ergeben.

Umgekehrt nun kann man von vornherein als Wurzel einer Gleichung, z. B. von (1), diejenigen Abszissenwerte definieren, in denen die zugehörige Kurve, hier die Parabel, die x-Achse schneidet. Die arithmetische Lösung (2) gewinnt man dann aus dem geometrischen Bilde durch Diskussion der Verschiebungen der Quadratzahlparabel. Erst jetzt wird man den so auf geometrischem Wege erhaltenen Wert „auf rechnerischem Wege bestätigen". Es mag sich wohl empfehlen, da doch von Beispielen mit bestimmten Zahlen ausgegangen wird, mit den beiden Verfahrungsweisen abzuwechseln und so jede zur Vertiefung im Verständnis der anderen zu verwerten.

In dem gewählten Beispiele handelt es sich im wesentlichen um eine Umkehrung der Reihenfolge in der Durchnahme des Stoffes. Recht beträchtlich aber wird der Abstand dieser Methode von der üblichen z. B. bei einer ganz auf das geometrische Verfahren gegründeten Potenzrechnung.[1])

26. Der Funktionsbegriff auf der Unterstufe der Realanstalten.

Wenn man die Unterstufe der Gymnasien und der Realanstalten in ihrer Stellungnahme zum Funktionsbegriff und zur graphischen Darstellung miteinander vergleicht, so fällt sofort auf, daß die Realanstalten den neuen Grundbegriffen in weit größerer Zahl und in erheblich umfangreicherem Maße als die Gymnasien Zugang gestatten. Das liegt daran, daß die Gymnasien in ihrer Stundenzahl infolge der verhängnisvollen Einschnürung in den Tertien arg beengt sind, und daran, daß das Mehr an arithmetischem und trigonometrischem Stoff, das die Unterstufe der Realanstalten vor den Gymnasien voraus hat, sich mühelos und von selbst dem Funktionsbegriff einordnet.

So ist es auch erklärlich, wenn manche Vertreter unseres Faches dem Funktionsbegriff durchaus seinen Platz auf der Unterstufe der Realanstalten anweisen, der Unterstufe des Gymnasiums aber versagen. Die rheinische Direktorenversammlung nahm schon 1899, also mehrere Jahre vor den Meraner Vorschlägen[2]), den Leitsatz an:

„Der Koordinatenbegriff, der Funktionsbegriff und die graphischen Darstellungen des Funktionsverlaufes sind auf den Realanstalten schon in Untersekunda, auf dem Gymnasium in Prima einzuführen, und im mathematischen, physikalischen, chemischen und naturbeschreibenden Unterrichte ausgiebig zu verwerten."

1) Ich verweise in dieser Hinsicht auf O. Behrendsen und E. Götting, Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. A. Unterstufe. Leipzig (Teubner) 1908, von dem eine 2. Auflage in Vorbereitung ist.

2) Daß die Richtung B bereits vor dem Einsetzen der Unterrichtskommission eine ganze Anzahl Vertreter gehabt hat, geht hieraus, aber auch aus einigen Lehrbüchern hervor, und wird durch viele Tatsachen aus der Unterrichtspraxis bestätigt.

Jene weitergehende Anschauung, die nicht vor den Gymnasien Halt macht, sondern allgemein wünscht (Leitsätze der Schleswig-Holsteinischen Direktorenversammlung 1907):

> Das Verständnis für den Funktionsbegriff ist sowohl im arithmetischen wie im geometrischen Unterricht möglichst frühzeitig und planmäßig vorzubereiten. In den mittleren Klassen ist die graphische Darstellung einfacher Funktionen zu üben und ihre Bedeutung zur Auflösung von Gleichungen zu zeigen,

hat noch nicht allgemeine Anerkennung gefunden. Mit anderen Worten: Die Richtung *A*, die an den Gymnasien noch recht verbreitet sein dürfte, wird an den Realanstalten nur noch ganz wenige Vertreter zählen. Die Richtung *B* dagegen wird zurzeit die vorherrschende sein. Diejenigen Lehrpläne, die sich am meisten der Richtung *C* annähern, lassen sich kurz (mit Oberrealschule Crefeld[1]) in den einleitenden Bemerkungen des Lehrplans dieser Anstalt) so kennzeichnen: Mit dem Funktionsbegriff werden die Schüler schon in Untertertia bei der Behandlung der Gleichungen ersten Grades bekannt gemacht, und auf allen höheren Klassenstufen findet er bei allen passenden Gelegenheiten gebührende Berücksichtigung. Zurückhaltende Anstalten werden nicht gleich in U III, sondern erst in späteren Klassen damit beginnen. In vielen Fällen werden die Gelegenheiten, bei denen der Funktionsbegriff zu Worte kommt, ausdrücklich aufgeführt. So heißt es im Lehrplan der städtischen Realschule Stallupönen (Programm Ostern 1909):

> In 3: Die negativen Zahlen. Erweiternde Übungen in der Buchstabenrechnung. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten unter besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Proportionen. Einführung in den Begriff der Funktion. Funktionen ersten Grades. Graphische Darstellung.
>
> In 2: Die Lehre von den Potenzen und Wurzeln. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten. Lösung durch graphische Darstellung. Einfache quadratische Gleichungen. Funktionen zweiten Grades. Zahlreiche Textaufgaben zur praktischen Anwendung der Gleichungen.
>
> In 1: Logarithmen, quadratische Gleichungen mit einer und zwei Unbekannten. Lösung auch durch graphische Darstellung.

Es ließe sich für diese Richtung noch eine ganze Reihe anderer Beispiele beibringen; zum Teil geht man noch etwas weiter, indem man (z. B. Realschule Kreuznach) auch auf transzendente und empirische Kurven ausdrücklich hinweist; andere wieder führen erst für O III (z. B. Realschule i. E. Plettenberg, Reform-Realgymnasium Kiel) oder gar erst für U II (z. B. Oberrealschule II Kiel, Realgymnasium Reichenbach i. Schles., Reformrealgymnasium Siegen) die graphischen Darstellungen in ihren Lehrplänen auf.

Um zu zeigen, in welcher Weise und in welchem Umfange der Funktionsbegriff etwa an einer Anstalt der Richtung *B* eingeführt wird, deute ich zunächst eine Wiederholungsstunde an, der ich in der U II eines Realgymnasiums beiwohnte.

---

1) Der Lehrplan der Oberrealschule. Oberrealschule zu Crefeld. Programm Ostern 1909.

Es wurde daran erinnert, wie in der Quinta und in der Quarta beim Dreisatz (Regeldetriaufgaben) Abhängigkeiten eines Wertes von anderen auftraten und wie dabei das gerade und das umgekehrte Verhältnis zu unterscheiden sei. Dann waren in O III einige Funktionen empirisch dargestellt worden. So war eine erste Aufgabe gewesen, ein Quadrat in irgend ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln und alle diese Rechtecke in eine Ecke zu legen. Die Gegenecken liegen dann auf einer Kurve, dem einen Ast einer gleichseitigen Hyperbel. Eine zweite Aufgabe war von einer Versuchsreihe mit dem Pendel ausgegangen. Es war die Schwingungsdauer bei den Pendellängen 10, 20, 30 usw. bis 160 cm beobachtet und graphisch dargestellt worden. Weiter waren die Temperaturen eines Tiegels mit Weichlot in gleichen Zeitabständen abgelesen worden bis über den Schmelzpunkt hinaus, und dann wieder bei Abkühlung bis zur Erstarrung. Es ergab sich aus der graphischen Darstellung, daß der Schmelzpunkt gleich dem Erstarrungspunkt ist. Es folgten noch einige andere Kurven, z. B. Volt- und Ampère-Zahlen bei einer allmählich abbrennenden Bogenlampe, die ohne Regulierung der Kohlenabstände ist usf. Erst später wurde dann die graphische Darstellung auch für lineare und quadratische Funktionen, für die trigonometrischen Funktionen u. dgl. benutzt.

In dem beschriebenen Unterrichtsbeispiel ist die Physik in ausgedehntem Maße herangezogen worden; wenn man erst in U II mit den graphischen Darstellungen beginnt, so verbietet sich das von selbst. Aus dem Unterrichte der U II einer Oberrealschule des Ostens möchte ich kurz andeuten, wie etwa bei einer erheblich späteren Einführung der graphischen Darstellung vorgegangen werden kann: Es wurde mit der linearen Funktion, etwa mit der Gleichung

$$x + y = 10$$

begonnen und zur praktischen Erläuterung der Bedeutung graphischer Darstellungen ein graphischer Fahrplan benutzt. Dann wurde

$$x^2 + y^2 = 25$$

dargestellt und weitergehend etwa

$$x^2 = 100$$

als Schnitt von

$$x^2 + y^2 = 100$$

und

$$y = 0$$

erkannt. In gleicher Weise wurde

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ und } y - x = 0$$

zusammengestellt. Man sieht, diese Art der Einführung steuert mit raschen Schritten auf die Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten zu.

In manchen Fällen findet die Behandlung graphischer Darstellungen eine wertvolle Stütze im Linearzeichnen. So gibt der Lehrplan der Hohenzollernschule in Schöneberg, Oberrealabteilung (Programm Ostern 1909) für O III an (am Unterricht nahmen 42 Schüler teil, so daß, trotzdem der Unterricht wahlfrei war, doch die Mehrzahl der Schüler Vorteil davon hatte):

Übung im mechanischen und verständnisvollen Gebrauch des Zirkels, der Schiene und der Dreiecke; Ausziehen und Anlegen. Planimetrische Konstruktionen mit Rücksicht auf die Mittel zeichnerischer Genauigkeit auch bei ungünstigen Lageverhältnissen. Graphische Darstellung einfacher Funktionen; krumme Linien als Erzeugnis veränderlicher Punkte oder Tangenten. Kinematik einfacher ebener Bewegungsmechanismen.

Gymnasium und Realgymnasium Bielefeld (Programm Ostern 1909) gibt u. a. an:

Für O III: Übungen im Gebrauche von Zirkel, Lineal und Ziehfeder durch Zeichnen von Flächenmustern, Kreisteilungen und anderen geometrischen Gebilden. Konstruktion der regulären Polygone im Kreise und nach gegebener Seite. Ellipsen, Spiralen.

Für U II u. a.: Konstruktion von Zykloiden, Epizykloiden, Hypozykloiden, Kreisevolventen, der jonischen Volute usw.

Natürlich macht sich das Eindringen der graphischen Darstellungen auch bei den schriftlichen Arbeiten in der Einjährigen-Prüfung der Nichtvollanstalten bemerkbar. So wurde z. B. an der Realschule Gronau i. W. Ostern 1909 folgende Aufgabe[1]) gegeben:

Löse folgende Gleichungen und stelle sie graphisch dar:

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$
$$x^2 - xy + y^2 = 13$$

oder an der Realschule in Wehlau:

$$x^2 - 4x - y = 3$$
$$3x - 2y = 11$$

arithmetisch und graphisch zu bestimmen.

Auch Fragen, denen man früher nur in der analytischen Geometrie auf der Oberstufe begegnete, z. B. die analytische Berechnung des Inhaltes eines Dreiecks (Oberrealschule i. E. Liegnitz, Programm 1909) wären hier anzuführen.

Als Beispiel eines Lehrplanes der Richtung *C* geben wir den der Oberrealschule an der Waitzstraße in Kiel.[2]) Dieser Plan geht in methodischen Bemerkungen auf eine Fülle von Einzelfragen, die sich bei der Durchführung der Reform ergeben, mit großer Ausführlichkeit ein. Wenn dabei sicherlich hie und da persönliche Anschauungen der beteiligten Lehrer in starkem Maße ausschlaggebend waren, so

---

1) Zur Fassung der Aufgabe sei bemerkt: Statt von graphischer Darstellung der Gleichungen zu sprechen, gebraucht man wohl besser den Ausdruck: Graphische Lösung von Gleichungen; dagegen werden Funktionen graphisch dargestellt.

2) Vgl. Lehrpläne und Lehraufgaben der Oberrealschule an der Waitzstraße in Kiel. Programm Ostern 1906.

schien mir doch ein vollständiger Abdruck angebracht, weil wir es hier mit einer bis in Einzelheiten durchdachten Umwertung des für Gymnasien aufgestellten Meraner Lehrplanes für Realanstalten zu tun haben. Auch von einem Realgymnasium liegt ein ähnlicher, wenn auch nicht so ausführlicher Plan vor, den W. Schmidt in einer Programmbeilage des Dürener Realgymnasiums[1]) veröffentlicht hat; um Wiederholungen zu vermeiden, gehe ich jedoch hier nicht näher darauf ein. — Die Oberrealschule an der Waitzstraße in Kiel und das Realgymnasium in Düren gehören zu denjenigen Anstalten, welche seinerzeit vom Kultusministerium zur Erprobung der Meraner Vorschläge ermächtigt wurden; außer den genannten gehören dazu noch die Oberrealschule auf der Burg in Königsberg und die bereits erwähnten Königlichen Gymnasien in Göttingen und Hann.-Münden.

VI. Rechnen: Wiederholung und Erweiterung der Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen, benannten und unbenannten, unter Anlehnung an die mathematische Form. Vermittelung des Verständnisses der deutschen Maße, Gewichte und Münzen durch die Anschauung. Übungen in der dezimalen Schreibweise und in den einfachsten dezimalen Rechnungen als Vorbereitung auf die Bruchrechnung.

V. Rechnen: Fortgesetzte Übung im Rechnen mit benannten Dezimalzahlen, unter Erweiterung des Gebietes der zur Verwendung kommenden Maße (auch auf ausländische Gewichte und Münzen). Längenmessungen, einfachste Aufgaben der Flächen- und Raumberechnung unter Verwertung des Zusammenhanges zwischen Rauminhalt und Gewicht. (Bei allen derartigen Rechnungen ist stets ein Überschlag der Größenordnung des Ergebnisses voranzuschicken.) Teilbarkeit der Zahlen. Gemeine Brüche.

Geometrie: Propädeutische Raumlehre. Einführung in die Grundbegriffe der Raumanschauung, jedoch derart, daß der Raum vorwiegend als Träger planimetrischer Raumbeziehungen erscheint. Raumanschauungen, Flächen, Linien, Punkte, zunächst an dem umgebenden Raume erläutert und bestätigt an den verschiedensten Körpern. Ebene Figuren zuerst als Teile der Körperbegrenzung, dann als selbständige Gebilde, an welchen die Begriffe der Richtung, des Winkels, des Parallelismus, der Symmetrie zum Verständnis zu bringen sind. Übung im Gebrauch des Lineals und Zirkels, beständiges Zeichnen und Messen.

IV. Rechnen und Arithmetik: Dezimalbruchrechnung. Verwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche und umgekehrt; abgekürzte Rechnung mit Dezimalzahlen. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri unter Vermeidung aller Übertreibung schematischer Formen. Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben, insbesondere Gewichtsrechnung (Brutto, Netto, Tara) und einfache Fälle der Zins-, Rabatt- und Diskontrechnung. Häufige Übungen im Kopfrechnen. Die Regeln der vier Grundrechnungen in Buchstaben mit einfachster Begründung.

Geometrie: Wiederholung und Erweiterung der im propädeutischen Kursus der Quinta anschaulich gewonnenen Lehren von den Geraden, Winkeln, Parallelen und ebenen Figuren. Die Sätze von den Dreiecken, Parallelogrammen und Trapezen. Das Einfachste aus der Kreislehre (Sehnen, Tangenten, Schnitt und Berührung zweier Kreise). Grundaufgaben und Dreieckskonstruktionen.

Aus dem Lehrstoff ist alles, was nicht zu weiterer, unbedingter Verwendung kommt, auszuscheiden und höchstens bei Gelegenheit als Übungsstoff, womöglich in der Form von Aufgaben, zu behandeln. Insbesondere kommen in Wegfall die komplizierten Kongruenzbeweise, zahlreiche Umkehrungssätze, die Inkongruenz der

1) W. Schmidt, Wie gewinnen wir für die Behandlung des Funktionsbegriffes Platz im mathematischen Unterricht? Programm Realgymnasium Düren 1906.

Dreiecke, die indirekten Beweise über berührende Kreise. In allen Teilen ist von der Konstruktion auszugehen und die Bewegung weitgehend zu benutzen (Parallelverschiebung, Umlegung, Drehung). Die Ergebnisse sind nachträglich strenger zusammenzufassen und zu begründen.

UIII. Arithmetik: Die vier Grundrechnungen mit absoluten Zahlen. Einführung der positiven und negativen Zahlgrößen. Beziehung der Zahlenreihe zu den Punkten einer Geraden. Übungen im Einsetzen von Zahlenreihen in Buchstabenausdrücke als Vorbetrachtung funktioneller Beziehungen. Zerlegung von Polynomen und Division durch Polynome. Die einfachsten Sätze von den Proportionen. Reine und eingekleidete Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Graphische Darstellung linearer Funktionen, z. B. $y=x$, $a \cdot x$, $x+b$, $a \cdot x+b$, und ihre Benutzung zur Lösung linearer Gleichungen.

Bei der Behandlung der Grundrechnungen sind Gleichungen ausgiebig zu verwenden. Scheinbeweise, namentlich bei den relativen Zahlen und den Brüchen, sind zu vermeiden. Schwierigere Divisionen von Polynomen, sowie schwierigere Zerlegungen und Kürzungen bleiben fort.

Geometrie: Kreislehre, 2. Teil (Winkel und Figuren am Kreise). Die wichtigsten geometrischen Örter. Einfache Konstruktionsaufgaben im Anschluß an den Lehrgang und mit Anwendung von Bestimmungsstücken, die in numerischen Maßen gegeben sind. Ausmessung der durch die Konstruktion erhaltenen Stücke. Einfluß der Veränderung einzelner Bestimmungsstücke auf die Konstruktion und die Größe der gefundenen Stücke. Genauigkeit der Konstruktion. Sätze über Flächengleichheit geradliniger Figuren, Berechnung ihres Flächeninhaltes. Pythagoreischer Lehrsatz. Ausmessung unregelmäßiger Vielecke durch Zerlegung nach der Koordinatenmethode. Angenäherte Berechnung krummlinig begrenzter Flächen. Übungen im Freien.

Auszuschließen sind die Sätze über das Tangentenviereck sowie die Umkehrung des Satzes vom Sehnenviereck, ferner alle nur durch Kunstgriffe lösbaren Konstruktionsaufgaben; von den Teilungsaufgaben diejenigen, bei welchen der Punkt, von dem aus geteilt werden soll, nicht in einer Ecke liegt. Bei Verwandlungsaufgaben sind vielfache Verwandlungen zu vermeiden. Für den Katheten- und Höhensatz genügt ein Beweis. Bei der Einführung in die Geodäsie ist zunächst nur die Vermessung nach rechtwinkligen Koordinaten praktisch zu üben und zu diesem Zwecke der Gebrauch von Meßlatte, Meßband, Meßkette, Winkelkreuz und Winkeltrommel zu zeigen. Als Beispiel für die Ausmessung krummlinig begrenzter Flächen eignet sich – außer einer auf Koordinatenpapier gezeichneten Kurve oder einem Flächenstück der Landkarte – ein an einem Flusse oder Teich liegendes Grundstück.

OIII. Arithmetik: Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Graphische Darstellung der Gleichung

$$ax+by+c=0$$

und ihre Benutzung zur Lösung von Gleichungen. Potenzen und Wurzeln mit ganzen Exponenten. Übung im Ausziehen von Quadratwurzeln. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten. Graphische Darstellung der Funktionen

$$y=x^2,$$
$$y=\sqrt{x},$$
$$y=ax^2+bx+c,$$
$$y=\sqrt{a^2-x^2},$$
$$y=\sqrt{x(a-x)},$$
$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$
$$y=\frac{1}{x},$$

$$y = \sqrt{a^2 + x^2}$$

und ähnlicher. Anwendung der Kurven zur graphischen Lösung von Gleichungen. — In entsprechender Weise können, falls Zeit vorhanden, die Funktionen

$$y = ax^3,$$
$$y = ax^4$$

u. a. behandelt und die Wurzeln von einfachen Gleichungen höheren Grades nach graphischer Methode — etwa auf eine Dezimalstelle — bestimmt werden. Dabei gelangt das Rechnen mit Dezimalbrüchen zur Wiederholung.

Geometrie: Ähnlichkeitslehre. Hervorhebung der Analogie zwischen Kongruenz- und Ähnlichkeitssätzen. Ausmessungen und Meßtischaufnahmen von Flächenstücken, unzugänglichen Strecken, Höhen u. a. durch Zeichnung mit Benutzung ähnlicher Dreiecke unter Angabe des Maßstabes. Proportionalität gerader Linien am Kreise. Konstruktionsaufgaben zur Lehre von den Proportionen und der Ähnlichkeit. Konstruktion einfacher algebraischer Ausdrücke nebst Anwendung auf stetige Teilung und andere geometrische Aufgaben. Berechnung regelmäßiger Vielecke. Umfang und Inhalt des Kreises.

In Wegfall kommt der größte Teil der bisherigen Anwendungen und Übungen, notwendig sind nur diejenigen Aufgaben, bei welchen eine der gewünschten ähnliche Figur gefunden wird. Vor dem Feld- und Höhenmessen im Freien findet der Ähnlichkeitsbegriff praktische Anwendung zur Bestimmung gewisser im Zimmer auftretender Strecken, z. B. der Höhe, Flächen- und Raumdiagonale. Einzelne Aufgaben sind sowohl nach geometrischer als nach algebraischer Methode zu behandeln.

UII. Arithmetik: Erweiterung des Potenzbegriffes. Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten. Auffassung und graphische Darstellung der Potenz als Exponentialgröße. Lehre von den Logarithmen. Übung im logarithmischen Rechnen. Einfache quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten und ihre Lösung auf graphischem Wege. Empirisches über die Gestalt der Kegelschnitte als Kurven zweiter Ordnung. Benutzung graphischer Darstellungen zur Veranschaulichung empirisch gefundener Zusammenhänge. Darstellung der Funktionen

$$y = a^x,$$
$$y = \log x,$$
$$y = \sin x,$$
$$y = \cos x$$

u. a. — Wiederholungen und übersichtliche Zusammenstellung der verschiedenen Rechnungsarten und Zahlengebiete.

Auszuschließen sind verwickeltere Aufgaben über negative und gebrochene Exponenten, komplizierte Operationen mit Wurzeln, schwierigere Rechnungen mit rein imaginären und komplexen Zahlen, verwickeltere Gleichungen. Dagegen ist die Herstellung von Diagrammen zur Veranschaulichung meteorologischer, physikalischer, chemischer, statistischer und ähnlicher Verhältnisse — namentlich auch im Interesse der aus UII ins Leben eintretenden Schüler — gründlich zu üben.

Geometrie. Planimetrie. Konstruktionsaufgaben, besonders solche mit algebraischer Analysis. Wiederholung aus dem ganzen Gebiete der Planimetrie.

Trigonometrie: Abhängigkeit von Seitenverhältnissen und Winkeln im rechtwinkligen Dreiecke. Dazu Aufstellung von Tabellen. Berechnung des rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecks. Vielseitige Anwendung auf praktisch ausgeführte Messungen; Anknüpfen der Rechnung an die konstruktive Planimetrie. Behandlung geeigneter Aufgaben auf konstruktivem, algebraischem und trigonometrischem Wege.

Bei den praktischen Messungen handelt es sich um die einfachsten Aufgaben des trigonometrischen Feld- und Höhenmessens. Als Winkelmeßinstrumente dienen der Winkelspiegel, der Feld-Winkelmesser und der Theodolit.

Stereometrie: Die einfachsten stereometrischen Gebilde. Anleitung zum perspektivischen Zeichnen. Berechnung von Kantenlängen, Oberflächen und Inhalten. –

An dieses letzte Beispiel eines Lehrplanes für die Unterstufe der höheren Knabenschulen möge eine Bemerkung über einige amtliche preußische Lehrpläne der letzten Zeit angeschlossen werden, welche bereits im Zeichen der Reform stehen und damit beweisen, daß auch die Schulregierung die Berechtigung und den Wert der Bewegung anerkennt. Ein solcher, nicht für eine einzelne Anstalt, sondern für die Allgemeinheit bestimmter Lehrplan kann selbstverständlich nicht die Ausführlichkeit besitzen, wie sie der eben wiedergegebene zeigt.

Die 1909 für die höheren Mädchenschulen, insbesondere auch für die den höheren Knabenschulen entsprechenden Studienanstalten, in Kraft getretenen Lehrpläne tragen den Reformbestrebungen zwar nicht so sehr in der Stoffwahl und -verteilung, umsomehr aber in den methodischen Bemerkungen Rechnung. Ein durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission veranlaßter Bericht hat das bereits näher ausgeführt.[1])

Bedeutungsvoller für unsere Darstellung sind aber die unter dem 3. Februar 1910 ergangenen Bestimmungen über die Neuordnung des Mittelschulwesens in Preußen[2]), zumal sie auch Schulen vorsehen, welche auf die U II der Reform- und der Realanstalten und auf die O II der alten Gymnasien vorbereiten. Hier sind auch die Lehrpläne trotz ihrer Kürze so gestaltet, daß der in den beigegebenen methodischen Bemerkungen geäußerte Grundgedanke:

> Der Begriff der Veränderlichkeit und gegenseitigen Abhängigkeit ist stets aufzuzeigen sowohl hinsichtlich der Größenverhältnisse als der Lagebeziehungen. Arithmetik und Geometrie sollen durch graphische Darstellungen und deren Deutungen sich aufs innigste durchdringen.

bereits vom mathematischen Anfangsunterricht an deutlich hervortritt, und daß z. B. graphische Darstellungen bereits in Klassen gefordert werden, die etwa der U III der höheren Schulen entsprechen.

Zum Abschluß dieses Abschnittes möge noch der Lehrplan des Typus *C* an einigen wenigen Stellen, die mir besonders wichtig erscheinen, näher erläutert werden.

Zunächst eine Stunde in der U III einer Oberrealschule (zu Beginn des 2. Quartals), in der die Beziehung von Zahl und Zahlstrahl behandelt wird: Es wird ein Strahl mit dem Anfangspunkt *O* an die Tafel gezeichnet; darauf werden 1, 3 usf. Dezimeter (von einzelnen Schülern)

---

1) G. Noodt, Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Schulwesens in Preußen. Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Heft 2. Leipzig (Teubner) 1909. Auch Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 40 (1909) S. 185 ff.

2) Bestimmungen über die Neuordnung des Mittelschulwesens in Preußen vom 3. Februar 1910. Berlin (Cotta) 1910.

abgetragen, weiter wird dann $2\frac{1}{2}$, schätzungsweise 3, 6 und 7, 2 usf. angegeben. Weiter ist die Zahl

$$x = 3m - 2n$$

einzutragen, wenn $m = 1$, $n = 1$ ist, wenn $m = \frac{3}{4}$, $n = \frac{1}{4}$ (Wiederholung der Bruchrechnung) ist; analog wird mit dem Ausdruck

$$x = 0{,}3 \cdot a - 0{,}2 \cdot b$$

verfahren (Dezimalbruchrechnung!). Dann wird umgekehrt gefragt: Welche Zahl würde etwa an dieser Stelle des Strahles stehen usf. Die Schüler nehmen jetzt die Hefte vor und zeichnen einen Strahl und rechnen für den obigen Ausdruck

$$x = 3m - 2n$$

einige Beispiele durch, die in einer Tabelle zusammengefaßt werden; also etwa

m	n	x
1	0,5	2
0,5	$\frac{1}{4}$	2
...	...	...

Als Hausaufgabe wird die Berechnung einiger Beispiele und deren Eintragung auf einem Strahl für den Ausdruck

$$x = 0{,}3a + 0{,}2b$$

aufgegeben.

In dem oben wiedergegebenen Kieler Lehrplan ist für UIII gelegentlich der planimetrischen Konstruktionsaufgaben angegeben: Einfluß der Veränderung einzelner Bestimmungsstücke auf die Konstruktion und die Größe der gefundenen Stücke. Dafür einige Beispiele aus der Praxis eines Realgymnasiums nach dem Dürener Programm:

1. Fünf Dreiecke zu zeichnen, in welchem $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 30°$, $60°$, $90°$, $120°$, $150°$ ist, den Umkreis zu zeichnen und die dritte Seite c und den Radius r zu messen. Es ergibt sich

γ	c	r
30°	2,32 cm	2,32 cm
60°	4,59 „	2,65 „
90°	6,41 „	3,21 „
120°	7,81 „	4,51 „
150°	8,70 „	8,70 „

2. Auf Millimeterpapier ist um O ein Kreis von 10 cm Radius zu zeichnen, von A sind auf der Peripherie Sehnen AB von 2, 4, 6, ..., 20 cm Länge zu ziehen und Lote OC auf sie zu fällen. Für AC und OC sind Tabellen zu geben. Graphische Darstellung, indem AC auf die Verlängerung von AO gelegt wird.

3. Zeichne einen Kreis mit 5 cm Radius um M. Auf einer Geraden durch M liegen Punkte A so, daß $MA = 10$; 9; 8; 7,5; 6,5; 6; 6,7; 6,3 cm ist. Von A aus sind Tangenten an den Kreis zu ziehen und ihre Längen als Funktion von AM graphisch darzustellen.

Bei der starken Divergenz in der Wertung empirischer Punktkonstruktionen bei Kurven, die in analytischer Form vorgelegt sind – wir wiesen schon bei den Gymnasien darauf hin – dürfte die Frage von Interesse sein, welche Beispiele von Kurven an Realanstalten, denen ja ausreichender als den Gymnasien Zeit zur Verfügung steht, von den Freunden solcher Übungen gewählt werden. Mir lag ein Buch von dem Schüler einer Oberrealschule vor, in dem die von U III bis zu Beginn der U II gezeichneten Kurven gesammelt waren. Ich möchte einiges aus dem Inhalte dieses Kurvenbuches herausgreifen.

Die Sammlung beginnt mit linearen Funktionen in mannigfaltigster Auswahl. Dann folgen Aufgaben wie etwa: Wie ändert sich der Ausdruck

$$x = \frac{a}{b},$$

wenn $a = 3$ ist und b variiert, wie ändert sich

$$x = a^2 + b^2 - 2ab$$

bei variablem b (etwa $a = 1$)? Entsprechend auch

$$x = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$$

usf. Es folgen Funktionen wie

$$y = 25 - x^2,$$

$$y = 2\sqrt{25 - x^2},$$

$$y = x\sqrt{36 - x^2},$$

$$y = (x - 1) \cdot \sqrt{36 - x^2}.$$

Eine große Rolle spielen Reihen von Funktionen etwa

$$y = 1 \cdot x, \quad y = \frac{4}{5} \cdot x, \quad y = \frac{3}{2} \cdot x \ldots.$$

oder

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \; y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; \; y = 1^x, \; y = 2^x, \; y = 3^x \ldots.$$

Von sonstigen bekannten Kurven sieht man die Zissoide des Diokles, das Cartesische Blatt usf. Dann beginnen die trigonometrischen Kurven; Sinus- und Cosinuskurven werden addiert, $\sin 2x$, $\sin 3x$ usf. dargestellt.

An einer anderen Oberrealschule ist man noch weiter gegangen und hat auch

$$y = \sin^2 x,$$
$$y = \sqrt{\sin x},$$
$$y = \sqrt{\tan x}$$

u. dgl. darstellen lassen.[1])

Im Unterricht der UII, der der Besitzer jenes Kurvenbuches angehörte (es war zu Beginn des 2. Tertials), wurde bei meiner Anwesenheit die implizite Funktion

$$x^2 + xy + y^2 = 19$$

behandelt. Zunächst wurde daraus die explizite Funktion

$$y = \frac{1}{2}(-x \pm \sqrt{76 - 3x^2})$$

bestimmt und graphisch dargestellt; nachdem so die Ellipse gewonnen war, wurde die Frage behandelt, wie man sich aus der Funktion leicht eine Hyperbel verschaffen könne, und wie deren Lage sei.

Eine Hausarbeit, die in derselben Stunde zurückgegeben wurde, hatte u. a. die Aufgabe: Man soll die logarithmische Funktion

$$y = \log^{10} x$$

im Intervall von 0 bis 1 mit einer Überhöhung von 1 : 10 darstellen und aus der gewonnenen Kurve die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 10 entnehmen. Die Lösung in einem mir vorgelegten Schülerhefte war nicht die übliche, vielmehr wurde erst die Kurve

$$y = 10^x$$

zehnfach überhöht gezeichnet und dann an

$$y = x$$

gespiegelt.

Schließlich noch ein Beispiel aus der Praxis für die Gleichungslehre, wieder aus der UII einer Oberrealschule. Behandelt wurde die quadratische Gleichung; von der allgemeinen Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

geht man zur Normalform

$$x^2 + px + q = 0$$

über. Dann wird die zugehörige Funktion besprochen. Die einfachste Form führt auf die Quadratzahlparabel

$$y = x^2.$$

Durch Verschieben nach oben oder unten erhält man

$$y = x^2 \pm b.$$

---

1) Eine Fülle von Beispielen für die oberen Klassen liefert C. Hack, Beispiele aus der Elementarmathematik und verwandten Gebieten zur Einführung in den Funktionsbegriff. Zeitschr. f. Math. u. nat. Unterricht 41 (1910) S. 1 ff.

Die dann vorgelegte Gleichung

$$x^2 - 8x + 11 = 0$$

wird mit der Funktion

$$y = (x - 4)^2 - 5$$

in Beziehung gebracht, und die Lage der zugehörigen Parabel bestimmt. – Weiter wurden dann durch Schnitt von

$$y = x^2 \text{ und } y = 1{,}5x + 2$$

als angenäherte Wurzelwerte 0,9 und 2,4 gefunden. Nachdem die Lösung auch algebraisch geleistet war, wurde zur Verbesserung des gefundenen Näherungswertes

$$x_1 = 2{,}37 + d$$

in die Gleichung eingesetzt und unter Vernachlässigung von d^2 für d eine lineare Gleichung gewonnen.

Ein neues Beispiel ist die Gleichung

$$\sqrt{x} - x - 3 = 0.$$

Sie wird erst durch Substitution

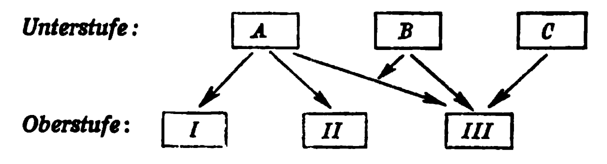
$$\sqrt{x} = u$$

gelöst, dann auch graphisch durch Schnitt von

$$y = \sqrt{x} \text{ und } y - x - 3 = 0.$$

27. Die Oberstufe der Gymnasien: Der Funktionsbegriff in Prima.

Auch bei der Verfolgung der Reformbewegung in der Oberstufe der höheren Schulen wollen wir wieder die Methode der Gruppenbildung benutzen. Als Richtung I seien zunächst wieder diejenigen Anstalten ausgeschieden, die dem Funktionsbegriff noch gänzlich ablehnend gegenüberstehen. An die reformlose Richtung A der Unterstufe kann dann außer der Richtung I auch eine Richtung II anschließen, die erst in Prima den Funktionsbegriff hervorhebt. Wie weit dabei gegangen wird, ist recht verschieden; in manchen Fällen dringt man sogar bis zur Integralrechnung vor. Die Richtung III, die auch noch an die Richtung A der Unterstufe anschließen könnte, meist aber wohl die Richtungen B oder C zur Voraussetzung hat, verwertet gleich von vornherein den Funktionsbegriff und stellt ihn bald in den Mittelpunkt. Ich brauche wohl nicht besonders auszuführen, daß nur die Richtung III den Sinn der Meraner Vorschläge trifft. Das Schema der Richtungen ist also:



Bei den Gruppen II und III werden mehrfach Untergruppen zu unterscheiden sein, wobei wesentliche Unterschiede zwischen den Gymnasien und den Realanstalten zum Ausdruck kommen werden.

Ich beginne wieder mit den Gymnasien und wende mich zunächst der Gruppe II zu. Für eine Gliederung in Untergruppen wird uns die Stellungnahme zur Infinitesimalrechnung maßgebend sein. Mancher mag das Hinzufügen oder das Weglassen der Infinitesimalrechnung für ein für den Geist der Reformbewegung recht unbedeutendes Moment halten. Die Sache liegt in der Tat aber anders. Für die Unterstufe bedeutete die zentrale Stellung des Funktionsbegriffes und der graphischen Darstellung von den Mittelklassen an die Kardinalforderung der Meraner Vorschläge. In entsprechender Weise ist für die Oberstufe die Infinitesimalrechnung der Angelpunkt, so wenig der den Meraner Vorschlägen beigegebene Lehrplan dies auch zum Ausdruck bringt.

Gleich vorweg sei bemerkt, daß schon vor den Meraner Vorschlägen viele Anstalten, zumal Oberrealschulen, diese Konsequenzen gezogen haben, was überdies zuweilen nur eine Wiederaufnahme oder eine, trotz entgegenstehender amtlicher Lehrpläne, Beibehaltung früherer Gepflogenheiten bedeutete. Immerhin ist auch für diese Anstalten die Forderung einer allmählichen Entwicklung des Funktionsbegriffes bedeutsam geworden. Meist wurde in jener Übergangszeit die Infinitesimalrechnung nur als ein zu den anderen mannigfachen Gebieten des Primaunterrichts hinzukommendes besonderes Kapitel angesehen, eine Anschauung, die heute noch manche Lehrpläne, auf die noch zurückzukommen ist, vollkommen beherrscht.

Eine erste Untergruppe (IIa) sollen hier die Anstalten bilden, welche meist nur im Anschluß an die analytische Geometrie näher auf die graphische Darstellung eingehen. Während früher durch die analytische Geometrie fast ausschließlich die Fragestellung: „Gegeben sind gewisse Kurven (Gerade, Kreis, Ellipse, Hyperbel); welches sind ihre Gleichungen in einem (meist rechtwinkligen) Koordinatensystem?“ in der Schule zu Wort kam, erscheint nun daneben auch das umgekehrte Problem: „Gegeben ist eine Funktion; welches ist die zugehörige Kurve?“, wobei dann auch empirische Kurven berücksichtigt werden.

In den Lehrplänen ist eine so gestaltete Bezugnahme auf den Funktionsbegriff manchmal angedeutet, indem zu dem üblichen Ausdruck „Koordinatenbegriff“ noch das Wort „graphische Darstellung“ hinzugefügt ist (z. B. Königliches Friedrich-Gymnasium in Breslau; Kaiserin-Friedrich-Gymnasium in Homburg v. d. H.).

Recht häufig wird die Lehre von den Maximis und Minimis hinzugefügt, so z. B. im Lehrplan der Hohenzollernschule in Schöneberg, gymnasiale Abteilung, oder am Goethe-Gymnasium in Frankfurt a. M. und ähnlich in anderen Fällen, wobei es dann meist offen bleibt, ob die Maxima- und Minimalehre nach sog. elementaren Methoden, z. B.

der Schellbachschen, oder mit Benutzung des Differentialquotienten behandelt wird.

Die Lehrpläne der Gruppe IIa sind in den Jahresberichten verhältnismäßig selten; wie ich glaube, nicht weil die Zahl der Vertreter dieser Richtung sehr gering wäre, sondern weil die meisten von ihnen diese Erweiterung des Pensums nicht ausdrücklich in den Jahresberichten erwähnen. Die Abgrenzung gegen die Gruppe IIb, die ich durch die Anfügung der Differentialrechnung charakterisieren möchte, ist aus dem oben angegebenen Grunde sehr verwaschen.

Den äußeren Anlaß zur Einführung der Differentialrechnung gibt, wie schon gesagt, häufig die Lehre von den Maximis und Minimis. J. Thiede, der in seiner Programmbeilage vom Jahre 1909[1]) einen Lehrgang vorführt, welcher „den neuen Stoff mit dem in der Prima ohnehin zu behandelnden Elementen der analytischen Geometrie verflochten enthält", bietet ein ausgeführtes Beispiel dafür.[2])

Ähnlichen Charakter hat der Lehrplan der UI des Mommsen-Gymnasiums in Charlottenburg[3]); das OI-Pensum ist noch nicht angegeben, da das Gymnasium erst im Entstehen ist.

Schließlich sei noch auf den Lehrstoff der mathematisch-naturwissenschaftlichen Gruppe des Gymnasiums zu Strasburg in Westpr.[4]) (vgl. Abschnitt 4) hingewiesen; es wurde in etwa 20 Privatstunden eine bis zur Differentialrechnung vorschreitende Einleitung in die sog. höhere Analysis gegeben, die allerdings im strengsten Gegensatz zu den Grundgedanken der Meraner Pläne steht (der Lehrplan dürfte gegenwärtig geändert sein).

Nicht an die Lehre von den Maximis und Minimis, sondern an die analytische Geometrie der Ebene und die Kegelschnitte sind die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung, sowie einige Anwendungen derselben beim Kaiser-Wilhelms-Gymnasium in Montabaur angeschlossen.

Dieser Fall möge den Übergang zu der Gruppe IIc bilden; er gibt eines der seltenen Beispiele, wo bei spätestem Einsetzen des Funktionsbegriffes an einem regulären Gymnasium bis zur Integralrechnung vorgegangen wird – immer vorausgesetzt, daß aus dem Fehlen von Andeutungen im Lehrplan der früheren Klassen auf ein wirkliches Fehlen entsprechender Vorbereitung geschlossen werden darf. Was mir

---

1) J. Thiede, Die Begriffe der Funktion und des Differentialquotienten in der Gymnasialprima. Programm Königliches Gymnasium zu Köslin, Ostern 1909.

2) Ebenso ist hier zu nennen: F. Haacke, Die Maximalaufgabe als Einleitung in die Differentialrechnung. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 38 (1908) S. 473 ff.

3) Übrigens führt dieser Lehrplan, was für ein Gymnasium sehr bemerkenswert ist, auch die unendlichen Reihen auf.

4) Vgl. R. Gaede, Zwei Jahre Bewegungsfreiheit im Unterrichte der Prima. Programm Königliches Gymnasium Strasburg i. Westpr. Ostern 1907.

sonst noch an Beispielen der Gruppe IIc bekannt geworden, bezieht sich auf Sonderkurse an Gymnasien, die ja eine eigene Stellung einnehmen und der Stundenzahl und dem Schülermaterial nach eher den Realanstalten als den Gymnasien anzugliedern wären.

Recht knapp gehalten ist der Lehrplan des Sonderkursus am Gymnasium mit Realschule zu Mühlheim a. Rh. (vgl. Abschnitt 4). Es soll eine Einführung in die Infinitesimalrechnung gegeben werden; im einzelnen ist zu behandeln:

Begriff der stetigen Funktion, Bildung des ersten und zweiten Differentialquotienten, ihre Bedeutung für Kurventangenten, Maximal-, Minimal-, Wendepunkte. Einige Differentiationsregeln. Angewandte Aufgaben über Maxima und Minima. Die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung und als Summation. Anwendung auf Rektifikation, Quadratur, Kubatur.

Von den Sonderkursen am städtischen Gymnasium in Bochum (vgl. Abschnitt 4) bringt die Oberstufe als ein in sich abgeschlossenes Gebiet die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung:

Begriff und geometrische Bedeutung des Differentialquotienten. Differentiation algebraischer und transzendenter Funktionen. Bestimmung des Wertes der vieldeutigen Symbole $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ usw. Maxima und Minima, besonders in Anwendung auf Geometrie und Physik. Untersuchung ebener Kurven in Parallel- und Polarkoordinaten. Kreis, Parabel, Ellipse, Hyperbel, Neilsche Parabel, Zissoide, Zykloide, Lemniskate, Kardioide. Einfache Integrale, Quadratur und Rektifikation der eben genannten Kurven. Anwendung der höheren Analysis auf die Mechanik.

Ich schließe mit dem Lehrgang des mathematischen Sonderkurses am Lyceum in Hannover (vgl. Abschnitt 4) im Schuljahre 1908/09[1]).

Das Ziel war wieder Einführung in die Differential- und Integralrechnung. Zu diesem Zwecke wurden anfangs graphische Darstellungen von ganzzahligen rationalen Funktionen einer Veränderlichen verwandt; diese dienten auch dazu, algebraische Gleichungen höherer Grade annäherungsweise aufzulösen. Daran schloß sich die Entwicklung des Begriffes des Differentialquotienten und der Differentiale, sowie die Ableitung der wichtigsten Differentialformeln. Ferner wurden die Taylorsche und Mac Laurinsche Reihe abgeleitet und ihre Anwendung zur Berechnung goniometrischer Funktionen, der Logarithmen und der Zahlen e und π gezeigt, ebenso zur Berechnung von Maxima und Minima.

Der Begriff des Integrals wurde als Umkehrung des Differentials eingeführt, die wichtigsten Integralformeln wurden abgeleitet, ferner Integrationen durch Substitution durchgeführt und partielle Integrationen. Der Begriff des bestimmten Integrals wurde abgeleitet und angewandt zur Rektifikation und Quadratur ebener Kurven, zur Berechnung der Oberflächen und Rauminhalte von Rotationskörpern, zu Schwerpunktsbestimmungen und zur Berechnung von Trägheitsmomenten[2]).

---

1) Vgl. Prinzhorn, Monatsschrift für höhere Schulen 8 (1909), S. 289ff. oder auch Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 40 (1909), S. 441ff., siehe auch das Programm der Anstalt 1909.

2) Im übrigen nahmen die Kursisten am mathematischen Unterricht der zweiten Gruppe, wie wir früher ausführten, mit 4 Wochenstunden teil. Die dritte Gruppe der Entlasteten hatte schließlich nur zwei Stunden, in denen alle drei Gruppen zusammentrafen. Der Lehrstoffverteilung lag hier der folgende Plan zugrunde:

In der Unterprima wurden alle Schüler in den ersten drei Quartalen in die Stereometrie eingeführt, im letzten Quartal in die arithmetischen und geometrischen Reihen, sowie die Zinseszins- und Rentenrechnung; für die Vollmathematiker (mit

28. Die Oberstufe der Gymnasien: Der Funktionsbegriff bereits in Obersekunda.

Wenn Funktion und graphische Darstellung bereits auf der Unterstufe zu Wort gekommen sind, so wird natürlich nicht erst die Prima diese Begriffe wieder aufnehmen, sondern der ganze Lehrstoff der Oberstufe wird sich von vornherein ihrem Wirkungsbereich einordnen. Aber auch, wenn es sich um die Richtung *A* der Unterstufe handelt, erscheint es im Sinne der Meraner Pläne vorteilhafter, wenn gleich in O II der Funktionsbegriff klar hervorgehoben wird.

Als Beispiel einer solchen Verbindung von Richtung *A* der Unter- und Richtung III der Oberstufe will ich nur das evangelische Gymnasium zu Gütersloh anführen. Im Lehrplan der U II findet sich hier noch kein Hinweis auf die graphische Darstellung; dann aber heißt es für O II:

Gleichungen, besonders quadratische mit mehreren Veränderlichen. Graphische Darstellung derselben als Einführung in den Begriff der Funktion.

Die Untergruppe IIIa, zu der wir das eben angeführte Beispiel rechnen möchten, macht vor der Differentialrechnung halt. Bei der Untergruppe IIIb wird dagegen die Differentialrechnung mit in den Lehrstoff einbezogen, wenngleich das Maß des Eindringens in dieses Gebiet wohl sehr von den Umständen, wie es z. B. die verfügbare Zeit und das vorhandene Schülermaterial sind, bestimmt wird.

Als ein Beispiel für diese Gruppe IIIb sei das Gymnasium Augustum der Stadt Görlitz angeführt. Hier ist in der Unterstufe, wie wir bereits im Abschnitt 25 gesehen, tüchtig vorgearbeitet. Für die Oberstufe wird angegeben (ich zitiere mit Auswahl):

O II Arithmetik. Quadratische Gleichungen mit einer und zwei Unbekannten; bei genügender Zeit Lösung durch graphische Darstellung, insbesondere der Funktionen $y = x^2$ und $y = \frac{1}{x}$. Gleichungen höheren Grades, die sich auf quadratische zurückführen lassen. Textgleichungen ersten und zweiten Grades. Zusammenhang zwischen Wurzeln und Koeffizienten einer quadratischen Gleichung. Kurzer Hinweis auf die Erweiterung des Zahlbereiches durch Einführung der imaginären Zahlen. Interpolation einer tabellarisch gegebenen Funktion; Erläuterung des hierzu nötigen Regeldetrischlusses an der graphischen Darstellung der Funktion.

Trigonometrie: U. a. graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen.

Planimetrie: Das wichtigste über harmonische Punkte und Strahlen.

U I. Arithmetik: Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung; Tilgung von Anleihen. Zusammenhang der 7 Grundrechnungsarten und die durch die Umkehrungen notwendig werdenden Erweiterungen des Zahlbegriffs: Von der ganzen positiven Zahl ausgehend Einführung der negativen, gebrochenen irrationalen und imaginären Zahlengrößen. Übung im Rechnen mit komplexen Zahlen

---

4 Stunden) ging nebenher eine Erweiterung der Trigonometrie, stereometrisches Zeichnen, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitslehre, Koordinatengeometrie und Grundlehren der Kegelschnitte.

In Oberprima wurden die Halbmathematiker nur in der Arithmetik und Algebra weitergebracht und dann durch Wiederholungen aus allen Gebieten in dem Erlernten befestigt, während für die Mathematiker noch die übrigen in den Lehrplänen vorgeschriebenen Stoffe hinzukamen.

in algebraischer wie trigonometrischer Form. Bei genügender Zeit Satz von Moivre. Lösung von quadratischen Gleichungen, auch durch graphische Darstellung.

Bei gutem Jahrgange und ausreichender Zeit kann mit dem Aufbau des Zahlensystems eine in engen Grenzen zu haltende Behandlung der Hauptpunkte der Logik verbunden werden: z. B. Umfang und Inhalt eines Begriffes; Induktion, Deduktion; notwendig, hinreichend; Analogie; Bedeutung der Axiome; Unterschied zwischen Approximations- und Präzisionsmathematik, usw.

Trigonometrie; Stereometrie.

OI: Arithmetik: Kombinationslehre und ihre nächstliegenden Anwendungen auf die Wahrscheinlichkeitslehre. Binomischer Lehrsatz für ganze positive Exponenten, bei langem Wintersemester bereits in UI. Bei gutem Jahrgange Begriff der Lebenswahrscheinlichkeit und Versicherungsaufgaben mit Benutzung der Sterblichkeitstafel. Raumlehre: Fortgesetzte Lösung schwieriger stereometrischer und trigonometrischer Aufgaben, sowie Fortsetzung des stereometrischen Zeichnens; Schrägbilder von Körperschnitten, auch Entstehung der Kegelschnitte und Anwendung auf mathematische Erd- und Himmelkunde. Einiges über Normal- und Zentralprojektion. Das rechtwinklige sphärische Dreieck mit Anwendung auf die mathematische Geographie. Zusammenfassung der Koordinatenlehre. Möglichst einfach gehaltene Darstellung der wichtigsten Grundeigenschaften der Kegelschnitte, die aber auch in synthetischer Form gegeben werden kann.

Darstellung von Funktionen auch von höheren als dem zweiten Grade. Aufgaben über Maxima und Minima bei noch vorhandener Zeit, sowie Hinweis auf den Differentialquotienten.

Wiederholungen, Ergänzungen und Zusammenfassungen aus dem ganzen Gebiete der Schulmathematik, womöglich an der Hand größerer Aufgaben, insbesondere auch aus der Physik.

Rückblicke tunlichst unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte (z. B. Quadratur des Kreises, Verdoppelung des Würfels, Dreiteilung des Winkels usw.).

Von manchen Seiten wird dem Gymnasium zwar ein Vordringen bis zur Differential-, nicht aber bis zur Integralrechnung zugestanden. Man könnte zur Unterstützung dieser Ansicht auf die neuen österreichischen Lehrpläne[1]) verweisen, die zwar für die nur siebenklassigen Realschulen: „Herausarbeitung der im bisherigen Lehrstoff der Mathematik und Physik gegebenen Anwendungen einfachsten Differenzierens und Integrierens" vorschreiben, bei den achtstufigen Gymnasien jedoch mit der „Darstellung der Richtungskoeffizienten, hauptsächlich der im Unterrichte behandelten Kurven, mittels der Differentialquotienten" sich begnügen.

Immerhin gibt es in Preußen eine Reihe von Gymnasien, sie mögen die Untergruppe IIIc bilden, die durch die Einfügung der Integralrechnung und naturgemäß durch einen intensiveren Betrieb der Differentialrechnung charakterisiert sind. Maßgebend für diese Stellungnahme war offenbar die Überzeugung, daß neue Schwierigkeiten bei einer anschaulich betriebenen Integralrechnung sich nicht einstellen, und daß also die ausgedehnte Verwendbarkeit dieser Begriffe in der Stereometrie, der analytischen Geometrie, der Mechanik es geraten erscheinen läßt, genügende Zeit für die Durchnahme freizumachen.

1) Der Lehrplan ist abgedruckt in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 41 (1910) S. 105ff.

Ich gebe zwei Musterbeispiele recht verschiedenen Betriebes an. Zunächst der Lehrplan, den R. Fuchs für die mathematische Abteilung der geteilten Prima des Bismarck-Gymnasiums in Wilmersdorf aufgestellt hat[1]). Ich füge dem anmerkungsweise hinzu, daß im letzten Schuljahre 1909/10 eine Teilung der Prima, wie ich bereits in Abschnitt 4 erwähnte, nicht vorgenommen wurde, daß aber trotzdem bereits in UI Differentialrechnung, angewandt besonders auf Kurvendiskussionen, herangezogen wurde.

Der Lehrplan der mathematischen Abteilung weist zunächst auf die analytische Geometrie hin, die über das auf Gymnasien übliche Maß hinaus getrieben wird (so z. B. Behandlung der Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten, Hereinziehung der synthetischen Geometrie usf.), auf die sphärische Trigonometrie, die sich jedoch auf Sinus- und Cosinussatz mit Anwendungen beschränkt, und auf Arithmetik, die bemerkenswerter Weise die Determinanten zweiten und dritten Grades benutzt. Dann kommt das uns besonders interessierende Kapitel:

Funktionenlehre: In diesem Gebiete wurde, weil dies das wichtigste zu sein schien, vor allem versucht, die Schüler etwas über das gewöhnliche Maß hinaus zu fördern. Der schon in früheren Klassen entwickelte Funktionsbegriff wurde wiederholt und weiter ausgebaut; Diskussion von Kurven, auch solche, die durch graphische Darstellung gebrochener Funktionen entstanden sind. Im Anschluß daran wurde die Ableitung oder der Differentialquotient einer Funktion mit Hilfe der Kurventangente eingeführt; Differentialquotienten von ganzen Funktionen, Produkten, gebrochenen Funktionen und trigonometrischen Funktionen; Heranziehung des Differentialquotienten zur Kurvendiskussion und zur Erlangung des Begriffes der Geschwindigkeit in der Mechanik.

Das unbestimmte Integral als inverse Operation zur Differentiation. Geometrische Anwendung bei der Quadratur von Kurven und im Anschluß an diese auch das bestimmte Integral; Kubatur von Rotationskörpern mittels der Integralrechnung; die Sinus- und Cosinusreihe mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten; Einführung der Exponentialfunktion als derjenigen, die mit ihrer Ableitung identisch ist, und ihre Darstellung durch eine unendliche Reihe; der natürliche Logarithmus.

Und nun als zweites Beispiel für die Gruppe IIIc die Oberstufe jenes schon früher (Abschnitt 25) erwähnten Vorbildes der Meraner Vorschläge. Ich gebe wieder die Mündener Fassung; das Göttinger Original weicht insofern davon ab, als bereits in der UI die Begriffe des Differentialquotienten und des Integrals zu Worte kommen, und daß für OI eine, de facto nicht durchgeführte, Spaltung in zwei Gruppen, eine mit 2 und eine mit 6 mathematischen Stunden vorgesehen ist. Der wesentliche Unterschied zwischen dem nachstehenden und dem Wilmersdorfer Plan von Sexta bis Prima gerechnet, läßt sich etwa so fassen: Denkt man sich den Anteil des Funktionsbegriffes am Lehrstoff als Ordinate y aufgetragen, wenn x die Zeit ist, so ist das Vorgehen im Wilmersdorfer Plan der Funktion $y = x^2$, im Mündener der Funktion $y = x$ im Intervall von 0 bis 2 vergleichbar. Nun der Lehrplan selbst:

---

1) Vgl. D. Coste, Versuche einer freieren Gestaltung des Unterrichts in Prima. Programm Bismarck-Gymnasium Wilmersdorf Ostern 1907.

O II: Arithmetik: Auffassung der Potenz als exponentiale Größe. Arithmetische Reihen erster Ordnung, sowie geometrische Reihen. Einfache quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten. Graphische Darstellung der Lösung von Gleichungen, von einfachen ausgehend. Empirisches über die Gestalt der Kegelschnitte. Lehre von den Logarithmen und graphische Darstellung des Zusammenhanges zwischen Numerus und Logarithmus.

Geometrie: Ahhängigkeit der in den Figuren vorkommenden Strecken, Flächen und Winkel in ihrem funktionalen Zusammenhange. Trigonometrie unter Anknüpfung an die konstruktive Geometrie, einschließlich des Additionstheorems nebst Dreiecks- und Vierecksaufgaben. Messungen im Freien. Graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen. Abschluß der Planimetrie (harmonische Gebilde in einfachster Darstellung).

U I: Zinzeszins und Rentenrechnung. Das wichtigste über komplexe Zahlen und ihre graphische Darstellung. Zusammenhängende Betrachtung an den einfachsten Funktionen in ihrem Gesamtverlauf nach Steigen und Fallen. Analytische Geometrie der Ebene, erster Teil (gerade Linie, Kreis, Parabel), ohne das Tangentenproblem. Stereometrie mit Berücksichtigung der Projektionslehre, erster Teil.

O I: Analytische Geometrie. Zweiter Teil (Ellipse und Hyperbel). Das Tangentenproblem, aus ihm abgeleitet der Differenzen- und der Differentialquotient. Einfache Maxima und Minima. Einführung in die Integralrechnung durch Berechnung von Flächenstücken. Stereometrie zweiter Teil (Kegel und Kugel, sowie die regelmäßigen Vielflächner). Erweiterung, Zusammenfassung aller Gebiete mit Anwendung auf Aufgaben.

29. Die Oberstufe der Gymnasien: Lehrbetrieb und Reifeprüfung.

Auch hier mögen zur Erläuterung der Lehrpläne einige wenige Streiflichter auf den Unterrichtsbetrieb im einzelnen geworfen werden; ich beschränke mich dabei auf die Infinitesimalrechnung. Nur eben erwähnt sei, daß auch hier wieder die Gleichungslehre, insbesondere jenes früher unverhältnismäßig bevorzugte Kapitel der Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten, weiter aber auch die geometrischen Reihen[1]) mit ihren praktischen Anwendungen reiche Gelegenheit zur Heranziehung graphischer Methoden geben.

Zunächst sei auf Grund der Erfahrungen in einer U I - Stunde in einer Anstalt vom Typus IIIc an der Hand eines einzelnen Unterrichtsrichtsbeispiels gezeigt, in welchem Umfange etwa die Differentialrechnung in Betracht zu ziehen ist:

Es wurde in jener Wiederholungsstunde der Differentialquotient von $y = x^n$ gebildet, dann wurden die Regeln für die Differentation von $u \cdot v$ und $\frac{u}{v}$ abgeleitet, von

1) Dabei ist nicht nur an die Exponentialfunktion zu denken, die z. B. bei dem Anwachsen eines Kapitels ihre Rolle spielt, sondern auch an graphische Methoden bei der Behandlung der geometrischen Reihen selber, z. B. ihrer Konvergenz. Man vgl. dazu: M. Milankovitch, Eine graphische Darstellung der geometrischen Progressionen, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht **40** (1909), S. 329; K. Goldziher, Über die Anwendung des graphischen Verfahrens im mathematischen Schulunterricht, Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften **15** (1909), S. 49ff.; W. Rottsieper, Zur Konvergenz der geometrischen Reihe, ebenda **16** (1910), S. 62.

sin x, cos x und danach von tan x, immer in engstem Anschluß an die geometrische Bedeutung der Funktionen und ihrer Ableitungen. Dann wurde die Kurve

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

diskutiert, also ihre Nullstelle, Unstetigkeit, ihre Maxima und Minima.

Ehe ich auf einzelne Anwendungen der Differentialrechnung noch ausdrücklich eingehe, sei eine allgemeine methodische Bemerkung vorangestellt. Bei der graphischen Darstellung hat sich die Gegenüberstellung von Tabelle und geometrischem Bild vielfach eingebürgert. Man sieht dann erst mit rechter Deutlichkeit, wie Tabelle und Kurve einander wirksam ergänzen: Die Tabelle ist praktischer, wenn man den Funktionswert aufsuchen will (ich sehe von der Interpolation ab); ihn aus der Kurve abzulesen, erfordert besondere Abmessungen; dagegen deckt die Kurve besser die Veränderung der Funktionswerte auf, eine Arbeit, die bei einer Tabelle erst eine Differenzenangabe leisten würde.

Eine glückliche Ergänzung nun, der man schon recht häufig begegnet, ist die Anfügung einer dritten Rubrik zur Tabelle, in der neben unabhängiger und abhängiger Variablen der Differentialquotient eingetragen wird. Dann liefert die zweite Rubrik die punktweise Zeichnung, die dritte die Konstruktion durch einhüllende Tangenten.

Also sei beispielsweise (Programmarbeit von J. Thiede) vorgelegt:

$$y = \frac{1}{6} x^2.$$

Dann hat man die Tabelle (dazu Figur 17).

x	y	$\frac{dy}{dx}$
0	0	0
$+1$	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{3}$
$+2$	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{2}{3}$
$+3$	$+\frac{3}{2}$	$+1$

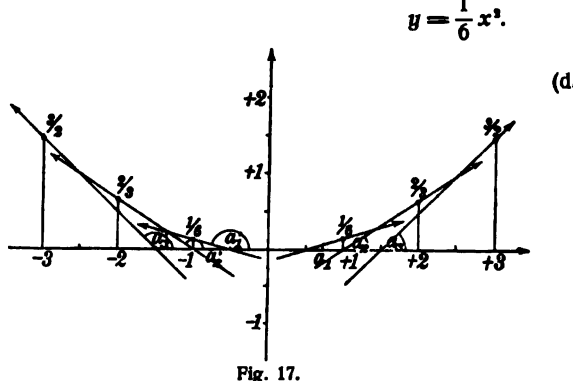


Fig. 17.

Ihre häufigste Anwendung findet die Differentialrechnung an den Gymnasien bei Maximum- und Minimumaufgaben. Ich begnüge mich, eine einschlägige Aufgabe aus der Reifeprüfung in geringer Kürzung abzudrucken (von einem Gymnasium der Gruppe IIIc).

In eine Kugel vom Radius r soll ein gerader Kegel so eingezeichnet werden, daß sein Volumen ein Maximum ist. Wie groß ist das Maximum-Volumen?

Schülerlösung: Wir betrachten das Volumen als eine Funktion vom Abstande zwischen Grundkreis des Kegels und Mittelpunkt der Kugel.

$$V = \frac{\varrho^2 \pi h}{3} = \frac{\pi}{3}(r^2 - x^2)(x + r) \cdot$$

$$V = \frac{\pi}{3}(-x^3 - rx^2 + r^2 x + r^3) \,.$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 2rx + r^2).$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\pi}{3}(-6x - 2r).$$

Setze ich die erste abgeleitete Funktion $= 0$, so erhalte ich den Wert der Unbekannten, dem ein Maximum entspricht:

$$0 = \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 2rx + r^2).$$

$$0 = 3x^2 + 2rx - r^2.$$

$$x = \frac{-2x \pm \sqrt{4r^2 + 12r^2}}{6}, \ldots$$

$$x_1 = -r; \quad x_2 = \frac{r}{3}.$$

Dieser Wert der Unbekannten in die zweite abgeleitete Funktion eingesetzt, macht dieselbe negativ, entspricht also dem Maximalvolumen (M. V.), welches nun ist:

$$M \cdot V = \frac{\left[r^2 - \frac{r^2}{9}\right] \cdot \frac{4r}{3}}{3} \cdot \pi = \cdots = \frac{32r^3}{81}\pi.$$

Ein anderes Anwendungsgebiet der Differentialrechnung ist die Mechanik. Es handelt sich z. B. in einer Unterprimastunde (Gruppe IIIc) um den schiefen Wurf aufwärts.

Die Wurfparabel wird arithmetisch und geometrisch gewonnen. t wird eliminiert und dann gefunden:

$$y = x \cdot \tan\alpha - \frac{gx^2}{2c^2 \cdot \cos^2\alpha}.$$

Dann folgen die bekannten Fragen. Wo liegt der höchste Punkt? Da, wo die Steigung (Differentialquotient) Null ist, also bei

$$x_m = \frac{c^2 \cdot \sin 2\alpha}{2g}.$$

Welches ist die Wurfhöhe, die Wurfweite? – Nun wird die Geschwindigkeit untersucht. Es ist angenähert

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

und da

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

ist, so folgt

$$\Delta s = \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

also

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}$$

Daraus ergibt sich z. B., daß die Geschwindigkeit am Ende der Flugbahn $v = c$ is

Der Begriff des bestimmten Integrals, angeknüpft an die Fläche, die in unendlich viele, unendliche schmale Streifen zerschnitten ist, wird auch im Gymnasium in der einen oder anderen Form in den Unterricht hineinspielen. Ein Physikunterricht z. B., der auf den Begriff der Arbeit, auf das Potential oder das Trägheitsmoment eingeht, wird

ihn nicht entbehren können, und in der Mathematik kommt er bei der Flächenberechnung (z. B. der Kegelschnitte) oder der Inhaltsberechnung von Körpern, besonders in der Guldinschen Regel, andauernd zur Verwendung. Genau genommen sind ja schon die Auffassungen des Kreises als Grenze eines regelmäßigen n-ecks, des Kugelinhaltes als Summe unendlich vieler Pyramiden mit unendlich kleiner Grundfläche und dem Radius als gemeinsamer Höhe nicht zu umgehende Beispiele bestimmter Integrale schon in der Unterstufe.

Auch das unbestimmte Integral, definiert durch die Umkehrung des Differenzierens, wird an Anstalten, welche die Differentialrechnung bringen, nicht selten auftreten. Ich erinnere nur an die Bestimmung der Geschwindigkeit und des Weges bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung oder an die Identifizierung von harmonischer Bewegung und unendlich kleiner Pendelschwingung.

Von einer Integralrechnung wird man aber recht eigentlich erst sprechen können, wenn der Übergang vom bestimmten Integral, definiert als Summe, gemacht ist zum unbestimmten, definiert als Umkehrung der Differentiation. Nur eine Andeutung darüber, wie etwa dieser Übergang in primitiver Weise ausgeführt wird; es handelt sich um ein Gymnasium der Richtung IIIc, wir sind in einer UI.

Es war in häuslicher Arbeit die Kurve

$$y = \sqrt{3 - 2x + x^2}$$

graphisch dargestellt und in einer Tabelle registriert worden; auch der Differentialquotient war eingetragen, und es hatte sich für einen und denselben Wert der Variablen gleichzeitig ein Maximum und ein Minimum ergeben. Der Unterricht hatte auch noch auf die näherungsweise Berechnung von

$$\Delta y \sim \Delta x \cdot \frac{dy}{dx}$$

hingewiesen. Man schritt dann zur Quadratur eines Kurvenastes. Es ergab sich für die Fläche

$$\lim \sum_0^{x_1} y \Delta x = \int_0^{x_1} y\, dx.$$

Da dieser Grenzwert nur in einfachen Fällen, z. B. für

$$y = x^2$$

mit Hilfe von arithmetischen Reihen einigermaßen einfach auswertbar ist, muß man nach einer anderen Methode greifen. Es sei die gesuchte Fläche

$$F(x) = Y,$$

dann stellt sich die Zunahme ΔY der Fläche in der Gestalt eines Rechtecks mit den Seiten y und Δx dar, also ist

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x} = y$$

und in der Grenze

$$y = \frac{dY}{dx}.$$

So ist die Fläche durch eine Operation auffindbar, die die Umkehrung der Differentation bedeutet. Des weiteren ist nun auf die dabei zutage tretende Unbestimmtheit und auf die Bedeutung von unbestimmtem und bestimmtem Integral einzugehen.

Schließlich noch einige Worte über die Abiturientenaufgaben, die einen Einfluß der neueren Bestrebungen erkennen lassen.

Zunächst ist die Beobachtung zu verzeichnen, daß bei den auch früher häufigen Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene jetzt mehr Wert auf die zeichnerische Durchführung gelegt wird; nicht selten ist die Verwendung von Millimeterpapier ausdrücklich angegeben. Den arithmetischen Lösungen von Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten, die im Gymnasialabiturium ja eine große Rolle spielen, treten die graphischen Lösungen häufiger zur Seite; so heißt es z. B. (Gymnasium Insterburg 1909): „Die Gleichungen

$$x^2 - 4x + y^2 + 4y = 9$$

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y = 11$$

sind graphisch und arithmetisch zu lösen."

Die Aufgaben aus der Maximum- und Minimumlehre sind sehr stark vertreten, obwohl dieses Gebiet nicht ausdrücklich als Pensum des Gymnasiums in den amtlichen Lehrplänen bezeichnet ist. Es ist anzunehmen, daß hier in steigendem Maße die Differentialrechnung sogenannte elementare Methoden verdrängt.

Recht beliebt sind auch Kurvendiskussionen. Am häufigsten begegnet man der Funktion dritten Grades, seltener der Funktion vierten Grades; daneben kommen aber auch andere algebraische Kurven vor, z.B.

$$y = \sqrt{x^2 + 6x + 8}$$

oder

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Recht selten sind an Gymnasien transzendente Kurven, ich nenne etwa

$$y = 2 \cdot \sin x - \sin 2x.$$

30. Die Oberstufe der Realanstalten: Funktionsbegriff und Infinitesimalrechnung nur in Prima.

Für die Realanstalten bringen die Meraner Vorschläge, wie wir bereits (Abschnitt 23) erwähnt haben, keinen ausgeführten Lehrplan. Die Unterrichtskommission äußert sich allgemein nur dahin:

Das Mehr der Wochenstunden für den mathematischen Unterricht auf den Oberrealschulen soll nach Meinung der Kommission vor allem zur vertieften Behandlung desselben Stoffes, der auf den Gymnasien verarbeitet wird, verwendet werden, indem einerseits die im Stoff liegenden allgemeinbildenden Momente in verstärktem Maße herausgehoben werden, andererseits den praktischen Anwendungen und der Pflege der zeichnerischen Seite ein breiterer Raum gewährt wird.

Damit stellen sich die Meraner Vorschläge auf den Boden der amtlichen Lehrpläne, die gleichfalls den Realanstalten im wesentlichen kein Mehr, sondern nur eine Vertiefung des Stoffes zuweisen.

Von verschiedenen Seiten ist betont worden, daß ein Lehrplan für die Realanstalten von größerer Bedeutung gewesen wäre, als ein solcher für die Gymnasien. So sagt R. Müller[1]): „Mir würde es zweckmäßig erscheinen, einen Lehrplan für die weitestgehende Anstalt, für die Oberrealschule, einheitlich und organisch auszuarbeiten und dann den Realgymnasien und Gymnasien anheimzugeben, wieviel sie davon entbehren können und müssen.“ Bei solchem Verfahren dürfte auch mit der künstlichen Gleichstellung der Zielleistungen in Gymnasium, Realgymnasium und Oberrealschule gebrochen werden. Wenn in Österreich nach den neuen Lehrplänen schon die siebenstufige Realschule weiter geht (nämlich bis zur Integralrechnung) als das achtstufige Gymnasium, so steht zu erwarten, daß erst recht die preußische Realanstalt mit ihrer dem Gymnasium gleichkommenden Kursusdauer sich andere Ziele stecken kann als das Gymnasium. — Aus solchen Überlegungen heraus dürfte es angebracht sein, in den folgenden Abschnitten einige Lehrpläne ausführlicher wiederzugeben, als das lediglich die Rücksicht auf den hier zur Erörterung stehenden Gegenstand erheischen möchte.

Auch bei den Realanstalten wollen wir wieder drei Gruppen unterscheiden und dabei zunächst die Gruppe I derjenigen Anstalten abscheiden, die vom Funktionsbegriff und der graphischen Darstellung oder von einer Weiterführung in das Gebiet der Infinitesimalrechnung ganz absehen; es ist in der Natur des Pensums der Realanstalten und besonders der Oberrealschulen begründet, daß die Zahl der Anstalten, die man der Gruppe I zuzurechnen hat, recht gering sein wird.

Die Mehrzahl der Anstalten beherbergt die Gruppe II, die in O II noch so gut wie keine Rücksicht auf die Herausarbeitung des Funktionsbegriffes nimmt, dann ihn aber in Prima sehr betont und, das gilt besonders von den Oberrealschulen, soweit sie nicht zu III zu rechnen sind, bis zur Infinitesimalrechnung vorgeht.

Zur Gruppe III schließlich sollen diejenigen Anstalten gezählt werden, die, im Sinne der Meraner Vorschläge handelnd, von vornherein Funktionsbegriff und graphische Darstellung beachten, meist schon in der Unterstufe der Richtung *B* oder *C* angehören, und dann mehr oder weniger früh auch die Infinitesimalrechnung heranziehen.

Die Zahl der Anstalten, die wir entsprechend der bei den Gymnasien getroffenen Unterscheidung als Untergruppe IIa bezeichnen müßten, und die nach der negativen Seite sich durch den Verzicht auf die Differentialrechnung charakterisieren, ist hier sehr gering. Als Beispiel ist vielleicht die städtische Oberrealschule Freiburg Schlesien anzusehen, die nach U I die „elementare Berechnung größter und

1) R. Müller, Über die Reformbestrebungen im geometrischen Unterricht an höheren Schulen nebst einem Lehrplan für das mathematische Pensum in den drei Oberklassen der Oberrealschulen. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 8 (1910), S. 62.

kleinster Werte“ verlegt und dann in O I „die wichtigsten Reihen der algebraischen Analysis“ bringt und erst dann: „Lehre von den Gleichungen. Graphische und näherungsweise Auflösung von Gleichungen.“

Sehr groß ist dagegen die Reihe der Lehrpläne, in denen in der einen oder anderen Form in der Prima die Differentialrechnung auftritt (II b). Hier sind alle Schattierungen vorhanden, und so seien wenigstens einige hierher gehörige Lehrpläne genauer angeführt.

Ich beginne mit dem ausführlichen Lehrplan der Guericke-Oberrealschule zu Magdeburg[1]); er gibt ein typisches Beispiel für jene Anschauung, die in der möglichst geschlossenen Darstellung und Durcharbeitung einzelner diskreter Kapitel das Hauptziel des mathematischen Unterrichts sieht. Für jedes Vierteljahr findet sich ein solches in sich zusammenhängendes Gebiet angegeben. Die Differentialrechnung, auf die in der Oberprima nur ein halbes Vierteljahr verwandt wird, erscheint als ein vollkommen isoliertes Gebilde, das mit demselben Recht wie etwa die sphärische Trigonometrie oder die synthetische Geometrie fortbleiben könnte, ohne daß das übrige Schaden nähme.

Obwohl der Lehrplan alles andere als reformmäßig ist, sei er doch ausführlich wiedergegeben, weil er in seinen wesentlichen Abweichungen von den amtlichen Lehrplänen gut eine Richtung im Ausbau des Oberrealschullehrplanes kennzeichnet.

O II. Erstes Vierteljahr: Trigonometrie. Wiederholung des Pensums der Untersekunda. Vervollständigung der Goniometrie durch die Additionstheoreme und die sich daraus ergebenden Formeln. Ableitung des Sinussatzes, des Cosinussatzes, des Tangentensatzes und der s-Formeln und ihre Anwendung auf die Fundamentalfälle des schiefwinkligen Dreiecks. Ableitung der Gauß-Mollweideschen Gleichungen, der Formeln

$$b + c = \sqrt{a^2 + 2a \cdot n \cdot \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}$$

und

$$b - c = \sqrt{a^2 - 2a \cdot n \cdot \tan \frac{\alpha}{2}},$$

der Relationen der Höhen, der Schwerpunktstransversalen, der Mittellinien, der Formeln für die Radien des um-, ein- und der angeschriebenen Kreise. Schwierigere Kreisberechnungen, die sich auf diese Formeln stützen, wobei aber solche, die durch r und die drei Winkel gelöst werden, nur in geringerem Maße Berücksichtigung finden. Aufgaben des trigonometrischen Feld- und Höhenmessens (die Pothenotsche Aufgabe, Einführung von Hilfswinkeln usw.). – Lösungen, die auf Kunstgriffen beruhen, sind gänzlich zu vermeiden.

Zweites Vierteljahr: Arithmetik. Die komplexen Größen und die binomischen Gleichungen. Geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung. Dezimalbrüche. Arithmetische Reihen erster bis dritter Ordnung. Dabei ist auf die Allgemeingültigkeit des Bildungsgesetzes hinzuweisen, und es sind durch Analogieschluß und Einführung des Zeichens $\binom{n}{K}$ die Formeln für die Reihen m^{ter} Ordnung aufzustellen. Anwendung auf

1) Lehrplan für den Unterricht in Rechnen, Mathematik, Naturbeschreibung (Biologie), Physik, Chemie und Mineralogie. Guericke-Oberrealschule zu Magdeburg. Programm 1909.

$$\sum_1^n n, \quad \sum_1^n n^2, \quad \sum_1^n n^3, \quad \sum_1^n n^4$$

(zur Vorbereitung der Ableitung der stereometrischen Summenformel). Ausgeschlossen bleiben die figurierten Zahlen. Die Durchnahme der Kombinatorik beschränkt sich auf die Erklärung der Permutationen, Variationen und Kombinationen und Besprechung alles dessen, was nötig ist zur Ableitung der Formel für die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n-Elementen in der K^{ten} Klasse. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten.[1])

Drittes Vierteljahr: Stereometrie. Wiederholung des Pensums der Untersekunda (Prisma, Zylinder, Pyramide, Pyramidenstumpf, Kegel, Kegelstumpf, Kugel). Von den geraden Linien und Ebenen in Verbindung miteinander. Ableitung der Formeln für die Kugelteile, für das Prismatoid und den Obelisken, für abgeschrägte Prismen und Zylinder, die Guldinschen Regeln. Bei genügender Zeit auch die Newton-Simpsonsche Regel und die Summenformel.

Bei den Aufgaben ist besonderer Wert auf die Anschauung zu legen, die durch Anfertigung vieler Zeichnungen (Anlage einer Sammelmappe) unterstützt wird; ferner auf Anwendung der gesamten geometrischen Kenntnisse (Aufstellung von Gleichungen mit Hilfe des Lehrsatzes des Pythagoras, des Proportionallehrsatzes, der mittleren Proportionalen am rechtwinkligen Dreiecke und am Kreise usw.); endlich aber auch auf Anwendung der gesamten arithmetischen Kenntnisse (z. B. der Wurzellehre, Aufstellung und Lösung eines Systems von n Gleichungen mit n Unbekannten).

Viertes Vierteljahr. a) Planimetrie. Die Lehre von den Transversalen, und zwar: Satz des Ceva und Umkehrung, merkwürdige Punkte am Dreieck, Satz des Euler, der Feuerbachsche Kreis, Satz des Menelaos und Umkehrung, der Pascalsche Satz. Die Lehre von der harmonischen Teilung, und zwar: allgemeine Lehrsätze, Satz des Apollonius, vom vollständigen Vierseit und Viereck. Von den Ähnlichkeitspunkten, den Chordalen und dem Taktionsproblem.

b) Arithmetik. Reziproke Gleichungen bis zum fünften Grade. Quadratische Gleichungen mit 2 Unbekannten.

UI. Erstes Vierteljahr. Sphärische Trigonometrie nebst Anwendungen auf die mathematische Erd- und Himmelskunde. Ausgehend von der körperlichen Ecke werden zunächst die für die sphärische Trigonometrie notwendigen Begriffe und Sätze kurz erörtert. Daran schließen sich der Sinussatz, der Cosinussatz I und II und der Cotangentensatz; sodann folgen die Grundrelationen am rechtwinkligen sphärischen Dreieck mit der Napierschen Regel, die weiteren Umformungen und Entwicklungen aus den Grundrelationen, die Gaußischen oder Mollweideschen Gleichungen und die Napierschen Analogien. Den Schluß bildet die Berechnung des sphärischen Radius des um- und einbeschriebenen Kreises und des Inhalts des sphärischen n-Ecks. Gestalt und Größe der Erde, Achsenumdrehung, geographische Breite und Länge; die Himmelskugel, der Horizont, Zenit, Mittagslinie, Höhe und Azimut als sphärische Koordinaten in bezug auf den Horizont als Abszissenachse; das Äquatorialsystem, Rektaszension und Deklination, das nautische Dreieck; scheinbare Bewegung der Sonne, ekliptisches System, Länge und Breite, das rechtwinklige Dreieck VSD und das sphärische Dreieck EPZ; Sternenzeit, Sonnenzeit, Zeitgleichung.

Zweites Vierteljahr. Die Grundlehren der synthetischen Geometrie. Den Ausgangspunkt bildet der planimetrische Unterricht der O II, indem aus dem Taktionsproblem des Apollonius die Definition der Kegelschnitte als geometrischer Örter abgeleitet wird. Mit der Parabel wird begonnen, denn ihre Behandlung ist

1) Es verdient vielleicht noch einmal ausdrücklich hervorgehoben zu werden, daß in diesem Lehrplan die Kombinatorik bereits in Obersekunde erledigt wird, ein nach meiner Kenntnis einzigartiger Fall.

am leichtesten, hierauf folgt die Betrachtung der Ellipse und endlich diejenige der Hyperbel. Die Erklärung der Kurve, die Konstruktion derselben, die Lage eines Punktes bzw. einer Geraden in bezug auf die Kurve, die Tangente und Normale (bei der Parabel auch Subtangente und Subnormale), zwei Tangenten bzw. drei Tangenten; parallele Sehnen, konjugierte Durchmesser; Leitlinie; die Kurve als Kegelschnitt; Flächeninhalt eines Parabelabschnitts und der Ellipse.

Drittes Vierteljahr: a) Schluß der Lehre der synthetischen Geometrie. Die Hyperbel. Asymptoten der Hyperbel. Der Kegelschnitt als Zentralprojektion des Kreises; Kurven 2. Ordnung und 2. Klasse, Pol und Polare, Sätze des Pascal und Brianchon. Übungsaufgaben.

b) Arithmetik. Repetition und Ergänzung der Lehre von den quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, Zusammenfassung in Gruppen.

Viertes Vierteljahr: Arithmetik. Wiederholung und Ergänzung der Lehre von den komplexen Größen und den binomischen Gleichungen. Das Rechnen mit komplexen Zahlen, der Moivresche Lehrsatz, die Wurzeln der reellen (und imaginären) Einheit.

Wiederholung und Ergänzung der Lehre von den quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten; Zusammenfassung in Gruppen.

OI. Erstes Vierteljahr: a) Arithmetik. Kubische Gleichungen, Eigenschaften der algebraischen Gleichungen. Anzahl der Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades, die Zerlegung in ein Produkt von n Faktoren, der Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten der Gleichung. Auffindung der rationalen Wurzeln durch das konstante Glied.

b) Analytische Geometrie (Punkt, gerade Linie, Kreis).

Zweites Vierteljahr: a) Wiederholung der Kombinatorik. Konvergenz und Divergenz der unendlichen Reihen; der binomische Lehrsatz. Die Elemente der Differentialrechnung; der Differentialquotient; die Differentiationen einfacher und zusammengesetzter algebraischer Funktionen, Differentiation der trigonometrischen Funktionen, der Kreisfunktionen, der Exponential- und der logarithmischen Funktionen; höhere Differentialquotienten, die Maclaurinsche und die Taylorsche Reihe. Anwendung auf Maxima und Minima der Funktionen.

b) Analytische Geometrie (Ellipse, Hyperbel, allgemeine Gleichung zweiten Grades).

Drittes Vierteljahr: Analytische Geometrie (Ellipse, Hyperbel, allgemeine Gleichung zweiten Grades).

Viertes Vierteljahr: Die wichtigsten Reihen der algebraischen Analysis. — Bei gutem Jahrgange und genügender Zeit wird die Methode der unbestimmten Koeffizienten besprochen, und die Reihen werden nach dieser Methode entwickelt.

Häufig gibt die Theorie der Maxima und Minima den Anlaß zur Einführung der Differentialrechnung. Nur selten findet sich (z. B. Oberrealschule Halberstadt) eine „elementare Theorie der Maxima und Minima" vor „den Elementen der Differentialrechnung", denen dann „die Gleichungen höheren Grades und die transzendenten Gleichungen" folgen.

Zu den Ausnahmefällen dürfte es auch zu zählen sein, daß erst eine elementare und dann eine „allgemeine Theorie" der Maxima und Minima mit Verwendung der Differentialrechnung gegeben wird, wie man das noch aus einigen anderen Lehrplänen herauslesen könnte (z. B. Städtisches Kaiser-Wilhelm-Realgymnasium Coblenz oder Reform-Realgymnasium Unna).

Die Heranziehung der Kurventheorie wird in einer Reihe von Lehrplänen besonders betont, z. B. bei der Oberrealschule in Marburg a. d. L., beim Realgymnasium Musterschule Frankfurt a/M., beim Kaiser-Wilhelm-Realgymnasium Coblenz, beim Königstädtischen Realgymnasium Berlin, beim Friedrich-Realgymnasium Berlin u. a.

Die Reihenlehre wird in manchen Fällen noch ausdrücklich elementar behandelt, auch wenn später die Differentialrechnung gelehrt wird. Oder aber es wird ein Teil elementar (wie das etwa geschieht, möge man meinem Lehrbuchbericht entnehmen), ein anderer im Anschluß an die Taylorsche Reihe abgeleitet, so z. B. nach einer Mitteilung von Kadesch an der Wiesbadener Oberrealschule die Reihen für arc sin und arc tang. Taylorsche und Maclaurinsche Reihen werden häufig in den Lehrplänen genannt (z. B. beim Königlichen Andreas-Realgymnasium Hildesheim, bei der Städtischen Oberrealschule i. E. Königsberg). In einem Falle wird ausdrücklich hervorgehoben: „Ableitung des Maclaurinschen Satzes in elementarer Auffassung", womit wohl der meines Wissens fast durchgängig geübte[1]) Verzicht auf Restgliedbetrachtung ausdrücklich festgestellt werden soll. Wieweit bei solcher elementarer Darstellung bereits die Benutzung der Schmiegungsparabeln Eingang gefunden hat, ist den Lehrplänen nicht zu entnehmen.

Zur Untergruppe IIc, die neben der Differential- auch die Integralrechnung treibt, lassen sich mehrere Beispiele beibringen. Dabei ist zu bemerken, daß die Grenzen zwischen IIb und IIc schwer zu ziehen sind, da die Fähigkeit der betreffenden Schülergeneration oft ausschlaggebend sein wird. Bei einigen Anstalten ist allerdings noch sehr das Übergangsstadium zu bemerken, so daß von einem endgültig geregelten Lehrgange nicht zu sprechen ist. So ist z. B. am Reform-Realgymnasium Siegen für UI Differential- und Integralrechnung angegeben, für OI noch nicht, und auch für die Oberrealschule Dortmund sind die bis zur Integralrechnung vorgehenden Lehrpläne für UI und OI nicht aufeinander abgestimmt.

Einen vollständig in sich geschlossenen, allerdings recht umfassenden Lehrgang der Infinitesimalrechnung finden wir am Reform-Realgymnasium Unna. Ich lasse ihn hier ganz folgen:

OI. Grundlehren der darstellenden Geometrie. Analytische Geometrie der Kegelschnitte; Cykloiden und Lemniskaten. Biquadratische und diophantische Gleichungen. Auflösung numerischer Gleichungen nach der Newtonschen Näherungsmethode. Arithmetische Reihen höherer Ordnung. Differential- und Integralrechnung: Tangenten ebener Kurven, Maxima und Minima von Funktionen. Entwicklung von Funktionen in Reihen nach den Theoremen von Taylor und Maclaurin. Berührung 2. Ordnung, Krümmungskreise und Evoluten der Kegelschnitte. Einhüllende Kurven. Rektifikation und Quadratur der Kegelschnitte, Komplanation von Rotationsflächen,

1) Nur in dem später noch wiederzugebenden Lehrplan der Oberrealschule an der Waitzstraße in Kiel geht dem Taylorschen Satz der Mittelwertsatz voraus, der dann eine strenge, auf das Studium des Restgliedes gestützte Reihenlehre gestattet.

Kubatur von Rotationskörpern. Berechnung des Erdsphäroids mit Hilfe von Gradmessungen.

Von den Abiturientenaufgaben dieser Anstalt führe ich zwei an:

Es soll die Gleichung der Loxodrome aus ihren Differentialbedingungen entwickelt werden unter der Voraussetzung, daß die Erde eine vollkommene Kugel sei.

Wie tief taucht ein gleichseitiges Rotationshyperboloid aus Ton ($s_1 = 1{,}7$) mit den Achsen $a = b = 1$ dcm, das im Abstande $h = 2$ dcm vom Schnittpunkte der Achse rechtwinklig abgeschnitten ist, in Quecksilber ($s_2 = 13{,}6$) ein?

Ein anderer Lehrplan, der den Vorzug der Geschlossenheit gleichfalls besitzt, dabei aber vor dem eben angeführten noch das voraus hat, daß er die ganze Oberstufe umfaßt, ist der von R. Müller verfaßte der Hohenzollernschule (Oberrealabteilung) Schöneberg.[1] Auch dieser Plan werde, weil er für die Ausgestaltung des Oberrealschulplanes bedeutsam ist, hier mitgeteilt.

O II: Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Arithmetische Reihen 1. Ordnung und geometrische Reihen; Zinseszins- und Rentenrechnung. – Vervollständigung der Geometrie und der Trigonometrie. – Systematische Begründung und Ausbau der Stereometrie. (Die Lehre von den körperlichen Ecken wird für U I zurückgestellt.) Stereometrische Konstruktionen mit den Mitteln der darstellenden Geometrie. – Die ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels. – Die Transversalen des Dreiecks; harmonische Punkte und Strahlen. Die harmonischen Eigenschaften des Kreises und ihre perspektive Übertragung auf die Kegelschnitte; die Sätze von Pascal und Brianchon, ihre Grenzfälle und ihre Anwendungen auf die Konstruktionen der Kegelschnitte.

U I. Analytische Geometrie. I. Teil. (Die Punkte als Abbildungen von Zahlen und Zahlenpaaren, die Kurven als Bilder der Gleichungen und Funktionen, die Darstellung geometrisch definierter Örter durch Gleichungen; die Gerade und der Kreis; graphische Lösung numerischer Gleichungen.) – Elemente der Differentialrechnung und ihre Anwendung auf die extremen Werte von Funktionen. – Die Grundbegriffe der Kombinatorik (so wenig wie möglich, Wahrscheinlichkeitsrechnung noch weniger!) und der binomische Lehrsatz für ganze Exponenten. – Fortsetzung der Differentialrechnung, Taylors Satz und die wichtigsten Reihen der Analysis. – Die Lehre von den körperlichen Ecken und die Sphären. Sphärische Trigonometrie (unbedingt wird Beschränkung auf Kosinus- und Sinussatz empfohlen) nebst Anwendungen auf Erd- und Himmelskunde.

O I. Geometrie der Kegelschnitte in gemischter analytischer und elementargeometrischer Behandlung. – Weitere Anwendung der Differentialrechnung. (Die Krümmung der Kurven, die unbestimmten Symbole, die angenäherte Lösung von Gleichungen.) Anfangsgründe der Integralrechnung durch Anwendung auf Geometrie und Mechanik. Systematischer Aufbau der Arithmetik; die komplexen Zahlen und ihre Bedeutung in der Algebra und der Analysis, insbesondere der Moivresche Satz, die binomischen und die kubischen Gleichungen.

Ich schließe diese Gruppe mit den Lehrplänen jener beiden Realgymnasien, die in ihrer Prima Gruppenbildung vorgenommen haben (vgl. Abschnitt 4).

---

1) Vgl. Programm Hohenzollernschule Schöneberg. Ostern 1909, sowie R. Müller, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 8 (1909), S. 61 ff. (dem Archiv für Mathematik und Physik III, 14 (1909) beigelegt), und den Bericht in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 40, (1909), S. 221 ff.

Die König Wilhelmschule, Königliches Realgymnasium in Reichenbach (Schles.) gibt kurz an:

I. Beide Abteilungen. Analytische Geometrie, Kombinatorik, binomischer Satz für positive ganze Exponenten. Übungen und Wiederholungen aus dem ganzen Gebiete der Mathematik.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Gruppe allein: Einführung in die Differential- und Integralrechnung. Der binomische Satz für beliebige Exponenten, die wichtigsten unendlichen Reihen, Ergänzung der analytischen Geometrie.

Von den Abiturientenaufgaben (Michaelis 1908 und Ostern 1909) der mathematisch-naturwissenschaftlichen Gruppe nenne ich die folgenden:

Ein Punkt der Kurve

$$3y^2 = x^3$$

hat die Abszisse $x_1 = 3$, seine Ordinate ist positiv. Wie lauten die Gleichungen der Tangente und der Normale dieses Punktes?

Einem senkrecht zur Achse begrenzten Parabelsegment das Rechteck von größtem Umfang einzuzeichnen.

In welchen Punkten schneidet die Kurve

$$y = x^4 - 3x^3 + 4$$

die Koordinatenachse? Für welche Werte von x besitzt sie höchste und tiefste Stellen und Wendepunkte? Der Verlauf der Kurve soll zwischen den Grenzen $x = -2$ und $x = +2$ gezeichnet werden.

Der Lehrplan der beiden Gruppen des Elberfelder Realgymnasiums[1]) schreibt vor:

Sprachlich-historische Abteilung:

U I. Beendigung der Stereometrie. Die wichtigsten Sätze über Kegelschnitte in elementar-synthetischer Behandlung.

O I. Graphische Darstellungen in rechtwinkligen Koordinaten. Elementare Aufgaben über Maxima und Minima. Sphärische Trigonometrie bis zum Cosinussatz. Anwendungen auf die mathematische Erd- und Himmelskunde.

In beiden Klassen: Ergänzungen, Zusammenfassungen und Übungen auf allen Gebieten der vorhergehenden Stufen.

Ich bemerke hierzu, daß beachtenswerterweise die analytische Geometrie fehlt. — Allerdings sind die Gleichungen der Kegelschnitte den Schülern von der graphischen Darstellung her nicht unbekannt. Bei der Lösung von „elementaren" Aufgaben über Maxima und Minima wird, wie aus Abiturientenarbeiten ersichtlich, der Begriff des Differentialquotienten benutzt.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung:

Arithmetik: Kombinatorik. Wahrscheinlichkeitsrechnung an Beispielen. Komplexe Zahlen (Binomische Gleichungen). Kubische Gleichungen. Binomischer Satz für beliebige Exponenten. Elemente der Differential- und Integralrechnung, soweit sie eine Vereinfachung in der Erledigung der Lehraufgabe in Mathematik und Physik herbeiführen. Die einfachsten unendlichen Reihen. Maxima und Minima.

Trigonometrie. Sphärische Trigonometrie. Anwendung auf mathematische Erd- und Himmelskunde.

---

1) Die Lehrpläne der Reformabteilung und der nach Fachgruppen geteilten Primen. Programm Städtisches Realgymnasium Elberfeld. Ostern 1909.

Geometrie: Beendigung der Stereometrie. (Lehre von den Körpern, Berechnung der Oberflächen und Inhalte.) Grundlehren der darstellenden Geometrie. Auf praktische Zeichenübungen sind etwa 30 Stunden jährlich zu verwenden. Die wichtigsten Sätze der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Analytische Geometrie der Ebene.

31. Die Oberstufe der Realanstalten; Funktionsbegriff bereits in Obersekunda.

Wahrscheinlich ist die Zahl derjenigen Anstalten recht erheblich, die im vorangegangenen Abschnitte aufgeführt wurden, aber bereits in Obersekunda oder in früheren Klassen dem Funktionsbegriff und der graphischen Darstellung Raum geben, wenn sie es auch in ihren Lehrplänen nicht ausdrücklich sagen. Das ist z. B. bei der Oberrealschule Halle a. S., deren Direktor Mitglied der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte war, der Fall (der Funktionsbegriff setzt hier bereits in U III ein), obwohl erst in O I sich ein ausdrücklicher Hinweis auf die Elemente der Differentialrechnung mit Anwendungen, übrigens nach den wichtigsten Reihen der algebraischen Analysis findet, und ist mir auch von anderen Anstalten bekannt.

Die große Frage für die Realanstalten ist hier: wann ist die Differentialrechnung einzuführen?

Ein Beispiel für die Untergruppe IIIa nämlich, die zwar von O II an dem Funktionsbegriff Raum gibt, aber die Infinitesimalrechnung ablehnt, ist mir nicht bekannt geworden.

Von den Anstalten der Untergruppe IIIb, die vor der Integralrechnung haltmachen und sich mit der Differentialrechnung begnügen, will ich zunächst die Oberrealschule Fulda anführen, welche die „Einführung in die Differentialrechnung" nach den einfachsten unendlichen Reihen in O I bringt und daran die Maxima und Minima knüpft. Weiter gehört dahin die Oberrealschule zu Krefeld[1]) und das Ostern 1909 noch nicht voll ausgebaute Städtische Reform-Realgymnasium in Zoppot. Beide nehmen die unendlichen Reihen ganz oder doch z. T. vorweg. Wie die Krefelder Oberrealschule den Stoff der O I mit einer zusammenfassenden Darstellung abschließt, deute der Lehrplan an:

Die Funktion im allgemeinen; der Differentialquotient; die Differentiation algebraischer und transzendenter Funktionen; die Taylorsche und die Maclaurinsche Reihe nebst ihren Anwendungen. Die Lehre von den größten und kleinsten Werten und ihre Anwendung zur Lösung der Aufgaben, namentlich aus der Geometrie und der Physik. Wiederholender Aufbau des arithmetischen Lehrganges.

Als Beispiele für die Untergruppe IIIc, die bis zur Integralrechnung vorgeht, sei der Lehrplan des Reform-Realgymnasiums in Kiel angegeben; es gibt aber erheblich mehr Anstalten dieser Art, von denen ich nur die Klinger-Oberrealschule in Frankfurt a. M., die Oberreal-

1) Der Lehrplan der Oberrealschulen. Oberrealschule zu Krefeld. Programm 1909.

schule auf der Burg in Königsberg i. Pr., die Königl. Oberrealschule in Sonderburg und die Luisenstädtische Oberrealschule in Berlin nennen will.

Das Reform-Realgymnasium Kiel führt u. a. an:

O II. Lösung von Gleichungen ersten und zweiten Grades auch auf graphischem Wege und durch Annäherung.

U I. Lösung von kubischen Gleichungen, besonders durch die Methode der graphischen Darstellung. Einführung in die Differentialrechnung. Einfache Aufgaben über Maxima und Minima.

O I. Weiterführung der Differentialrechnung. Ihre Anwendung auf die Theorie der Maxima und Minima und der graphischen Darstellung von Funktionen. Einführung in die Integralrechnung zur Berechnung der Quadratur einiger Flächen, der Kubatur einiger Rotationskörper und zur Bestimmung des Schwerpunktes von Flächen und Körpern.

Zur Untergruppe IIId, für die ein Analogon unter den Gymnasien mir nicht bekannt geworden ist, rechne ich schließlich diejenigen Anstalten, die bereits in O II den Differentialquotienten benutzen. In allen diesen Fällen ist die Differentialrechnung als ein propädeutischer Vorkursus des in Prima zu Bringenden anzusehen; es wird außerdem in einem Falle noch ausdrücklich hervorgehoben, daß „der Differentialquotient in jedem Falle aus der ursprünglichen Definition abzuleiten" ist, natürlich, wie nicht noch hervorzuheben nötig ist, in engster Anlehnung an das geometrische Bild als Maß der Steigung der zugehörigen Kurve.

Von Realgymnasien, die dieser Gruppe zuzuweisen wären, ist wieder dasjenige von Düren zu nennen, über dessen Lehrplan sich in der bereits angeführten Programmabhandlung von W. Schmidt ausführliche Angaben finden. Als ein weiteres Beispiel sei das Realgymnasium in Remscheid genannt.

Von Oberrealschulen sind die beiden Oberrealschulen in Kiel zu nennen.

Sehr ausführlich ist der Lehrplan der Oberrealschule I an der Waitzstraße in Kiel[1]), bei dem z. B. bemerkenswert ist, daß auch der Integralbegriff bereits in O II auftritt, daß in O I der Mittelwertsatz behandelt wird, ja, daß „die einfachsten Differentialgleichungen" nicht fehlen. Überhaupt bringt dieser Lehrplan so ungefähr das Maximum dessen, was überhaupt in preußischen höheren Schulen sich findet. Einzig die partielle Differentiation ist ein hier nicht aufgeführtes Gebiet, das sich in einem vereinzelten Falle an einer Oberrealschule des Ostens findet.

O II. Arithmetik: Arithmetische und geometrische Reihen nebst Anwendungen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Graphische Darstellung der einfachsten ganzen Funktionen. Integration als Umkehrung der Differentiation. Anwendungen. Maxima und Minima ganzer Funktionen. Allgemeine Eigenschaften der Gleichungen beliebigen Grades. Numerische Gleichungen dritten und höheren Grades. Transzendente Gleichungen. Methoden der angenäherten Lösung.

---

1) Lehrpläne und Lehraufgaben der Oberrealschule an der Waitzstraße in Kiel. Programm Oberrealschule Kiel 1906.

Geometrie: Wiederholung der Ähnlichkeitslehre. Harmonische Punkte und Strahlen. Systematische Begründung und Erweiterung der Stereometrie. Elemente der Projektionslehre und ihre Anwendung auf die darstellende Geometrie. Gestalt und Fundamentaleigenschaften der Kegelschnitte, abgeleitet aus projektivischen Betrachtungen und aus Rechnungen. Erweiterung der Goniometrie durch Behandlung der Additionstheoreme. Schwierigere Dreiecksberechnungen nebst praktischen Anwendungen.

Methodische Bemerkungen dazu: Die Lehre von den arithmetischen Reihen erster Ordnung, der geometrischen Reihe, auch der unendlichen Reihe, der Zinseszins- und Rentenrechnung wird vollständig erledigt. Bei den arithmetischen Reihen höherer Ordnung ist von der Aufstellung allgemeiner Formeln abzusehen. Einfache Beispiele genügen. Die Einführung des Symbols $\binom{n}{k}$ sowie die Berechnung von

$$\sum n^2, \sum n^3, \sum n^4$$

darf nicht fehlen. Auch sind die einfachsten ganzen Funktionen und die Exponentialfunktion als allgemeine Glieder von Reihen zu betrachten. Übungen in der Interpolation und Extrapolation sind anzustellen.

Bei der Untersuchung über den Verlauf der einfachsten auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen Kurven handelt es sich namentlich um den Grenzübergang von der Sekante zur Tangente, vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten. Die physikalische Bedeutung des Differentialquotienten wird erläutert am Gefälle von Straßen, an der Geschwindigkeit eines frei fallenden oder geworfenen Körpers, an der Wärmeausdehnung eines Stabes oder Körpers. Dann folgen Regeln und Beispiele für die Differentiation der einfachsten ganzen Funktionen, die Betrachtung der Fläche eines Kurvenstücks und die Einführung des Integrals, des Grenzwertes von $\sum f(x)\Delta x$. Diese Summe ist für einfache ganze Funktionen durch Reihensummierung auszuwerten. Daraus ergibt sich die Beziehung zwischen der Integralfunktion und der ursprünglichen Funktion, sowie die Bedeutung der willkürlichen Konstanten. Die Integration als Umkehrung der Differentiation wird an den Funktionen $y = x^2$ oder $y = x^3$ erläutert. Bei den Anwendungen sind vor allem Aufgaben über physikalische Vorgänge (Zusammenhang zwischen Bewegung, Arbeit und lebendiger Kraft) sowie Berechnungen von Flächen und Rauminhalten (Pyramide, Kegel, Kugel) zu berücksichtigen. Ihnen schließt sich die Behandlung der Maxima und Minima ganzer Funktionen an.

Bei den allgemeinen Eigenschaften der Gleichungen ist folgendes durchzunehmen. Anzahl der Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades. Ihre Zerlegung in ein Produkt von n Faktoren. Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten der Gleichung. Komplexe Wurzeln sind konjugiert. Numerische Gleichungen lassen sich so umformen, daß die Koeffizienten und Exponenten ganze Zahlen sind und das höchste Glied den Faktor 1 hat. Umformung in die entgegengesetzte Gleichung und in die reziproke Form. Bildung einer Gleichung, deren Wurzeln um h größer oder kleiner sind als die der gegebenen. Zeichenfolgen und Zeichenwechsel. Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln. Existenz und Grenzen der reellen Wurzeln. Auffindung der rationalen Wurzeln durch die Teiler des konstanten Gliedes. Auffindung der irrationalen Wurzeln durch Annäherung und die regula falsi. Lösung einiger transzendenten Gleichungen durch Näherung.

Geometrie: Die Transversalentheorie kommt zwar in Wegfall, gleichwohl empfiehlt es sich, einzelne der zu ihr gehörigen Sätze und Aufgaben als Übungsstoff im Anschluß an die Wiederholung der Ähnlichkeitslehre zu behandeln. Zu den Anwendungen der Ähnlichkeitslehre gehören auch die Ähnlichkeitspunkte und Chordalen, ebenso wie Pol und Polare zur Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen.

Aus der allgemeinen Raumlehre ist alles auszuscheiden, was nicht später direkt erforderlich ist, namentlich die Umkehrungssätze über parallele Ebenen, Sätze über windschiefe Gerade, über die Kongruenz dreiseitiger Ecken, über die Summe der Seiten und Winkel mehrseitiger Ecken. Auch die Berechnung schief abgeschnittener Körper, des Prismatoids, des Kugelabschnitts, der Kugelschicht, des Ikosaeders und Dodekaeders kann entbehrt werden. Die Aufstellung der Guldinschen Regeln bleibt dem Unterricht in Prima vorbehalten.

In der Projektionslehre sind vornehmlich die orthogonale Projektion und die schiefe Parallelprojektion, in den Grundlehren der darstellenden Geometrie insbesondere die Darstellung der wahren Größe und Lage eines geometrischen Gebildes aus seinen Projektionen und die Umkehrung hiervon zu besprechen. Die projektivischen Betrachtungen über Kegelschnitte lassen sich sehr reichlich gestalten.

In der Trigonometrie quäle man den Schüler nicht mit schwierigeren Formeln, mit komplizierten Gleichungen und mit Lösungen, die auf Kunstgriffen beruhen. Viel lehrreicher für die Schulen erweisen sich die Anwendungen des Vorwärts-, Seitwärts- und Rückwärtseinschneidens, sowie die praktische Durchführung einer Triangulation und einer Nivellierung.

UI. Arithmetik: Der Begriff des Grenzwertes. Verlauf der Potenz, der Exponentialfunktion, des Logarithmus und der trigonometrischen Funktionen. Ihre Differentialquotienten und die einfachsten durch sie auswertbaren Integrale. Anwendungen. Zusammenfassende Wiederholung und Vertiefung des Begriffs und der Methode der Differentiation und Integration. Allgemeine Sätze der Differentialrechnung. Differentialquotienten höherer Ordnung mit Anwendungen.

Geometrie: Analytische Geometrie der Ebene nebst den wichtigsten Sätzen über Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Das Einfachste aus der analytischen Geometrie des Raumes. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Geometrie. Fundamentalsätze der sphärischen Trigonometrie und ihre Anwendung auf Erd- und Himmelskunde.

Methodische Bemerkungen dazu: Arithmetik: Der Begriff des Grenzwertes und der Stetigkeit einer Funktion wird an einfachen Beispielen durch Aufstellung von Tabellen und durch graphische Darstellung erläutert. Namentlich sind zu behandeln der Grenzwert von

$$\frac{\sin x}{x} \text{ für } x = 0$$

und der Grenzwert von

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ für } x = \infty .$$

Ein Beispiel für letzteren bietet die momentane Verzinsung. Dann folgt die Schilderung des Verlaufs der Funktionen

$$y = x^n,\ a^x,\ e^x,\ \log x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,$$

die Berechnung ihrer Differentialquotienten und der durch diese auswertbaren Integrale nebst zahlreichen Übungsaufgaben und Anwendungen. Hieran schließt sich eine Wiederholung und Vertiefung der Grundbegriffe der Differentialrechnung und ihrer Umkehrung, die Aufstellung der allgemeinen Regeln für die Differentiation einer Summe, eines Produktes, eines Quotienten, der Funktion einer Funktion sowie einfacher irrationaler Funktionen. Ferner ist zu behandeln die Auswertung einiger bestimmten Integrale und die Bildung der höheren Differentialquotienten, deren physikalische und geometrische Bedeutung an einfachen Beispielen zu erläutern ist. Die Ermittelung der Werte von Ausdrücken unbestimmter Form und die Lösung von Aufgaben über Maxima und Minima aus der reinen und angewandten Mathematik machen den Schluß.

Geometrie: Vielfache Verwendung findet die Differential- und Integralrechnung in der analytischen Geometrie der Ebene bei den Tangenten und Normalen, bei dem Verlauf und der Krümmung der Kurven, bei Längen- und Flächenbestimmungen von Kurvenstücken. In erster Linie sind selbstverständlich die Kegelschnitte zu behandeln, deren Eigenschaften teilweise auch auf synthetischem Wege abgeleitet werden können. Außer den rechtwinkligen Koordinaten des Cartesius werden auch Polarkoordinaten zur Anwendung gebracht.

Aus der analytischen Geometrie des Raumes wird die gerade Linie, die Ebene und das Wichtigste von den Flächen zweiter Ordnung behandelt. Die Inhaltsberechnung von Rotationsflächen und Rotationskörpern bildet eine Anwendung der Integralformeln.

In der sphärischen Trigonometrie wird man, von der körperlichen Ecke ausgehend, zunächst den Inhalt des Kugeldreiecks berechnen. Daran schließen sich der Sinussatz, der Cosinussatz der Seiten und Winkel, das rechtwinklige Kugeldreieck, die Nepersche Regel, die Mollweideschen Gleichungen, die Neperschen Analogien, die Berechnung des sphärischen Exzesses.

In der mathematischen Erd- und Himmelskunde werden behandelt: Horizont, Zenit, scheinbare Drehung der Himmelskugel, die wichtigsten Sternbilder; Gestalt und Größe der Erde, Achsenumdrehung; geographische Breite und Länge; Horizontalsystem, Azimut und Höhenwinkel; Äquatorialsystem, Rektaszension und Deklination, Polardreieck; scheinbare Bewegung der Sonne; ekliptisches System, Länge und Breite; Sonnenjahr, Sonnentag, Sterntag, Zeitgleichung, Kalender; Bewegung der Erde um die Sonne; Tageszeiten, Jahreszeiten; Zonen. Entfernung, Größe und Beschaffenheit der Sonne; scheinbare Bewegung und Beschreibung der Planeten; Bahn, Größe und Beschaffenheit des Mondes, Finsternisse, Ebbe und Flut; Kometen, Meteorite, Fixsterne; irdische Strahlenbrechung, kürzeste Linie auf der Erde. Zahlreiche Übungsaufgaben aus der Nautik, namentlich die Bestimmung des Schiffsortes, der Richtung und Weite des Schiffsweges und Beobachtungen mittels Kompaß, Log, Sextant und Fernrohr.

OI. Arithmetik: Die zyklometrischen Funktionen und ihre Differentialquotienten. Mittelwertsatz. Taylorscher Satz und seine Anwendungen zur Reihenentwicklung von Funktionen und zur Auswertung von Integralen. Mechanische Quadratur. Die einfachsten Differentialgleichungen. Anwendungen. Zusammenfassende Wiederholungen aus dem Gesamtgebiete der Arithmetik mit Hervorhebung des systematischen Aufbaues.

Geometrie: Kartenprojektionen. Der allgemeine Verwandtschaftsbegriff, Kollineation und Inversion. Die wichtigsten Methoden der darstellenden Geometrie. Ergänzungen, Zusammenfassungen und Übungen aus allen Gebieten der Geometrie.

Methodische Bemerkungen dazu: Arithmetik: An die Differentiation der zyklometrischen Funktionen schließt sich die Behandlung von Integralen, deren Auswertung auf die genannten Funktionen führt. Bei einigen dahin gehörigen Beispielen, die ausschließlich mit Rücksicht auf spätere Anwendungen zu wählen sind, kann die Einführung einer neuen Veränderlichen und die teilweise Integration nicht entbehrt werden. Nach Erläuterung des Konvergenzbegriffs und Aufstellung der unentbehrlichsten Sätze über die Konvergenz der Reihen folgt dann der Beweis des Mittelwertsatzes und – etwa unter Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten – die Herleitung der Formeln von Taylor und Mac Laurin. Die theoretische Entwicklung wird dabei fortwährend durch den Hinweis auf praktische Verwendungen unterstützt. So bringt der Mittelwertsatz u. a. zum Ausdruck, daß die mittlere Geschwindigkeit eines Körpers wenigstens in einem Punkte der durchlaufenen Strecke mit der wirklichen Geschwindigkeit übereinstimmt, während sich die Methode der unbestimmten Koeffizienten durch das Beispiel der Wärmeausdehnung nach dem Gesetz[1])

---

1) Im Original des Lehrplanes steht versehentlich etwas anderes.

$$l_t = l_0 \cdot (1 + \alpha t + \beta t^2 + \cdots)$$

erläutern läßt. Nach einer kurzen Betrachtung des Restgliedes der Taylorschen Reihe sind von den Reihen der algebraischen Analysis als Beispiele zu behandeln die Reihen für e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\lg(1+x)$, $(1+x)^n$, $\operatorname{tg} x$. Im Zusammenhang damit steht der Moivresche Lehrsatz und seine Anwendung zur Lösung von Gleichungen, sowie die Berechnung der Logarithmen und trigonometrischen Funktionen. Daran schließen sich einfache Beispiele über die Integration durch Reihen, namentlich solche, die zur Berechnung von π führen, ferner die Ermittlung einiger unbestimmten Werte und das Annäherungsverfahren durch Rechnen mit „kleinen Größen". Bei der mechanischen Quadratur genügt die Behandlung der einfachsten Fälle, in denen die Flächenteile als Rechtecke, Trapeze oder parabolisch begrenzte Streifen angesehen werden. Die zuletzt genannte Annahme führt zur Simpsonschen Regel. Auch die Bestimmung des Flächeninhalts durch Wägung und mit Hilfe eines Planimeters mag hier erwähnt werden. Die wichtigsten Beispiele zur Lösung von Differentialgleichungen aus der Physik liefern die Ableitung der hypsometrischen Formel, die Berechnung der Schwingungsdauer eines Pendels, das Gravitationsgesetz von Newton und die Keplerschen Gesetze. Von anderen Anwendungen sind zu nennen aus der Physik die Berechnung von Schwerpunkten (Guldinsche Regeln) und von Trägheitsmomenten, das Brechungsgesetz, das Erkaltungsgesetz von Newton, die Arbeitsleistung bei der Ausdehnung von Gasen, aus der Chemie der Verlauf von Reaktionen und Auflösungen, aus der Technik, Statistik und Wirtschaftslehre die Behandlung empirisch gefundener Funktionen.

Der wiederholende Aufbau des arithmetischen Lehrganges betrifft vor allem die Erweiterung des Zahlbegriffs von der absoluten bis zur komplexen Zahl und die Darstellungen in der Zahlenebene. Ausführlicher sind irrationale, komplexe und transzendente Größen zu behandeln. Bei den Logarithmen ist auf den Zusammenhang der verschiedenen Systeme hinzuweisen. Gelegentliche historische und philosophische Ausführungen (z. B. über Zahlbegriff und Stetigkeit) sowie Anwendungen aus dem gesamten Stoffgebiet an größeren Beispielen in graphischer und numerischer Darstellung sollen nicht fehlen.

Geometrie: An eine Wiederholung und Erweiterung der in früheren Klassen besprochenen Projektionsarten schließen sich Anwendungen auf die Kartenentwurfslehre an. Von den Gradnetzentwürfen der Kugeloberfläche sind mindestens die orthographische, die stereographische und die Merkator-Projektion zu behandeln. Der allgemeine Verwandtschaftsbegriff wird an den Beispielen der perspektivischen und projektiven Verwandtschaft erläutert. Dann sind die Kegelschnitte als Bilder eines Kreises in stereographischer Projektion zu betrachten. Alle weiteren Erörterungen über kollineare, harmonische und reziproke Verwandtschaft wird man auf eine Ebene beschränken. Namentlich sind die kollineare Abbildung eines Kreises sowie die harmonische Verwandtschaft von Kreis und Kegelschnitt zu besprechen und dabei die Eigenschaften der Kurven zweiten Grades in bezug auf Mittelpunkt, konjugierte Durchmesser, Brennpunkt, Leitlinien und Tangenten abzuleiten. Die Methode der Inversion ist nicht nur auf die Umformung von Kurven, sondern auch zur Vereinfachung schwierigerer Aufgaben und Beweise anzuwenden.

Von der darstellenden Geometrie kann, falls die weitere Förderung dieses Unterrichtszweiges nicht überhaupt dem Linearzeichnen überwiesen wird, nur das Wichtigste gegeben werden. Dazu gehören die Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen im Grund- und Aufriß, die Methode der Umklappung und Drehung, die Darstellung von einfachen Körpern mittels der Durchschnittsmethode, einfache Durchdringungen, die freie Perspektive, die Perspektive von Körpern und ebenen Figuren, die nicht in der Grundebene liegen, einfache Schattenkonstruktionen, die Grundzüge der Axonometrie und Beleuchtungslehre.

Die Erörterung des allgemeinen Verwandtschaftsbegriffs gibt Gelegenheit zu ergänzenden Wiederholungen aus der Lehre von der Kongruenz, Symmetrie und Ähnlichkeit, denen sich wie in der Arithmetik historische und philosophische Ausführungen (z. B. über die Methode der Mathematik, über Axiome u. dgl.) anschließen.

32. Einige Unterrichtsbeispiele für die Infinitesimalrechnung auf der Oberstufe der Realanstalten.

Auch hier wieder mögen zum besseren Verständnis des Lehrverfahrens einige wenige Einzelfragen herausgehoben und an Lehrproben oder Abiturientenarbeiten erläutert werden.

Zunächst eine Stunde in der O II einer Oberrealschule, an der die Differentialrechnung bereits in O II beginnt.

Vorgelegt wird

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Es wird $y + \Delta y$, dann Δy und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x + b$$

gebildet. Dann wird zur Grenze übergegangen:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b.$$

An

$$y = 5x^2 + 7x + 3$$

und ähnlichen Trinomen wird das dann eingeübt und dabei auch die geometrische Bedeutung $\left(y\right.$ gibt die Lage, $\frac{dy}{dx}$ die Richtung $\left.\text{an}\right)$ und der Einfluß des Vorzeichens besprochen. Dann wird zur Bildung des Differentialquotienten bei

$$y = a \cdot x^3$$

geschritten. In einer Tabelle für x, y und $\frac{dy}{dx}$ werden die Werte für

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2$$

eingetragen und danach die Kurve gezeichnet. Dabei erscheint als Neues die Wendetangente. Nach einigen Beispielen wird

$$y = \frac{x^3}{3} - 3x$$

differenziert und dabei bereits die Regel der Differentiation von Summen angewandt, ohne daß ein allgemeiner Beweis gegeben wird.

An der betreffenden Oberrealschule begnügt man sich in der Obersekunda mit der Differentiation der rationalen ganzen Funktion; an anderen Anstalten werden auch die trigonometrischen Funktionen hinzugenommen.

So wird z. B., nachdem der Begriff des Bogenmaßes für Winkel eingeführt, für die Funktion

$$y = \sin x$$

der Ausdruck

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

gebildet und der Grenzübergang durchgeführt, nachdem

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$$

aus der Vergleichung eines einbeschriebenen und eines umbeschriebenen zum Winkel ε gehörigen Teildreiecks mit dem zugehörigen Sektor bestimmt ist.

Fast durchgängig nehmen, wie das auch in den beiden angeführten Beispielen geschehen, die Einführungen in die Infinitesimalrechnung ihren Ausgangspunkt bei Grenzübergängen. Dabei werden die Sätze über die Grenzwerte, z. B. daß

$$\lim (u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$$

ist, als selbstverständlich vorausgesetzt. Nur in seltenen Fällen beginnt man statt mit dem Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten mit den Differentialen, die in der Grenze auf das aktual Unendlichkleine führen würden. Ein durchgeführtes Beispiel bietet dafür die Schülke'sche Aufgabensammlung.[1]) In nicht wenigen Fällen meidet man die Differentiale ganz.

Ausgedehnteste Verwendung findet die Differentialrechnung bei Kurvendiskussionen. Als Beispiel wähle ich eine (etwas gekürzte) Abiturientenarbeit über die semikubische oder Neilsche Parabel von einer Oberrealschule (übrigens begegnet man dieser Kurve in neueren Abiturientenarbeiten überaus häufig):

Die Kurve $y = x^{\frac{3}{2}}$ in bezug auf Verlauf, Tangente und Normale im Punkte P (4,8) zu untersuchen.

Lösung: a) Wenn x in der Gleichung verschiedene Werte zwischen $x = -4$ und $x = 0$ annimmt, so ergibt sich, da

$$y = \pm \sqrt{x^3}$$

ist, daß y dann imaginär wird. Läßt man nun x zwischen $x = +4$ und $x = 0$ verschiedene Werte annehmen, so erhält man diese Tabelle:

x	y
0	0
0,5	± 0,27
1,0	± 1,00
1,5	± 1,84
2,0	± 2,83
2,5	± 3,95
3,0	± 5,20
3,5	± 6,55
4,0	± 8,00

Die Kurve liegt also symmetrisch zur x-Achse, sie steigt im 4. Quadranten aus dem Unendlichen (stets erhaben gegen die x-Achse) auf, geht in den Nullpunkt und bildet dort eine scharfe Spitze. Sie steigt dann im ersten Quadranten erhaben gegen die x-Achse auf (dazu eine Figur auf Millimeterpapier). Es ist die Neilsche Parabel.

---

1) Vgl. A. Schülke, Aufgaben-Sammlung aus der reinen und angewandten Mathematik. 2. Teil. 2. Aufl. Leipzig (Teubner) 1910.

b) Untersuchung im Punkte $P(4,8)$. Ich bilde die erste und zweite Ableitung von y nach x. Es ist

$$y = x^{\frac{3}{2}}.$$

$$y' = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 1{,}5 \cdot \sqrt{x}.$$

$$y'' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{0{,}75}{\sqrt{x}}.$$

Erstens: Die Gleichung der Tangente im Punkte $P(4,8)$ lautet:

$$\eta - 8 = y'(\xi - 4)$$

oder: ξ und η sind laufende Koordinaten

$$\eta = 3 \cdot \xi - 12 + 8 = 3 \cdot \xi - 4.$$

Die Tangente schneidet auf den Achsen Stücke ab, die 4 und 4/3 Einheiten betragen.

Zweitens: Die Normale hat die Gleichung:

$$\eta - 8 = -\frac{1}{3}\xi + \frac{4}{3}.$$

Sie schneidet also auf der x-Achse 28 Einheiten, auf der y-Achse dagegen $\frac{28}{3}$ ab.

Drittens: Als Abschnitte der Tangente und der Normale erhält man:

$$t = \frac{y}{y'}(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = \cdots = 8{,}4328.$$

$$n = y(1 + y_1^2)^{\frac{1}{2}} = \cdots = 25{,}2984.$$

$$t_s = \frac{y}{y'} = \frac{8}{3}.$$

$$n_s = y \cdot y' = 24.$$

Viertens: Da $y'' = 0{,}3785$ ist, also mit y gleiches Vorzeichen hat, ist die Kurve in dem Punkte erhaben gegen die positive Richtung der x-Achse.

Fünftens: Da $y' = 3$ größer als 0 ist, steigt die Kurve bei wachsendem x.

Weiter sind dann noch Maximum, Minimum, Wendetangenten und Krümmung untersucht.

Großer Beliebtheit erfreut sich die Lehre von den Maximis und Minimis, hauptsächlich deshalb, weil sie wirklich aus der Praxis geborene Aufgaben zu lösen gestattet. Ein Beispiel dafür aus der Unterprima eines Realgymnasiums.

Über einem runden Tische, gerade über seinem Mittelpunkte, hängt eine Lampe; wie hoch muß die Lampe über dem Tische stehen, damit am Rande ein Maximum der Beleuchtungsstärke vorhanden ist? Aus

$$B = \frac{J \cdot \cos\alpha}{r^2}$$

wird r eliminiert mit Hülfe von

$$h = r \cdot \sin\alpha,$$

und die Frage auf die Diskussion von $\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$ zurückgeführt.

Überhaupt ist der Gewinn, den der Physikunterricht aus der Bekanntschaft der Schüler mit der Differential- und Integralrechnung ziehen kann, außerordentlich groß; leider muß man hinzufügen, daß diese Vorteile noch viel zu wenig ausgenutzt werden.[1])

Der Lehrplan aller höheren Schulen sieht für die Physik zwei Stufen vor, die zweite beginnt mit der Obersekunda. Der amtliche Lehrplan setzt hier mit Wärmelehre und Elektrizität ein, dabei wird, wie von mehreren Seiten hervorgehoben ist, eine kurze Einleitung in die Grundbegriffe der Mechanik zur Notwendigkeit.

Im Gegensatz zu dieser Anordnung der amtlichen Lehrpläne ist vielfach der Vorschlag gemacht worden, gleich in der Obersekunda mit der Mechanik zu beginnen. Nachdrücklich ist darauf z. B. von O. Behrendsen[2]) hingewiesen, der schon seit fünfzehn Jahren am Göttinger Gymnasium mit der Mechanik in Obersekunda beginnt. Heutigentages gibt es wohl bereits eine ganze Reihe von Anstalten, welche die gleiche Einrichtung haben, die übrigens auch von den Meraner Vorschlägen aufgenommen ist.

Doch zurück zur Infinitesimalrechnung. Das wichtigste von den nicht rein-mathematischen Anwendungsgebieten der Infinitesimalrechnung auf der Schule ist unstreitig die Mechanik. Liegt diese schon in Obersekunda, die Infinitesimalrechnung jedoch erst in Prima, so kann aus der Einfügung der Infinitesimalrechnung in den mathematischen Unterricht nur wenig Vorteil für die Physik gezogen werden. Vielfach muß dann der mathematische Unterricht den physikalischen Unterricht stützen, indem er in seinen Anwendungen die Mechanik bevorzugt und also etwa, wie das z. B. der Lehrplan der Kieler Oberrealschule I ausführlich darlegt, auf das Newtonsche Attraktionsgesetz und dergleichen eingeht. Für diejenigen Anstalten, die den Differentialquotienten bereits in O II bringen, fällt diese Schwierigkeit ganz weg; man kommt im Mechanikunterricht der O II vollständig mit dem Differentialquotienten der rationalen ganzen und etwa der Sinus- und Cosinusfunktion aus.[3]) Oft geschieht die Einführung der Differentialrechnung in O II geradezu in engster Wechselwirkung mit der Mechanik.

---

1) Vgl. den im 3. Bande dieser Abhandlungen erscheinenden Bericht H. E. Timerding, Das Mathematische in den Lehrbüchern der Physik.

2) O. Behrendsen, Über einige den Unterricht in der Physik und Chemie an höheren Schulen betreffende Fragen; in F. Klein und E. Riecke, Neue Beiträge l. c. S. 118 ff.

3) Bei der harmonischen Bewegung, welche die Grundlage für die Gesetze über kleine Schwingungen des Pendels gibt, braucht man allerdings auch Differentialquotienten von Funktionen

$$y = \sin ax; \quad y = \cos ax.$$

Man kann die Ableitungen aber leicht direkt bilden, ohne die für die O II zu weit gehende Regel für die Differentiation der Funktionen von Funktionen zu benutzen.

Liegt die Mechanik erst in Prima, so ist in jedem Falle reiche Gelegenheit zur Benutzung der Infinitesimalrechnung gegeben, zumal wenn beide Disziplinen für einander arbeiten – meist liegen sie ja in einer Hand. Es darf allerdings nicht verschwiegen werden, daß man in den führenden Kreisen der Physiklehrer lebhaft für eine möglichst empirische Behandlungsweise der gesamten Physik eintritt, und daß also eine mehr theoretische, teilweise deduktive Mechanik von manchen Seiten heftig bekämpft wird.

Beispiele dafür anzuführen, wie die Infinitesimalrechnung im Mechanikunterricht verwertet wird, erübrigt sich. Der Kreis der Anwendungen ist aber natürlich nicht mit diesem Kapitel der Schulphysik erschöpft. Wir lernten vorhin ein Beispiel aus der Optik kennen. Ganz allgemein ist der Infinitesimalbegriff für alle Gebiete der Wellenlehre fruchtbringend, ich erinnere nur an die Theorie der Wechselströme: im einfachsten Falle der Drehung einer Spule im homogenen magnetischen Kraftfelde ist die elektromotorische Kraft des induzierten Stromes proportional sin φ, da die Anzahl der jeweiligen Kraftlinien in der Faradayschen Ausdrucksweise proportional cos φ ist, wo φ den von geeigneter Anfangslage aus berechneten Drehungswinkel angibt.

Aus der Integralrechnung wird zunächst von Interesse sein, welche Integrale an den Anstalten, die Integralrechnung treiben, etwa benutzt werden. An einer Oberrealschule mußten die Schüler, wie sich bei einer Wiederholungsstunde, der ich beiwohnte, ergab, die folgenden Integrale gedächtnismäßig beherrschen:

$$\int x^n dx; \quad \int \frac{1}{x} dx; \quad \int e^x dx; \quad \int a^x dx;$$

$$\int \sin x dx; \quad \int \cos x dx; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x}; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

Zur Auswertung von vorgelegten Integralen waren den Schülern die Methode der Einführung neuer Variablen und die sog. partielle Integration geläufig. Von Integralen, die dergestalt ausgewertet werden, nenne ich etwa:

$$\int \sin^2 x dx; \quad \int \cos^2 x dx; \quad \int \sin^4 x dx \quad \text{usf.}$$

Auf welche Probleme die Integralrechnung im Unterricht etwa angewandt werden kann, mögen zwei Abiturientenaufgaben zeigen. Die erste von einem Realgymnasium:

Gegeben die Gleichung

$$y^3 = 5x + 2.$$

a) Die betreffende Kurve graphisch darzustellen,

b) in dem Kurvenpunkte mit der Abszisse 5 die Tangente zu bestimmen,

c) das Flächenstück zu berechnen, das begrenzt wird von der x-Achse, von den zu den Abszissen 0 und 5 gehörigen Ordinaten und von der Kurve selbst.

Die Schüler berechnen den Wert der Funktion für $x = 0, 1, 2 \ldots 6$ und stellen sie danach graphisch dar. Dann wird

$$f'(x) = 5/3 \cdot (5x + 2) - 2/3$$

gebildet und für $x = 5$ der Wert

$$\tan \varphi = 5/27$$

gefunden; dann wird

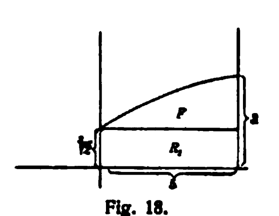


Fig. 18.

$$\int_6^5 (5x + 2)^{\frac{1}{3}}\, dx$$

ausgewertet. Andere Schüler bilden die Summe Rechteck $R_1 + F$ (vgl. Fig. 18), wo

$$R_1 = 5 \cdot \sqrt[3]{2}$$

und

$$F = \int_{\sqrt[3]{2}}^{3} \left(\frac{27}{5} - \frac{y^3}{5}\right) dy$$

ist.

An einer Oberrealschule wurde die Aufgabe behandelt:

Die Kurve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^4}{b^4} = 1$$

rotiert um die Abszissenachse. Bestimme Volumen und Schwerpunkt desjenigen Körpers, welcher von der entstehenden Rotationsfläche und der zur Abszissenachse im Anfangspunkte senkrechten Ebene begrenzt wird.

Lösung eines Schülers: Gestalt der Kurve: Sie liegt symmetrisch zu beiden Achsen, da die Variablen nur in geraden Potenzen vorkommen.

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{4y^3}{b^4}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Daraus nach einigen Umformungen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{2 \cdot a^{\frac{1}{2}} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{4}}},$$

$\pm x$	$\pm y$	$\frac{dy}{dx}$
0	b	0
a	0	∞
$>a$	imag.	—
imag.	$>b$	—

Die Kurve hat also mit der gewöhnlichen Ellipse große Ähnlichkeit. Dann wird berechnet

$$V = \pi \int y^2\, dx = \frac{\pi b^2}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

und schließlich der Schwerpunkt bestimmt.

Einen Überblick über die Zielleistungen möge schließlich eine Zusammenstellung der gebräuchlichsten Abiturientenaufgaben geben, wobei ich mich namentlich an die im Jahre 1908/09 gegebenen halte. Auch da hat sich bereits eine Tradition im kleinen gebildet; manche Aufgabengruppen kehren außerordentlich häufig wieder, nicht selten auch trifft man alte Bekannte aus früheren Jahren von anderen Anstalten.

Sehr beliebt sind wieder die ganzen rationalen Funktionen 3. Grades (ich finde sie bei etwa 20 Anstalten). So hat das Königl. Andreas-Realgymnasium Hildesheim die Aufgabe:

Es sind zu ermitteln die ausgezeichneten Punkte der Kurve

$$y = 2 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 4x + 1,$$

und es ist die Differentialkurve dieser Kurve zu zeichnen und zu erörtern.

Die Oberrealschule Dortmund gibt die Aufgabe:

Es ist die Kurve

$$4y = 4x - x^3$$

zu diskutieren und zu zeichnen und die Länge der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale für $x = 1{,}5$ zu bestimmen.

Auch ganze rationale Funktionen 4. Grades sind hier nicht selten; ich erinnere z. B. an ein bereits im Abschnitt 22 erwähntes Beispiel von einer Oberrealschule, wo von der Gleichung

$$x^4 - 4x^3 + 5x - 4 = 0$$

zunächst eine algebraische Lösung, dann eine graphische Näherungslösung durch Schnitt einer Parabel mit einem Kreise gefunden und nach der Newtonschen Methode verbessert wurde.

In Anwendung der Newtonschen Näherungsmethode und der regula falsi werden vielfach auch noch rationale ganze Funktionen höheren Grades herangezogen etwa

$$y = x^7 - 10x + 5$$

wobei dann erste Näherungswerte für die Nullstellen durch Schnitt von $y = x^7$ und $y = 10x - 5$ graphisch zu finden sind.

Rational gebrochenen Funktionen begegnet man seltener. Das Realgymnasium Insterburg behandelte z. B.

$$y = \frac{x^2 + 2}{x + 3}.$$

Bei den algebraischen Funktionen zweiten Grades wird gegenüber früher üblichen Aufgaben jetzt häufiger die Berechnung der Krümmung gefordert; auch Evoluten werden diskutiert u. dgl. m.

Von transzendenten Kurven nenne ich außer bereits früher angeführten die Kettenlinie

$$y = \tfrac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}).$$

Die Auswertung unbestimmter Ausdrücke findet sich des öfteren:

Wie bestimmt man mit der Differentialrechnung den wahren Wert eines Quotienten, der für $x = a$ den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ annimmt? Beispiel:

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin 2x - \cos x}.$$

Anwendungen der Maclaurinschen und Taylorschen Sätze der Reihenlehre sind selten; die Entwicklung von

$$f(x) = e^{\sin x}$$

nach Maclaurin geht auch wohl schon über den der Schule gesteckten Rahmen hinaus.

Eine partielle Differentiation ist mir in den Abiturientenaufgaben nur einmal begegnet, sie gehört auch sonst zu den großen Seltenheiten im Unterricht.

Von der Funktion

$$F(x, y) = x^4 - a^2x^2 + y^2$$

sind zu bestimmen

a) die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung,
b) die erste und zweite Ableitung der entwickelten Funktion $y = f(x)$,
c) die Maximal- und Minimalwerte der Funktion $y = f(x)$.

Dieselbe Funktion ($a = 5$) soll unter Bestimmung ihrer Doppel- und Wendepunkte und mit Zeichnung der Tangenten in den Maximal- und Minimalpunkten und in den Achsenschnittpunkten graphisch dargestellt werden.

Zwei Aufgaben aus der Integralrechnung mögen den Beschluß machen:

Der Verlauf der Funktion

$$y = 6x - x^2$$

ist innerhalb des Bereiches von $x = 0$ bis $x = 6$ für alle ganzzahligen Werte der Veränderlichen x zu ermitteln, hiernach die Funktion graphisch darzustellen und der Flächeninhalt zwischen Kurve und x-Achse in den angegebenen Grenzen zu berechnen.

Die Kurve

$$y = c \cdot x^3$$

rotiert um die x-Achse; der Rauminhalt des entstehenden Körpers ist zu bestimmen.

33. Überblick über den gegenwärtigen Stand der Reform an den höheren Schulen Preußens.

Wir haben in den vorangehenden Abschnitten die verschiedenartigsten unter dem Einfluß der Reformbewegung stehenden Lehrpläne zusammengestellt, indem wir die Absicht verfolgten, ohne Stellungnahme zu dem einen oder anderen Plan einzelne Gruppen herauszuarbeiten. Nun möge in dem Schlußkapitel der Versuch gemacht werden, aus den Resultaten, soweit das angängig erscheint, das Fazit zu ziehen.

Das Einteilungsprinzip, das wir gewählt haben, war ein recht äußerliches. In der Tat ist es für die Stellungnahme zu den Reformbestrebungen nicht das Ausschlaggebende, ob man etwa Integralrechnung treibt oder sich mit der Differentialrechnung begnügt. Aber an und für sich ist auch der Lehrinhalt wichtig und anders als am Stoff die Bewegung zu charakterisieren ist zwar möglich, wenn man sich auf den Lehrbetrieb einiger weniger, dem Berichtenden von Grund aus bekannten Anstalten beschränkt, nicht aber, wenn man von der Allgemeinheit ein auch nur in erster Annäherung richtiges Bild geben will.

Die Einteilung in Gruppen war, wenn ich mich hier auf die Oberstufe beschränke, die folgende:

I. Ablehnung des Funktionsbegriffes.

II. Späte („unstetige") Entwicklung des Funktionsbegriffes:
   a) Ohne Infinitesimalrechnung,
   b) Mit Differentialrechnung,
   c) Mit Differential- und Integralrechnung.

III. Allmähliche („stetige") Entwicklung des Funktionsbegriffes:
   a) Ohne Infinitesimalrechnung,
   b) Mit Differentialrechnung in Prima,
   c) Mit Differential- und Integralrechnung in Prima,
   d) Mit Infinitesimalrechnung bereits in Obersekunda.

Dabei ist natürlich immer im Auge zu behalten, daß der Ausdruck Differentialrechnung, Integralrechnung usf. nicht etwa besagt, daß es sich um einen „systematischen Unterricht" handelt, womöglich gar „mit besonderen Unterrichtsstunden", wie es z. B. E. Study dargestellt hat[1]), sondern um eine im Anschluß an den übrigen Lehrstoff sich ergebende, anschauliche Einführung und Verwendung. In betreff der begrifflichen Schwierigkeiten, die die Infinitesimalrechnung bietet, trifft wohl eine Bemerkung von Schrader[2]) das Richtige, daß solche mehr beim Lehrer als beim Schüler vorhanden sind.

1) Vgl. A. Schülke, Umkehr oder Fortschritt. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 40 (1909) S. 65 ff.

2) Gelegentlich einer Diskussion auf der XIII. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften. Halle a. S. 1904.

Auf die Frage, wieweit die Reformbestrebungen überhaupt bereits in die Schulen eingedrungen sind, läßt sich nur mit der Angabe einer unteren Grenze antworten, wobei nur diejenigen Anstalten gezählt sind, bei denen sich Andeutungen in den Programmen und den Abiturientenarbeiten finden. Auf Grund der Osterprogramme von 1909 habe ich eine Zusammenstellung gemacht, die allerdings auch nur einen groben Näherungswert geben kann, da nur die im Tauschverkehr im August 1909 versandten Programme berücksichtigt werden konnten und mir bei der Durchsicht (es sind über 600 Exemplare) möglicherweise das eine oder andere entgangen ist. Danach war das Eindringen des Funktionsbegriffes bemerkbar an

24 Gymnasien
35 Realgymnasien
34 Oberrealschulen
5 Realschulen
zusammen 98 Anstalten.

Ich hoffe, diese Liste bei einer Durchsicht der Programme von Ostern 1910 gelegentlich ergänzen zu können.

Bei der Einreihung der Anstalten in die oben unterschiedenen Gruppen scheidet mehr als die Hälfte aus, bei der nur die Abiturientenarbeiten zum Ausweis dienten. In den vorangegangenen Abschnitten sind 45 Lehrpläne berücksichtigt, manche übrigens auf Grund schriftlicher oder mündlicher Mitteilungen. Danach stellt sich das Bild so:

Gruppe:	II a	II b	II c	III a	III b	III c	III d	Zus.
Gymnasien	4	2 + 1	1 + 3	1	1	2 + 1	–	16
Realgymnasien .	–	5	2 + 2	–	1	1	2	13
Oberrealschulen	1	5	2	–	3	4	2	17
Zusammen	5	13	10	1	5	8	4	45

Übersicht über die einzelnen Gruppen reformtreibender Anstalten.

Die Zahlen der Anstalten, bei denen es sich um Sonderkurse oder um mathematisch-naturwissenschaftliche Gruppen handelt, sind fett gedruckt.

Die Übersicht zeigt, daß die Gruppen II noch recht zahlreich sind. Ich möchte das aber mehr auf das zur Zeit herrschende Übergangsstadium und auf die Mangelhaftigkeit des von mir zugrunde gelegten Materials schieben.

Eine wichtige Frage ist die, ob der Abstand im Lehrstoff der Gymnasien auf der einen, der Realanstalten auf der anderen Seite, den die Lehrpläne von 1901 so gering als nur eben möglich gewählt haben, ein größerer, deutlicherer geworden ist. Hat sich die Oberrealschule über das Niveau der Gymnasien herausragende, eigene Ziele in der Mathematik gesteckt? Zwei Schularten lassen sich etwa wie zwei durch zahlreiche Zwischenformen überbrückte Tierarten nur nach statistischen Mittelwerten beurteilen, und dazu reichen unsere Angaben noch nicht vollständig aus.

Immerhin darf man wohl sagen, daß gegenwärtig nur erst an wenigen Gymnasien, die doch prozentual stark überwiegen, der Funktionsbegriff bis zu einer eingehenderen Behandlung der Infinitesimalrechnung geführt wird, zumal wenn man noch die Fälle der Sonderkurs- und Gruppenbildung ausnimmt. Wo man den Begriff des Differentialquotienten benutzt, beschränkt man sich auf ganz einfache algebraische und einige wenige transzendente Funktionen; weitergehende Kurvendiskussionen, die Reihenlehre u. dgl. treten fast gänzlich zurück; die Integralrechnung wird meist gar nicht, oder doch nur eben in ihren ersten Anfängen gestreift.

Bei den Oberrealschulen dagegen ist der regelrechte Betrieb der Differentialrechnung bei mehr als 50% an der Hand der Programme nachweisbar, dürfte aber in Wirklichkeit diesen Prozentsatz ganz erheblich überschreiten. In Kurvendiskussionen geht man beträchtlich weiter als am Gymnasium, die durch die amtlichen Lehrpläne vorgeschriebene Reihenlehre steht schon in den meisten Fällen im Zeichen von Taylor und Maclaurin, die Integralrechnung zählt eine, wenn auch absolut noch geringe, so doch relativ zum Gymnasium große Zahl von Anhängern. Alles in allem kann man wohl sagen, daß die Mehrzahl der Oberrealschulen mindestens den Stoff der ersten Hälfte einer didaktisch verfahrenden, d. h. nicht mit strenger Grundlegung einsetzenden Vorlesung über Differential- und Integralrechnung bringt; ähnlich wird es mit der analytischen Geometrie stehen. Mit diesen Mitteln kann die Oberrealschule einen Physikunterricht erteilen, der in seinem mathematischen Gehalt vielfach weiter als die großen Anfangskollegs der meisten Universitäten über Experimentalphysik gehen kann.

Das Realgymnasium schließlich nimmt eine Mittelstellung zwischen Oberrealschule und Gymnasium ein, nähert sich übrigens erheblich mehr der Oberrealschule als dem Gymnasium.

Wenn der Inhalt der Reformbestrebungen im mathematischen Unterricht im wesentlichen auch ein methodischer ist, so tut er also doch auch nach der stofflichen Seite hin seine Wirkung.

Man darf heute bereits voraussagen, daß die Reformbestrebungen sich durchsetzen werden; wir haben es mit einer Bewegung zu tun, die, was den mathematischen Unterricht in Deutschland anlangt, ein Analogon besitzt nur in jener, dem größeren Publikum fast verborgen

gebliebenen, schon vor einer Reihe von Jahrzehnten erfolgten Ablösung des dogmatischen Lehrverfahrens durch das heuristische.

Es ist wohl nicht zweifelhaft, daß die nächsten Lehrpläne für höhere Knabenschulen den Reformbestrebungen in ausgedehntem Maße Rechnung tragen werden, wie das die neuen Lehrpläne für Mittelschulen und, wenigstens in den methodischen Bemerkungen, auch die für höhere Mädchenschulen bereits getan haben. Daß sich aber diese Reformbestrebungen schon jetzt soweit Geltung verschaffen konnten, dankt man neben ihrer inneren Berechtigung nicht zum wenigsten der freiheitlichen Auffassung der Schulregierung, die für die Sammlung mannigfachster Erfahrungen weitesten Spielraum ließ. Der Vorzug des preußischen höheren Schulwesens ist eine weise Abwägung des Einflusses der Schulregierung auf der einen, der Lehrerschaft auf der anderen Seite. Möge dieses Gleichgewicht, das heute herrscht, stets erhalten bleiben.

Namenregister.

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND I HEFT 3

STAATSPRÜFUNG UND PRAKTISCHE AUSBILDUNG DER MATHEMATIKER

AN DEN HÖHEREN SCHULEN IN PREUSSEN UND EINIGEN NORDDEUTSCHEN STAATEN

VON

PROFESSOR DR. WILHELM LOREY
PROREKTOR DER KGL. OBERREALSCHULE
IN MINDEN I. W.

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND I HEFT 3

STAATSPRÜFUNG UND PRAKTISCHE AUSBILDUNG DER MATHEMATIKER

AN DEN HÖHEREN SCHULEN IN PREUSSEN UND EINIGEN NORDDEUTSCHEN STAATEN

VON

PROFESSOR DR. WILHELM LOREY
PROREKTOR DER KGL. OBERREALSCHULE
IN MINDEN I. W.

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

VORWORT.

Nach dem ursprünglichen Plane sollten in den von der internationalen Mathematischen Unterrichtskommission veranlaßten Berichten der mathematische Unterricht an den deutschen Universitäten mit besonderer Rücksicht auf die Heranbildung der Kandidaten des höheren Lehramts in einem Hefte behandelt und dabei vor allen Dingen die Staatsprüfung der Mathematiker geschildert werden. Der zu verarbeitende Stoff erwies sich aber so groß, auch zeigt das Staatsexamen in Bayern und Württemberg so charakteristische Unterschiede gegenüber dem preußischen Examen, daß eine Änderung in dem Plane der Abhandlungen notwendig wurde. Die in Band II dieser Abhandlungen vereinigten besonderen Berichte über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen in Mittel- und Süddeutschland, von denen bis jetzt die Abhandlungen von Wieleitner über Bayern, Witting über Sachsen, Geck über Württemberg, Cramer über Baden und Schnell über Hessen erschienen sind, bringen sämtlich auch einen Abschnitt über die Staatsprüfung und die praktische Ausbildung der mathematischen Kandidaten des höheren Lehramts in den betreffenden Ländern. Dementsprechend berichtet die vorliegende Arbeit über die Entwicklung des mathematischen Staatsexamens in Preußen und überhaupt in Norddeutschland, und über die hier übliche praktische Ausbildung der Kandidaten des höheren Lehramts. Diese Abhandlung mag so als eine nachträgliche Festschrift gelten zu dem für den preußischen Oberlehrerstand wichtigen Gedenktage, dem 12. Juli 1910, an dem er vor hundert Jahren als selbständiger Stand in das Leben trat.

Die Entwicklung seit dieser Zeit hat schon manche geschichtliche Darstellung gefunden; trotzdem hofft der Verfasser mit der vorliegenden Arbeit eine wesentliche Lücke auszufüllen. Der Anteil und die Bedeutung der mathematischen Wissenschaften in der Entwicklung des Standes sind in den bisherigen Darstellungen, die von Vertretern anderer Wissenschaften verfaßt sind, naturgemäß zurückgetreten. Wenn nun der Verfasser ausführlich darlegt, wie sich das mathematische Staatsexamen in Norddeutschland entwickelt hat, wie hier die hohe Wissenschaft und die Anforderungen des praktischen Lebens zusammenwirken, wie auch Fragen sozialer Art mit hereinspielen, welche Bedeutung die Deutsche Mathematiker-Vereinigung in diesen Dingen gewonnen hat, so glaubt er damit bei allen denen einiges Interesse zu erwecken, die irgendwie bei dem Staatsexamen beteiligt sind, sei es als Prüfende oder noch zu prüfende, aber auch bei seinen schon geprüften Amts- und Fachgenossen.

Bei der Korrektur der Arbeit haben die anderen Herren Mitarbeiter der IMUK den Verfasser sehr unterstützt und ihn dadurch zu großem Danke verpflichtet; ebenso hat der Verfasser auch den vielen Herren zu danken, die ihm auf seine Bitte das nötige Material verschafft haben.

Besonderen Dank schuldet der Verfasser dem Vorsitzenden der IMUK, Herrn Geh. Regierungsrat Professor Dr. Felix Klein, der in wiederholten ausführlichen Besprechungen und Mitteilungen die Arbeit wesentlich gefördert hat.

Schließlich aber benutzt der Verfasser gern auch die Gelegenheit, dem Verlage B. G. Teubner, der in diesen Tagen auf ein hundertjähriges Bestehen zurückblicken kann, verbindlichsten Dank für das unermüdliche und liberale Entgegenkommen auszusprechen, das er auch bei dieser Abhandlung der IMUK trotz der vielen wiederholten Korrekturen gezeigt hat.

Minden (Westfalen), 1. März 1910. W. LOREY.

INHALTSVERZEICHNIS.

1. Das Edikt von 1810.

Das Geburtsjahr der Berliner Universität ist auch das Geburtsjahr des preußischen und damit des norddeutschen Oberlehrerstandes. Höhere Schulen, d. h. fast ausschließlich Gymnasien hat es in Norddeutschland vor 1810 natürlich schon viele Jahrhunderte gegeben. Von der Kirche zumeist gegründet und kirchlichen Behörden unterstellt, hatten sie als Lehrer Theologen, für die das Lehramt an den Gymnasien Durchgangs- und Warteposten war, bis sie eine besser bezahlte Pfarrstelle erhalten konnten. Gewiß blieben auch viele an der Schule, und die Geschichte des gelehrten Schulwesens weist eine stattliche Reihe berühmter Lehrer an höheren Schulen Norddeutschlands auf. Ganz vereinzelt trifft man in früheren Jahrhunderten auch Gymnasiallehrer, die keinerlei theologische Studien getrieben haben, sondern mathematisch-naturwissenschaftliche wie der als Astronom und Kalenderreformer berühmt gewordene Bartholomäus Scultetus, der viele Jahre als infimus freilich des Kollegiums am Görlitzer Gymnasium Mathematik unterrichtete, gleichzeitig aber auch Mitglied des Magistrats war. Von seinem Lehramt wurde er schließlich entbunden, „weil es nicht angängig sei, daß jemand gleichzeitig unterstes Mitglied des Lehrerkollegiums und oberstes Mitglied des Rates sei." Aber auch diese einzelnen Nichttheologen an den höheren Schulen haben ihre wissenschaftliche Befähigung für das Amt nicht durch eine besondere Prüfung nachgewiesen. Durch eine Königl. Verordnung vom 2. September 1718 über die Prüfung der Lehrer an den lateinischen und deutschen Schulen war allerdings eine Prüfung vor den Konsistorien und Generalsuperintendenten angeordnet worden. Wiederholte Verordnungen hatten auch daran erinnert. Die Instruktion für die Oberschulkollegien vom 22. Februar 1787 bestimmte ferner, daß kein Lehrer ohne ein Zeugnis des Oberkonsistoriums angestellt werden durfte.[1])

Solange eine richtige allgemein vorbildliche Prüfung für das höhere Lehramt nicht bestand, solange kann von einem besonderen Oberlehrerstand oder Philologenstand nicht die Rede sein. Philologe ist jetzt fast in ganz Deutschland außerhalb der nur einen kleinen Teil der Bevölkerung ausmachenden Universitätskreise die Bezeichnung für die akademisch gebildeten Oberlehrer der höheren Schulen. Wie schon Lietzmann[2]) hervorgehoben hat, haben in den letzten Jahren auch die

1) Vgl. L. Wiese, Preußen. Die höheren Schulen in Schmidts Encyklopädie des gesamten Erziehungs- und Unterrichtswesens. 1867. Bd. VI S. 299 ff.

2) Lietzmann, Organisation des mathematischen Unterrichts. Diese Abhandlungen Bd. 1. Heft 2 S. 35.

Mathematiker und Naturwissenschaftler um der Einheit des Standes willen diesem Sprachgebrauch, der geschichtlich durchaus berechtigt ist, sich meistens gefügt. Man braucht nicht auf Eratostenes, den Mathematiker, zurückzugehen, der als erster sich in seiner Eigenschaft als höherer Lehrer Philologe genannt hat. Auch der Mathematiker wird gern anerkennen, daß mit dem Tage, an dem Friedrich August Wolff sich als stud. philologiae immatrikulieren ließ, trotz des Widerspruchs des Rektors[1]), auch für seine Wissenschaft und ihr selbständiges Studium auf norddeutschen Universitäten mit dem Endziel Gymnasiallehrer zu werden, die Bahn eröffnet wurde.

Die Erwägungen, die nach dem Unglücksjahre von 1806 in Preußen zur Gründung der Universität Berlin führten, als man „durch geistige Kräfte ersetzen zu müssen glaubte, was man an physischen verloren hatte“ [2]), ließen naturgemäß auch eine Reorganisation der höheren Schulen als notwendig erkennen, und da erschien als wichtigste Frage die Vorbildung der Gymnasiallehrer. So ist es denn wohl mehr als ein äußerliches Zusammentreffen, daß im Jahre 1810, dem Gründungsjahre der Berliner Universität, auch die erste Prüfungsordnung für das Lehramt an höheren Schulen veröffentlicht wurde. Es ist das Königl. Edikt datiert Berlin, den 12. Julius 1810 und lautet[3]):

Wir, Friedrich Wilhelm von Gottes Gnaden, König von Preußen, Markgraf von Brandenburg usw. thun kund, daß Wir, um dem Eindringen untüchtiger Subjekte in das Erziehungs- und Unterrichtswesen des Staates vorzubeugen, beschlossen haben, eine ähnliche allgemeine Prüfung für diejenigen, welche sich demselben widmen wollen, einzuführen, wie für die Kandidaten des Predigtamts stattfindet. Wir setzen demnach fest:

§ 1. Diese allgemeine Prüfung soll von den Abtheilungen der jetzt organisierten wissenschaftlichen Deputation der Sektion des öffentlichen Unterrichts im Ministerio des Innern in Berlin, Breslau und Königsberg angestellt werden, welche durch ihre Instruktion schon dazu verpflichtet, und sie unentgeltlich zu übernehmen verbunden sind.

§ 2. Sie ist bestimmt, ohne Rücksicht auf gewisse Lehrerstellen, nur die Tauglichkeit der Subjekte für die verschiedenen Arten und Grade des Unterrichts im Allgemeinen auszumitteln.

§ 3. Sie soll in der Regel bestehen in der Anfertigung schriftlicher Arbeiten, einer mündlichen Prüfung und einer Probelektion. Doch soll es der Prüfungsbehörde in jedem einzelnen Falle anheim gestellt bleiben, ob sie zu vollständiger Beurtheilung eines Kandidaten in Hinsicht auf Kenntnisse nicht nur, sondern auch auf Lehr-

---

1) „Wer auf dergleichen doctrinas philosophiae facultatis sich legen wolle, sei doch als Theologe einzuschreiben.“ Vgl. Paulsen, Geschichte des gelehrten Unterrichts. 2. Aufl. 1897, S. 223.

2) Antwort Friedrich Wilhelm III. an die Deputation Hallischer Professoren, die 1807 Gründung einer neuen Universität vorschlugen. Köpke, Gründung der Universität Berlin. 1860. S. 37.

3) Die im Abschnitt 1. und 2. dieser Abhandlung angeführten Verfügungen sind fast alle der Zusammenstellung entnommen, die Ferdinand Neigebaur herausgegeben hat unter dem Titel „Die Preußischen Gymnasien und höheren Bürgerschulen. Eine Zusammenstellung der Verordnungen, welche den höheren Unterricht in diesen Anstalten umfassen.“ Berlin, Posen, Bromberg. E. S. Mittler. 1835.

geschicklichkeit, ihn alle diese Theile der Prüfung will durchgehen, oder ob sie einen derselben, wenn auf das von ihm zu erwartende Resultat aus den übrigen mit Gewißheit sich schließen läßt, kann wegfallen lassen.

§ 4. Die Kenntnisse, welche im Allgemeinen von den angehenden Schulmännern werden gefordert werden, und auf welche vornehmlich diese Prüfung Rücksicht zu nehmen hat, sind philosophische, historische und mathematische. Jedoch soll es keinem Kandidaten verwehrt seyn, auch in anderen Fächern, denen er sich vorzüglich gewidmet hat, sich prüfen zu lassen.

§ 5. Dieser allgemein-pädagogischen Prüfung sich zu unterziehen sind gehalten und werden hierdurch angewiesen:

1. Die künftigen Lehrer an solchen öffentlichen Königlichen und Patronats-Schulen und Erziehungsanstalten, welche die Befugnis haben, Schüler zur Universität zu entlassen;

2. die künftigen Lehrer an solchen öffentlichen Königlichen und Patronats-Schulen und Erziehungsanstalten, welche ihre Schüler etwa für die zweite und dritte Klasse der obengedachten Schulen vorbereiten;

welche Schulen zu diesen beiden Klassen gehören, soll in jedem Regierungs-Departement durch namentliche Anzeige zur Kenntnis des Publikums gebracht werden.

§ 6. Folglich sind dieser Prüfung nicht unterworfen:

1. diejenigen, welche allein in den Elementarkenntnissen der Volks- und niederen Bürgerschulen, dem Lesen, Schreiben, den einfachsten Zahl- und Maßverhältnissen und den ersten Lehren der Religion, unterrichten wollen, über deren allgemeine Prüfung noch eine besondere Anordnung wird getroffen werden;

2. alle, die blos in Familien- oder Privat-Instituten Unterricht übernehmen, als welche dem Urtheil der sie wählenden Privatpersonen überlassen bleiben. Diesen wird es jedoch freigestellt, ob sie durch die verordnete allgemeine Prüfung bei den wissenschaftlichen Deputationen die gleich § 10 näher anzugebendeu Vortheile und Berechtigungen, welche aus einem günstigen Resultate derselben fließen, sich erwerben wollen.

§ 7. Junge Männer demnach, welche von der Universität zurückkommen, und dem Schulfach sich widmen, oder auch nur eine Zeitlang an den obgedachten Anstalten unterrichten wollen, werden verpflichtet, sich bei der angewiesenen Prüfungsbehörde zu melden, und diese darf keinen von sich weisen, welcher die oben bestimmte Sphäre des Unterrichts zu seinem Ziele macht.

§ 8. Von denen, welche sich dem höheren Schulunterricht widmen, sind aber der Verbindlichkeit, sich der allgemeinen Prüfung bei der wissenschaftlichen Deputation zu unterziehen, entledigt:

1. diejenigen, welche nach Einreichung einer lateinischen Dissertation und nach einer förmlichen mündlichen Prüfung bei der philosophischen Fakultät einer inländischen Universität die Doktor- oder Magisterwürde erhalten haben. Diese bedürfen keiner schriftlichen und mündlichen Prüfung bei der wissenschaftlchen Deputation mehr. Sie müssen sich nur einer Probelektion unterziehen, um sich dadurch über ihre Lehrgeschicklichkeit zu legitimieren;

2. Die Mitglieder der Seminarien für gelehrte Schulen, welchen die bei ihrem Eintritt in diese Vorbereitungsanstalten von den Direktoren derselben mit ihnen gehaltene Prüfung die Stellung der Prüfung bei der wissenschaftlichen Deputation vertritt.

§ 9. Ausgezeichnete Ausländer, die von den Unterrichtsbehörden Unseres Staates zu Lehrstellen an den in § 5 erwähnten Schulen berufen werden, sind, wie sich von selbst versteht, keiner Art von pädagogischer Prüfung unterworfen. Wenn aber Ausländer zu einer Anstellung im Schulfache sich melden, so soll nach den jedesmaligen Umständen von der Sektion des öffentlichen Unterrichts bestimmt werden, ob zu ihrer Aufnahme unter die Preußischen Schulamtskandidaten die angeordnete allgemeine Prüfung erforderlich ist.

§ 10. Jedem, vollständig oder auch nur theilweise Geprüften wird ein von dem Direktor und allen Mitgliedern der Prüfungsbehörde, welche bei seiner Prüfung zu-

gegen gewesen, unterschriebenes Zeugnis ausgestellt, das bestimmt aussagt, in welchen von den Fächern, worin er geprüft worden, und vornehmlich in welchem der drei Hauptgegenstände der Prüfung aufgestellten Fächer, Stärke oder Schwäche, und in welchem Verhältniß die Lehrgeschicklichkeit zu den Kenntnissen sich gezeigt hat, das auch den Grad der gesammten Tüchtigkeit des Geprüften durch Bezeichnung der Stufe des Unterrichts an den § 5 genannten Anstalten, wofür er sich eignen dürfte, möglichst genau angiebt.

§ 11. Die Wirkung eines solchen günstigen Zeugnisses ist, daß nur der damit Versehene unter die Schulamtskandidaten Unseres Staates gerechnet wird, daß nur ein solcher an öffentlichen gelehrten und höheren Bürgerschulen und den ihnen gleichstehenden öffentlichen Erziehungsanstalten als außerordentlicher und Hülfslehrer unterrichten, und daß kein anderer zu einer ordentlichen Anstellung an diesen Anstalten sich melden, vorgeschlagen und angenommen werden darf, daher die Prüfung, wodurch dasselbe gewonnen wird, examen pro facultate docendi genannt werden kann.

§ 12. Von den im § 8 von der allgemeinen Prüfung Ausgenommenen haben dieselbe Wirkung:

1. die Diplome und Dissertationen, womit sie als Doktoren oder Magister über ihre förmliche Promotion sich ausweisen, ergänzt durch ein Zeugniß der wissenschaftlichen Deputation über Lehrgeschicklichkeit;

2. die Zeugnisse, welche die Mitglieder der Seminarien für gelehrte Schulen über ihre beim Eintritt in dieselbe bestandene Prüfung von ihrem Direktor beibringen.

§ 13. Die in diesem vorläufigen Examen Zurückgewiesenen können stets zu demselben wieder zugelassen werden, sobald sie glauben, die an ihnen wahrgenommenen Mängel ersetzt zu haben.

§ 14. Wenn die in ihm tüchtig Befundenen und mit einem vortheilhaften Zeugniß Versehenen zu einer ordentlichen Lehrstelle in Vorschlag gebracht werden, so tritt die gewöhnliche Prüfung für diese Stelle ein, bei welcher lediglich auf die zu derselben erforderlichen Kenntnisse und Geschicklichkeiten Rücksicht genommen wird, wodurch nämlich diese Prüfung von der neu angeordneten allgemeinen sich unterscheidet.

§ 15. Von den allgemeinen, so wie von allen in der pädagogischen Laufbahn vorkommenden Prüfungen bei anderweitig bewährter Geschicklichkeit des Subjekts zu dispensieren, soll übrigens der Sektion des öffentlichen Unterrichts vorbehalten bleiben.

§ 16. Junge Männer, die der angeordneten allgemeinen Prüfung sich entweder unterziehen wollen, oder laut dieser Unserer Anordnung zu unterziehen gehalten sind, können sich bei einer der drei Abtheilungen der wissenschaftlichen Deputation, welche die Termine, wo dergleichen Gesuche am bequemsten anzubringen sind, bekannt machen werden, sofort melden.

§ 17. Allen Patronen und Vorstehern von Schulen aber wird hierdurch anbefohlen, zu keiner Anstellung an den im § 5 genannten Anstalten andere Subjekte des Inlandes in Vorschlag zu bringen, oder als außerordentliche und Hülfslehrer anzunehmen, als die entweder ein vortheilhaftes Zeugniß von der allgemeinen Prüfung, oder eine nach dem § 11 dasselbe vertretende Legitimation aufzuweisen haben. Finden sie selbst keinen dieser Art, so haben sie es den Geistlichen und Schuldeputationen der ihnen vorgesetzten respektiven Provinzial-Regierungen anzuzeigen, welche ihnen verfassungsmäßig geprüfte Subjekte bekannt machen werden.

§ 18. Da jedoch erst in einigen Jahren eine hinreichende Anzahl von geprüften Schulamtskandidaten vorhanden seyn kann, so erhält die im § 17 gegebene Verordnung erst mit dem 1. Januar 1813 gesetzliche und verbindende Kraft.

§ 19. Bis dahin soll es von jedem, welcher sich zu einer Stelle meldet, oder dazu vorgeschlagen ist, abhangen, ob er sich bei der kompetenten Behörde für die besondere Stelle, oder bei einer Abtheilung der wissenschaftlichen Deputation im Allgemeinen prüfen lassen will. Im letzteren Fall soll die allgemeine Prüfung zu-

gleich die besondere ersetzen, auch der Kandidat den Vortheil gewinnen, daß, wenn er zu einer Unterlehrerstelle vorgeschlagen ist, aber das Tüchtigkeitszeugniß zu einer Oberlehrerstelle erhält, er von dem, durch die Sektion des öffentlichen Unterrichts in der Instruktion an die Geistlichen und Schuldeputationen vom 15. September vorigen Jahres angeordneten Aszensions-Examen künftig befreit bleibt.

Nach diesen Unsern Bestimmungen haben alle, welche sie angehen, sich zu richten, und die Geistlichen und Schuldeputationen der Provinzial-Regierungen sowohl selbst in Ansehung der unmittelbar von ihnen abhangenden Schul- und Erziehungsanstalten sie wahrzunehmen, als auch über ihre Befolgung mit Ernst und Nachdruck zu halten.

Berlin, d. 12. Julius 1810.

L. S. Friedrich Wilhelm.

v. Hardenberg. v. Dohna.

Diesem Königl. Edikt war eine Verfügung vorausgegangen, die Wilhelm v. Humboldt als Chef der wissenschaftlichen Deputation am 15. September 1809 von Königsberg aus erlassen hatte, und die sich im wesentlichen mit dem späteren Edikt deckt.

Der erste, der in Preußen einer Oberlehrerprüfung sich unterzog, war Friedrich Jahn, der bekannte Turnvater, der im Alter von 32 Jahren am 9. April 1810 unter Schleiermachers Vorsitz geprüft wurde.[1]) Das Ergebnis war aber nicht sehr günstig. In Mathematik ist anscheinend nicht geprüft worden, was insofern beachtenswert ist, als durch das $\frac{1}{4}$ Jahr später veröffentlichte Edikt ausdrücklich auch mathematische Kenntnisse verlangt werden.

Der erste Mathematiker, der als solcher geprüft wurde, war Gottlob Nordmann. Er war als Oberlehrer am Friedrich-Werderschen Gymnasium in Aussicht genommen und wie Jahn schon 32 Jahre alt. Er zeichnete sich durch hervorragende mathematische Kenntnisse aus. Sein Studium hatte auch, und dies ist besonders interessant, der angewandten Mathematik gegolten. Er hat sich mit Maschinen- und Baufach beschäftigt. Auch hat er, ganz wie ein moderner Mathematiker, nicht allein auf der Universität studiert, sondern außer der Universität Halle auch die Berg-Akademie in Freiberg besucht.

Für die schriftliche Prüfung erhielt er folgende Aufgaben.

I. Aus der Mathematik:

1. Es ist ein Dreieck ABC gegeben und eine gerade Linie DE, welche ein Punkt F in zwei ihrem Verhältnis nach gegebene Teile DF und FE teilt. Man soll diese Linie DE in das gegebene Dreieck legen, so daß ihr Anfangspunkt D in den Schenkel CA, der mittlere Punkt F auf den anderen Schenkel CB fällt und der Endpunkt E der gegebenen Gerade auf die Verlängerung der dritten Seite des Dreiecks falle. Im Falle diese Aufgaben Bedingungen enthielten, die nicht ausgedrückt wären, sind diese anzugeben oder die Aufgabe ist allgemein auszudrücken, ohne ihre Natur zu ändern. Es bleibt der Willkür überlassen, die Data zu dieser Aufgabe sich so bequem, als man es geraten findet, zu geben, wofern sie nur nicht mehr bestimmen, als in der Aufgabe gestattet ist.

1) Vgl. Paul Schwartz, Die Gründung der Universität Berlin und der Anfang der Reform der höheren Schulen im Jahre 1810. Mitteilungen der Gesellschaft für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte. 20. Jahrgang, Heft 3, 1910.

2. Es ist zu untersuchen, ob ein in einer Parabel beschriebenes Dreieck besondere Eigenschaft habe.

II. Aus der Physik und Naturgeschichte:

1. Wie kam Aristoteles zu seinen Elementen?

2. Denkbarkeit und etwaige Realität kosmischer am Pendel ausgesprochener Modifikationen der Schwere.

3. Gesetze der veränderten Wärmekapazitäten der Körper bei verändertem Aggregationszustande.

4. Übersicht derjenigen Modifikationen der Zeugung, die im Tierreich bereits nachgewiesen sind.

5. Kann die Metamorphose einen Charakter abgeben, um Klassen des Tierreichs danach zu unterscheiden?

Nordmann wurde Michaelis 1810 als vierter Kollaborator am Friedrich Werderschen Gymnasium angestellt und ist bis zu dem Schuljahr 1817/18 tätig gewesen. Im Schulprogramm von 1818 berichtet der damalige Direktor Bernhardi, daß N. das Gymnasium verlassen habe, erwähnt seine umfassende Gelehrsamkeit in den mathematischen Fächern, im Maschinenwesen, der Technologie, der Physik und der neueren Philosophie, seinen Eifer im Unterricht, seinen sanften und milden Charakter und bezeugt ihm, daß das Kollegium „mit wahrer und inniger Rührung von ihm geschieden sei“[1]). Zu den Schülern Nordmanns gehörte auch der große Königsberger Physiker Franz Neumann, der als Student seinen Lehrer besuchte, wenn er Rat oder Bücher brauchte. Nordmann ist später nach Amerika gegangen, und Neumanns Freude war groß, so oft er eine Nachricht von ihm erhielt[2]).

1) Nach einer brieflichen Mitteilung des jetzigen Bibliothekars des Friedrich-Werderschen Gymnasiums Professor Dr. Nottebohm.

2) Luise Neumann, Franz Neumann, Erinnerungsblätter Tübingen u. Leipzig, J. C. B. Mohr, 1904 S. 79. Dort sind auch aus den Lebenserinnerungen zweier Mitschüler Neumanns, die als Schriftsteller bekannt wurden, folgende Urteile über Nordmann abgedruckt: Willibald Alexis schreibt in seinen Erinnerungen:

„Neumann wurde wegen seiner Neigung und Anlagen für die Mathematik der Mathematikus genannt. Wir sämtlich, in unserer Klasse, nicht von denselben Anlagen und noch weniger Eifer für die arithmetischen und mathematischen Studien erfüllt, ließen ihn für uns lernen, Fortschritte machen und – antworten. Der Lehrer Dr. Nordmann, selbst ein ausgezeichneter Mathematiker, war auch ganz damit zufrieden gewesen, und ein stiller Pakt hatte abgewaltet, daß wir uns gegenseitig nicht genierten. Dem Lehrer war seine Wissenschaft zu lieb und zu heilig, als daß er sie uns, die wir unwürdig uns gegen sie sträubten, hätte aufdringen sollen. ‚Meine Mathematik ist viel zu gut für die Jungen!‘ pflegte er zu seinem Vertrauten zu sagen. Uns überließ er unseren Gedanken und Spielereien, und für sich und seinen Lieblingsschüler war die mathematische Stunde ein Privatissimum, in welchem beide wetteiferten, die Wissenschaft zu fördern.“

In den Lebenserinnerungen von Rellstab heißt es:

„Mein Lehrer in Kleintertia des Werderschen Gymnasiums, Dr. Nordmann, bildete das Hindernis für mich in der Mathematik, nämlich in dem algebraischen Teil, fortzuschreiten. Er war, aller Urteile zufolge – und selbst der Schüler empfand dies – ein vortrefflicher, gründlicher Mathematiker, bei weitem gründlicher als sein Kollege, Professor Zimmermann, der die Geometrie vortrug, während jenem das ganze Gebiet der Algebra blieb. Dieses aber, an sich schon schwieriger, wußte er durchaus nicht faßlich für seine Schüler zu behandeln. Es waren nur sehr wenige,

Eine ergänzende Verfügung vom 10. Dezember 1811, veranlaßt durch eine Anfrage der Pommerschen Regierung, definiert wohl zum erstenmal den Begriff Oberlehrer.

„Unter Oberlehrer sind diejenigen zu verstehen, welche in solchen Klassen lehren, deren Unterrichtsgegenstände über das Gebiet solcher Schulen, die den Gymnasien nicht gleich geachtet werden, hinausgehen, eine Bestimmung, über deren richtige Anwendung in jedem einzelnen Falle keine Bedenklichkeit entstehen kann. Nun ist aber ein Hilfslehrer ein solcher, welcher überall, wo zufällig Lücken entstehen, soll gebraucht werden können, welcher also auch in jenen oberen Klassen zu unterrichten die Fähigkeit habe und mithin gleich anfänglich nach derselben und nicht nach dem Maßstab eines Unterlehrers geprüft werden muß."

Man beachte, wie in dieser Definition die späteren Oberlehrer an den Realgymnasien und Oberrealschulen mit einbegriffen sind.

Eine genauere Fassung dessen, was in der Prüfung zu fordern ist, unterblieb noch zwei Jahrzehnte. Auch ist von einer Spezialisierung nach Fächern zunächst noch nicht die Rede.

Nur wird in steigendem Maße auf die Philosophie und Theologie Wert gelegt unter dem ersichtlichen Einflusse von Hegel. Eine charakteristische Verfügung des Ministeriums sei hier mitgeteilt, da sie für die Mathematik auch in Betracht kommt. Sie ist am 21. August 1824 an die Konsistorien ergangen, unter denen damals die höheren Schulen noch standen. Erst im folgenden Jahre wurden die Provinzialschulkollegien selbständige Behörden.

„Das Ministerium hat mit Mißfallen bemerkt, daß seit einiger Zeit diejenigen inländischen Studierenden, welche sich dem gelehrten Schulfache widmen wollen, auf einigen Universitäten mit einer nicht zu billigenden Einseitigkeit fast ausschließlich nur philologische Studien betreiben und das Studium nicht nur der Philosophie, sondern auch das der für einen jeden Gymnasiallehrer unentbehrlichen theologischen und historischen Disziplinen fast gänzlich vernachlässigen. Um dahin zu wirken, daß die oben gedachten Studierenden sich künftig auf den Universitäten auch mit der Philosophie ernstlich beschäftigen, sind sämtliche Königl. wissenschaftliche Prüfungskommissionen angewiesen, von jetzt an die Prüfung der Schulamtskandidaten auch auf die Kenntnisse derselben in der Philosophie, und namentlich in der Logik und Metaphysik, in der Psychologie und in der Geschichte der Philosophie, sowie in der Geschichte auszudehnen, und das Ergebnis der desfallsigen Prüfung nicht nur in dem Zeugnisse jedesmal ausdrücklich zu bestimmen, sondern dasselbe auch in den jährlich an das Ministerium einzureichenden Tabellen über die geprüften Schulamtskandidaten unter einer besonderen Rubrik anzumerken.

Noch wichtiger erscheint es aber dem Ministerio, geeignete Maßregeln zu treffen, daß diejenigen inländischen Studierenden, welche sich dem gelehrten Schulfache an evangelischen Gymnasien widmen wollen, nicht länger die für jeden Gymnasiallehrer unentbehrlichen theologischen Disziplinen vernachlässigen, sondern sich vielmehr schon auf der Universität diejenigen Kenntnisse in der Theologie, und namentlich in der Exegese des Alten und Neuen Testaments, in der Dogmatik und christlichen Moral und in der Kirchengeschichte aneignen, welche zur Erteilung eines gründlichen und zweckmäßigen evangelischen Religionsunterrichts in den

---

eigentlich nur ein Schüler, sogar in Sekunda, der ihm ganz folgen konnte. Dieser eine Schüler hieß Neumann, hatte die entschiedensten Anlagen für Mathematik, war überhaupt einer der trefflichsten Charaktere, von uns allen hoch in Ehren gehalten."

evangelischen Gymnasien erforderlich sind, und von jedem Gymnasiallehrer, auch wenn er sich nicht für den Religionsunterricht bestimmen will, mit Grund gefordert werden können.

Ferner wird das Königl. Konsistorium beauftragt, bei seinen Vorschlägen die Besetzung von Lehrstellen und besonders von den Direktorstellen an evangelischen Gymnasien betreffend, vorzüglich diejenigen Kandidaten zu berücksichtigen, welche außer den übrigen erforderlichen Kenntnissen und Geschicklichkeiten auch eine gründliche theologische Bildung besitzen.

Und ähnlich wird in einer an die Prüfungskommission gerichteten Verfügung vom gleichen Tage auf die Notwendigkeit eines gründlichen Studiums der Philosophie hingewiesen, dem die „seichten und oberflächlichen Philosophismen der neuen Zeit, die verwirrende Afterphilosophie“ weichen müssen. Ebenso soll in der Prüfung auch auf ein geschichtliches Studium mehr geachtet werden.

Als eine wissenschaftliche Prüfungskommission dagegen Bedenken erhob, erfolgte ein ausführliches Reskript, betreffend die Prüfung über philosophische Gegenstände. Zum erstenmal erfahren wir darin auch etwas über die Zeit, die bei der Prüfung auf die Philosophie verwandt wurde.

Es heißt: „Die zufolge des Berichtes bisher verwandte Zeit von 1—1½ Stunde wird, wenn der Examinator seinem Geschäfte ganz gewachsen ist und in Verbindung mit der vorhergegangenen schriftlichen Prüfung, welche gleichfalls auf das philosophische Wissen des Examinanden Rücksicht nehmen kann und soll, auch künftig ausreichen und der Königl. wissenschaftlichen Prüfungskommission zu einem gründlichen Urteile über die philosophische Bildung der Examinanden und über ihre Kenntnisse in den nachgedachten philosophischen Disziplinen die erforderlichen Daten liefern, so daß aus diesem Grunde eine Verlängerung des Examens nicht für nötig erachtet werden kann“. Schon regen sich auch Zweifel, ein so umfassendes Studium der Philosophie von einem jungen Mann zu verlangen, an den noch anderweitig sehr schwer zu erfüllende Forderungen gestellt werden.

Diesem Zweifel begegnet das Ministerium mit dem Hinweise auf die durch § 14 des Edikts vom 12. Juli 1810 angeordnete Prüfung pro loco, wodurch „den Subjekten hinreichende Zeit und Gelegenheit gelassen ist, um die Lücken, welche bei der ersten allgemeinen Prüfung hinsichtlich ihrer philosophischen, historischen und mathematischen Kenntnisse wahr genommen werden, gehörig auszufüllen“.

Es ist also hier an eine Trennung der Prüfung in anderem Sinne gedacht, als sie später von Schrader und andern vorgeschlagen ist. Die Hauptsache ist immer noch für jeden die Philosophie, der das einzelne Fach sich unterzuordnen hat.

2. Die Prüfungsordnung von 1831.

Aber immer stärker werden die Einzelwissenschaften, insbesondere die alte Philologie an den Universitäten gepflegt. Im Ministerium wirkte

seit 1818 Johannes Schulze, dessen Auffassung von der Aufgabe der höheren Schulen man am einfachsten durch die Frage charakterisieren kann, die er zu stellen pflegte, wenn jemand als Direktor vorgeschlagen wurde: Was hat der Mann geschrieben?[1])

Unter Schulze ist das erste genauere Prüfungsreglement erschienen am 18. Juni 1831. Fußend auf den Gutachten, zu denen die wissenschaftlichen Prüfungskommissionen 1827 aufgefordert waren, hat Schulze das ganze Reglement selbst entworfen. Der Minister Altenstein war mit „dieser schwierigen und verdienstlichen Arbeit im wesentlichen einverstanden". Er wünscht aber eine Form, „die eine Sanktion durch den König unnötig macht"[2]). Das ist auch bei allen folgenden Prüfungsordnungen beobachtet worden; sie haben den Charakter einer ministeriellen Verfügung, sind aber keine Gesetze.

Dieses Reglement unterscheidet in § 4 vier Arten von Prüfungen, 1. pro facultate docendi, 2. pro loco, 3. pro ascensione, 4. colloquia pro rectoratu.

Über Zweck und Gegenstände der Prüfung pro facultate docendi belehrt § 5:

Die Prüfung soll die Tüchtigkeit der Kandidaten für die verschiedenen Stufen und Fächer des Unterrichts bloß im allgemeinen und ohne Rücksicht auf eine besondere Lehrstelle ermitteln. Dieser Zweck soll das speziellere Eingehen in diejenigen Fächer, mit welchen ein Kandidat sich vorzugsweise beschäftigt und für welche er sich bestimmt hat, nicht ausschließen. – Die Prüfung bezieht sich auf die Kenntnisse der Kandidaten.

A. in den Sprachen und zwar:

a) in dem Deutschen, b) dem Griechischen, c) dem Lateinischen, d) dem Französischen, e) dem Hebräischen;

B. in den Wissenschaften, und zwar:

a) der Mathematik, Physik und Naturgeschichte, b) der Geschichte und Geographie mit Rücksicht auf die Hauptgegenstände der Antiquitäten, der Mythologie und der Geschichte der Literatur der Griechen und Römer, c) der Philosophie und Pädagogik, d) der Theologie.

Den Kandidaten, welche sich vorzugsweise der Mathematik und der Naturwissenschaft gewidmet haben und künftig nur an höhern

1) Im Gegensatz dazu betont die spätere Rheinische Direktoreninstruktion, daß literarische Tätigkeit keinen ausschlaggebenden Einfluß auf die Beförderung zum Direktor habe. In der neuen für ganz Preußen gültigen Dienstanweisung vom 12. Dezember 1910, durch die alle bisherigen außer Kraft gesetzt sind, ist darüber nichts gesagt. In den statistischen Personalbogen, die seit zwölf Jahren für den preußischeu Philologen vom Tage der „Anstellungsfähigkeit" (vgl. S. 107 dieser Abhandlung) an bei den Akten der Schule, beim Provinzialschulkollegium, im Ministerium und im statistischen Amt angelegt werden, sind auch die wissenschaftlichen Veröffentlichungen aufzunehmen.

2) C. Varrentrapp, Johannes Schulze und das preußische Unterrichtswesen in seiner Zeit. 1889. B. G. Teubner, S. 393.

Bürger- und Realschulen als Lehrer zu wirken beabsichtigen, kann, wenn sie es wünschen, die Prüfung in der griechischen und hebräischen Sprache erlassen werden.

Bei der Meldung ist der Nachweis des triennium academicum zu erbringen; der Lebenslauf ist in lateinischer Sprache abzufassen. Von den Kandidaten, welche sich vorzugsweise der Mathematik und den Naturwissenschaften gewidmet haben, und künftig an Bürger- und Realschulen unterrichten wollen, kann dieser Lebenslauf auch in französischer Sprache abgefaßt sein. Die Prüfung besteht aus 2—3 schriftlichen Arbeiten, die innerhalb einer von der wissenschaftlichen Prüfungskommission festzusetzenden Frist mit Angabe der benutzten Hilfsmittel einzureichen sind, aus mehreren Probelektionen und einer mündlichen Prüfung. Die meisten Prüfungkommissionen setzten eine Frist von 6 Monaten fest. Nur die Hallische Prüfungskommission hatte 2 Monate bestimmt. Durch Erlaß vom 19. Mai 1833 wird ihr empfohlen, einen längeren Termin festzusetzen; so sei zu hoffen, daß die Examinanden in Halle rechtzeitig ihre Arbeiten abliefern. Aus demselben erfährt man auch, daß die Hallische Kommission im Gegensatz zu allen anderen bei dem einmal gestellten Thema verharrte und auf die Wünsche der Kandidaten, das Thema zu ändern, nicht einging, was das Ministerium nicht billigte. „Denn da bei der Erteilung des Thema die Examinanden der Königl. wissenschaftlichen Prüfungskommission in der Regel nur aus dem vorliegenden curriculo vitae bekannt sind, und aus diesen nur in seltenen Fällen die ganze Richtung ihrer wissenschaftlichen Bildung und der ungefähre Umfang ihrer Kenntnisse genügend beurteilt werden kann, um ihnen danach die für sie passenden Themata auswählen zu können, so kann es leicht geschehen, daß ihnen entweder ein zu leichtes oder ein zu schweres Thema, oder ein für sie ganz unlösbares Thema erteilt wird. Wenn nun die Königl. wissenschaftliche Prüfungskommission in einem solchen Falle bei dem gegebenen Thema beharren wollte, so würde sie sich dadurch eines der besten Mittel, die Kenntnisse der Kandidaten kennen zu lernen, zum Teil oder ganz berauben, was gewiß keineswegs der Idee der Prüfung gemäß ist". Ohne Genehmigung des Ministeriums darf kein Teil erlassen werden. Nur wer an einer preußischen Universität die Doktor- oder Magisterwürde auf Grund einer förmlichen mündlichen Prüfung nach öffentlicher Verteidigung einer in lateinischer Sprache abgefaßten Inauguraldissertation erhalten hat, ist von der schriftlichen Prüfung befreit. Falls ein zum Doktor promovierter, in den Probelektionen oder in der mündlichen Prüfung sich so unwissend zeigt, daß er vorläufig zurückgewiesen werden muß, so ist ein solcher Fall dem Ministerium unvorzüglich anzuzeigen. Von den schriftlichen Arbeiten muß wenigstens eine lateinisch abgefaßt sein. Jedoch ist den Kandidaten, welche sich ausschließlich für das Lehrfach der Mathematik und Naturwissenschaften an eine höhere Bürger- und Realschule be-

stimmen wollen, auf ihren Wunsch die französische Sprache zu gestatten.

Der schriftlichen Prüfung folgten Probelektionen, in der Regel über philosophische, mathematische oder historische Gegenstände, und schließlich die mündliche Prüfung, über die es in § 12 heißt:

In der mündlichen Prüfung ist auszumitteln, ob der Kandidat philologische, mathematische, historische, naturwissenschaftliche, theologische und philosophische Kenntnisse in einem für den Zweck des höheren Schulunterrichts genügenden Maße und Umfange besitzt, und wenn gleich nicht erwartet werden kann, daß ein Kandidat in allen genannten Fächern etwas Vorzügliches leiste, so soll doch in allen so weit geprüft werden, als erforderlich ist, um den Standpunkt seiner Kenntnisse in jedem dieser Fächer beurteilen zu können. Auf die schriftlichen Arbeiten und Probelektionen soll sich die mündliche Prüfung nur in soweit beziehen, als es nötig ist, um zu beurteilen, ob die eingereichten Arbeiten ohne fremde Hilfe gemacht, und ob die darin etwa bemerkten Verstöße bloß als Übereilungen oder als Zeichen wirklicher Unwissenheit zu betrachten sind. Der Teil der mündlichen Prüfung, welcher sich auf die Kenntnisse der Kandidaten in der klassischen Philologie bezieht, muß stets in lateinischer Sprache gehalten werden.

Eine „unbedingte facultas docendi" soll nach § 16 nur demjenigen erteilt werden, welcher außer einer genügenden, wenn auch noch nicht ausgebildeten Lehrgabe, wenigstens in einem der drei wesentlichen Stücke des höheren Schulunterrichts, d. h. 1. in den beiden alten Sprachen und in der Muttersprache; 2. in der Mathematik und den Naturwissenschaften und 3. in der Geschichte und Geographie des Stoffes so weit mächtig ist, um bei gehöriger Vorbereitung diesen Gegenstand in einer der beiden oberen Klassen eines Gymnasiums mit Erfolg lehren, mit allen übrigen Gegenständen der Prüfung aber so weit bekannt ist, um ihr Verhältnis zu den übrigen Lehrgegenständen und ihre relative Wichtigkeit richtig würdigen und auf die Gesamtbildung der Schüler wohltätig einwirken zu können. Diejenigen Kandidaten, welche bei der Anmeldung zur Prüfung erklären, daß sie entweder mit beiden alten klassischen Sprachen, oder mit der Mathematik und Physik, oder mit der Geschichte und Geographie ganz unbekannt sind, und die Prüfung darin ablehnen, müssen von der Königl. wissenschaftlichen Prüfungskommission angewiesen werden, diesem Mangel vor ihrer Zulassung zur Prüfung abzuhelfen.

In den einzelnen Fächern wird, soweit die Mathematiker in Betracht kommen, folgendes gefordert.

§ 17 . . . Von den Kandidaten, welche gar keinen philologischen Unterricht erteilen, und künftig nur an höheren Bürger- und Realschulen als Lehrer wirken wollen, muß doch die Fähigkeit, ein lateinisches Buch zu verstehen, gefordert werden.

Im Französischen ist von einem jeden, wenn er auch nicht in dieser Sprache unterrichten will, Kenntnis der Grammatik und die Fertigkeit zu verlangen, einen Dichter oder Prosaisten mit Geläufigkeit zu übersetzen.

Die allgemeinen Anforderungen insbesondere in den alten Sprachen haben eine beachtenswerte Erläuterung in einer an das Provinzial-Schulkollegium in Münster gerichteten Verfügung vom 9. August 1831 erhalten. Es heißt darin u. a.

Die Bestimmung, daß der Kandidat mit allen übrigen Gegenständen der Prüfung soweit bekannt sein muß, um ihr Verhältnis zu den übrigen Lehrgegenständen und ihre relative Wichtigkeit richtig würdigen und auf die Gesamtbildung der Schüler wohltätig einwirken zu können, ist mit Vorbedacht so allgemein gehalten, weil nicht selten Fälle vorkommen werden, wo ein Kandidat vorzüglich befähigt ist, z. B. den Unterricht in der Mathematik und den Naturwissenschaften mit Erfolg in den beiden oberen Klassen zu übernehmen, ohne doch z. B. im Griechischen und Lateinischen die Kenntnisse zu besitzen, die von einem Lehrer der unteren Klassen gefordert werden. Bei dieser Bestimmung hat das Ministerium überhaupt nur die Absicht gehabt, der völligen Unwissenheit der Schulamtskandidaten in einem der drei wesentlichen Stücke des höheren Schulunterrichts, wie sie zeither nicht selten stattgefunden hat, in Zukunft vorzubeugen. Zwischen dieser Unwissenheit und der Fähigkeit, in einem der drei wesentlichen Stücke des höheren Schulunterrichts einen Lehrer der unteren Klassen abgeben zu können, waltet noch ein großer Unterschied ob, und das Ministerium kann sich daher zu der von dem Kgl. Provinzialschulkollegium proponierten näheren Erklärung der in Frage gestellten Bestimmung um so weniger veranlaßt sehen, als sich von der Einsicht und dem Pflichteifer der wissenschaftlichen Prüfungskommission nicht erwarten läßt, daß sie die Absicht der fraglichen Bestimmung mißverstehen, oder gar umgehen werden.

Die von dem Kgl. Provinzialschulkollegio in Antrag gebrachte nähere Erläuterung der Bestimmung, daß von den Kandidaten, welche gar keinen philologischen Unterricht erteilen und nur an höheren Bürger- und Realschulen als Lehrer wirken wollen, statt der Fähigkeit, ein lateinisches Buch zu verstehen, gefordert werden solle, daß sie wenigstens die Schriftsteller verstehen, deren Verständnis von den Lehrern der unteren Klassen eines Gymnasii gefordert wird, ist ganz unzweckmäßig. Die Lehrer an den höheren Bürger- und Realschulen, welche gar keinen philologischen Unterricht erteilen wollen, sollen nach der Absicht, welche das Ministerium bei der gedachten Bestimmung gehabt hat, imstande sein, lateinisch geschriebene Bücher ihres speziellen Fachs, nicht aber die in den unteren Klassen der Gymnasien üblichen Schriftsteller verstehen, deren richtige Erklärung eine ganz andere Bildung erfordert, als z. B. von einem Lehrer der Naturwissenschaften oder der Mathematik an einer höheren Bürger- oder Realschule erwartet wird.

In Geschichte und Geographie genügt bei denen, welche gar keinen historischen oder geographischen Unterricht erteilen wollen, eine durch Chronologie und Geographie begründete Übersicht der allgemeinen Geschichte, wie sie von einem wissenschaftlich gebildeten Mann erwartet werden kann.

In Mathematik und Naturwissenschaften wird nach § 19 verlangt:

„Zum Unterricht in der Mathematik in den unteren Klassen ist Kenntnis der Elementargeometrie, der gemeinen Arithmetik und der Buchstabenrechnung, für die mittleren Klassen aber gründliche Kenntnis der Geometrie, einschließlich der ebenen Trigonometrie und der allgemeinen Rechenkunst erforderlich. Die Befähigung zum Unterrichte in der Mathematik in den oberen Klassen ist nur dem Kandidaten zu erteilen, welcher sich in der Prüfung als einen mehr ausgebildeten Mathematiker zeigt und in die höhere Geometrie, die Analyse des Unendlichen und die höhere Mechanik so weit eingedrungen ist, daß er für tüchtig gehalten werden kann, Anwendungen der Mathematik auf Astronomie und Physik mit Erfolg zu machen. Auch muß er wegen der genauen Verbindung, in welcher die Physik zur Mathematik steht,

mit der ersteren so weit vertraut sein, daß er dieselbe in den beiden oberen Klassen vortragen kann. Über die zum Unterrichte in den Naturwissenschaften erforderlichen Kenntnisse und Fertigkeiten wird das Ministerium ein besonderes Reglement erlassen und beschränkt sich für jetzt auf die Bestimmung, daß für den Unterricht in den unteren Klassen Kenntnis der Zoologie, Botanik und Mineralogie, doch ohne Durchführung einer systematischen Anordnung genügend, für den Unterricht in den mittleren Klassen, außer einem reichen und systematisch geordneten Wissen in Zoologie, Botanik und Mineralogie, noch die Kenntnis der naturwissenschaftlichen Anthropologie und physischen Geographie, und endlich für den Unterricht in den oberen Klassen eine wissenschaftlich begründete Kenntnis der Physik zu verlangen ist. Von den Kandidaten, welche in der Mathematik, Physik und Naturbeschreibung gar keinen Unterricht erteilen wollen, ist dennoch die Kenntnis der eben gedachten Wissenschaften insoweit zu fordern, als es nötig ist, um den Zusammenhang des mathematischen, physikalischen und naturhistorischen Studiums mit der Gesamtbildung des Menschen und das Verhältnis dieser Wissenschaften zu anderen Lehrgegenständen einzusehen und richtig zu würdigen."

Die mathematischen Anforderungen sind für eine Lehrbefähigung in den mittleren Klassen noch sehr gering. Für die Anforderungen für eine Lehrbefähigung in den oberen Klassen erscheint der ausdrückliche Hinweis auf die Anwendung der Mathematik in der Astronomie beachtenswert.

Weiter wurde noch jeder Kandidat in Philosophie und Pädagogik geprüft. In diesen Fächern wird nach § 20 verlangt:

Von jedem Kandidaten, auch wenn er nur in den unteren Klassen zu unterrichten gedenkt, ist Kenntnis der Logik, der Psychologie und der Geschichte der Philosophie, und Bekanntschaft mit der wissenschaftlichen Pädagogik zu fordern. Außerdem muß sich vor allen Dingen in den Probelektionen des Kandidaten ein munterer Ton, eine gewandte, sichere Sprache, ein klares Hervorheben der Hauptpunkte, besonnenes Anknüpfen jedes Folgenden an das Vorhergehende, ein natürliches, einfaches Betragen und ein kräftiges Ergreifen einer ganzen Knabenmasse kundgeben. Obwohl in mittleren Klassen die oben bezeichneten pädagogischen Talente durchaus nicht vermißt werden dürfen, so wird doch bei den Kandidaten, welche den Unterricht in diesen Klassen beabsichtigen, noch viel ernstlicher, als bei denen, die nur in unteren Klassen lehren wollen, auf bestimmte philosophische Einsicht und wissenschaftliche Ableitung pädagogischer Maßregeln zu dringen und insbesondere mittelst der aus der Geschichte der Philosophie, der Logik und der Psychologie an den Examinanden zu richtenden Fragen zu erforschen sein, ob er dasjenige, was er auf der Universität in philosophischen Vorträgen gehört, sich auch wahrhaft innerlich angeeignet habe, und ob in seinem Denken die gehörige Gründlichkeit, Klarheit und Ordnung herrsche. Von den Kandidaten, welche auf den Unterricht in den oberen Klassen der Gymnasien und auf die Leitung der für dieselben angeordneten philosophischen Vorbereitungsstudien Anspruch machen wollen, ist, außer einer genauen Kenntnis der Unterrichtswissenschaft und einer kritischen Würdigung der verschiedenen Lehr- und Erziehungssysteme auch noch zu fordern, daß sie den Inhalt der Logik und Metaphysik und Psychologie wissenschaftlich entwickeln können, und mit einer allgemeinen Kenntnis der Geschichte der Philo-

sophie und der verschiedenen philosophischen Systeme nach ihren charakteristischen Eigentümlichkeiten eine genauere Bekanntschaft mit den Gestaltungen verbinden, welche die Philosophie durch und seit Kant erfahren hat.

Und schließlich ist nach § 21 von denjenigen Kandidaten, welche entweder gar nicht oder nur in den unteren Klassen Religionsunterricht erteilen wollen, die Bekanntschaft mit dem Inhalte der heiligen Schrift und diejenigen Kenntnisse der christlichen Glaubens- und Sittenlehre sowie des bestehenden kirchlichen Verhältnisses zu fordern, welche nach dem Standpunkt ihrer übrigen Bildung zu erwarten ist.

„Bedingte Fakultas" erhält, wer zwar in einem Fache die Lehrbefähigung für die beiden oberen Klassen sich erwarb, „dagegen aber in einem oder in mehreren Gegenständen auch nicht diejenige Forderung befriedigt, welche um der allgemeinen Zwecke der höheren Schulbildung willen von jedem Lehrer verlangt werden müssen."

Die Bedingung bestand darin, daß er die bestimmt angegebenen Mängel seiner wissenschaftlichen Ausbildung nachhole. Bedingte Fakultas erhielt auch der, dem nur für mittlere oder untere Klassen eine Lehrbefähigung zugesprochen wurde.

Das Zeugnis war ausführlich zu halten; es ist anzugeben, „das Verhältnis, in welchem sich die Lehrgeschicklichkeit des Kandidaten zu den Kenntnissen gezeigt hat und die etwaigen Lücken und Mängel, welche in seiner wissenschaftlichen Ausbildung und in seinen Kenntnissen gemacht worden sind.

Zeugnisse aus Bonn und Berlin mögen zur Erläuterung dienen. Dabei sind ebenso wie bei den weiter unten mitgeteilten Zeugnissen die Namen der Mitglieder der Prüfungskommission mit abgedruckt, da ihnen doch ein geschichtliches Interesse zukommt.

1. Am 6. November und den folgenden Tagen wurde auf eigenes Ansuchen der Studiosus der Mathematik und Physik X. Y. der Prüfung pro facultate docendi unterzogen. Derselbe ist evangelischer Konfession und der Sohn des Y. zu Z., wo er am 10. August 1817 geboren wurde. Nachdem er das dortige Gymnasium besucht und mit dem Zeugnisse der Reife verlassen hatte, bezog er im Herbst 1836 die Universität Bonn, um sich dem Studium der Mathematik, Physik und Naturwissenschaften zu widmen. Nach Vollendung des Triennii academici meldete sich derselbe zur Prüfung pro Doctoratu bei der hiesigen Philosophischen Fakultät und bestand dieselbe „multa cum laude". Aus diesem Grunde wurden ihm auch die schriftlichen Probearbeiten erlassen.

Das über die mündliche Prüfung aufgenommene Protokoll gibt folgende Resultate:

In der physikalischen Prüfung bezogen sich die Fragen auf den Elektromagnetismus und seine Anwendung als bewegende Kraft, auf den Unterschied der Natur des Eisens in Beziehung auf Magnetismus der Lage, konsekutive Punkte etc., ferner auf die Lehre vom Lichte, auf physiologische Erscheinungen, Beugungen und Interferenz, Polarisation, die Wellentheorie, Historisches über Newton, Grimaldi, Young, Malus, Fresnel etc. Überall zeigte sich Kandidat wohl vertraut und daß er die physikalischen Lehren in seinem Geiste verarbeitet hat. Nur zuweilen wurde es ihm nicht leicht, sogleich den rechten Ausdruck zu finden.

Zur mathematischen Prüfung wurde dem Kandidaten eine Aufgabe der Mechanik, deren Behandlung mehrfache Integrationen erforderte, vorgelegt. Derselbe zeigte hierbei große Vertrautheit mit dem Gegenstande und Fertigkeit. Dann folgte eine

Reihe von Fragen über Gegenstände der analytischen Geometrie, der Theorie der Gleichungen und der höheren Analysis, die alle genügend beantwortet wurden.

Die Probelektion wurde in der Prima des hiesigen Gymnasiums gehalten. Kandidat zeigte hierbei eine gute Lehrgabe; namentlich wußte er sich geschickt zu fassen, als er fand, daß der Standpunkt der Klasse weit hinter seinen Erwartungen zurückblieb.

In der Prüfung über Philosophie und Pädagogik genügte der Kandidat den allgemeinen Anforderungen.

Dasselbe Resultat gewährte die Prüfung in den beiden alten Sprachen. Kandidat zeigte Einsicht und richtiges Verständnis der ihm vorgelegten Schriftsteller.

Die historisch-geographische Prüfung zeigte, daß der Kandidat sich hier zwar weder umfassende noch eigentlich gelehrte Kenntnisse erworben hat, daß ihm aber die allgemeinen Umrisse der Begebenheiten mit vieler Sicherheit gegenwärtig sind.

Im Französischen übersetzte er eine ihm vorgelegte prosaische Stelle mit Geläufigkeit.

In der Prüfung über Botanik zeigte der Kandidat übersichtliche Kenntnisse und würde, bei sorgfältiger Vorbereitung, dieses Fach in den unteren Klassen übernehmen können. Hinsichtlich der Zoologie und Mineralogie erklärte derselbe, daß er sich keine Kenntnisse in diesen Zweigen der Naturkunde erworben habe.

Dem Gesagten zufolge erklären wir mit Vergnügen, daß wir den Kandidaten für vollkommen befähigt halten, in allen Klassen eines Gymnasiums oder einer höheren Bürgerschule den Unterricht in Mathematik und Physik zu erteilen, sowie auch Geographie in den mittleren, und Geschichte und Botanik, mit gehöriger Vorbereitung, in den unteren Klassen zu lehren.

Bonn, am 21. November 1839.

Die Königliche Wissenschaftliche Prüfungskommission.

gez. Augusti. Plücker. Schopen. Loebell. Calker. Braun. Goldfuß.

---

2. Nachdem der Schulamtskandidat Herr Adolf Gustav Wilhelm Qu., im Jahre 1831 zu Gr. G. geboren, evangelischer Konfession, Sohn des Privatsekretärs Qu., von dem Gymnasium zu Bromberg im Jahre 1851 mit dem Zeugnis der Reife entlassen, und auf der Königlichen Universität hierselbst, besonders durch den Besuch mathematischer Vorlesungen weiter vorbereitet, von der unterzeichneten Kommission vorschritsmäßig pro facultate docendi geprüft worden ist, so wird ihm darüber nachstehendes Zeugnis erteilt.

Die physikalische Arbeit des Kandidaten über den Einfluß der Mathematik auf die Physik, war mit vieler Sachkenntnis und mit lebhafter Teilnahme für den Gegenstand geschrieben, also in jeder Beziehung als wohlgelungen zu bezeichnen.

Die mathematische Arbeit, über ein Problem der Mechanik, bewies die guten und gründlichen Kenntnisse des Verfassers in dieser Wissenschaft.

In der mathematischen und physikalischen Probelektion, welche der Kandidat in der Prima abhielt, behandelte er den Lehrstoff auf eine umsichtige und verständige Weise. Der Vortrag war ruhig und besonnen, aber doch nicht ohne anregende Kraft.

In der mündlichen Prüfung zeigte sich bald, daß der Kandidat eine klare und sichere Einsicht in die verschiedenen Teile der höheren und niederen Mathematik sowie der höheren Mechanik besitzt und daß, wenn seine Kenntnisse auch nicht umfangreich zu nennen sind, er doch schnell und mit Sicherheit die Grenzen seines Wissens zu bezeichnen weiß.

In der Physik sind seine Kenntnisse ebenfalls klar und bestimmt und es ist nicht zu verkennen, wie der Examinand bemüht gewesen ist, ihnen eine gewisse Fülle und Abrundung zu geben. Es kann hiernach dem Kandidaten der Unterricht in der Mathematik und Physik durch alle Klassen eines Gymnasiums mit Aussicht auf recht günstige Erfolge anvertraut werden.[1])

---

1) Und die Erfolge dieses Kandidaten, der in einigen Monaten seinen 80. Geburtstag feiern kann, sind in der Tat ausgezeichnet gewesen.

Mit Chemie und Mineralogie hat sich der Kandidat zwar beschäftigt, lehnte jedoch in diesen Wissenschaften, sowie in der Zoologie und Botanik, die Prüfung ab.

Seine philosophischen Studien haben zwar keine bedeutende Ausdehnung, aber seine Auffassungsweise ist klar, einfach und auf das Wesentliche gerichtet. In logischen und metaphysischen Fragen bewegt er sich umsichtig und sicher. Seine Probeschrift über die Prinzipien der reinen Mathematik nach Kant hat zwar wenig Eigentümliches, aber zeigt eine klare Aneignung. In den wesentlichsten Richtungen der philosophischen Systeme und ihrem innern Zusammenhang ist er orientiert. Die wissenschaftliche Pädagogik und deren Geschichte ist ihm nicht fremd geblieben, doch wird er in die psychologische Seite der Pädagogik noch tiefer eingehen müssen.

Mit der allgemeinen Grammatik ist er soweit bekannt, daß er nach dem Stande seiner übrigen Bildung und unter Voraussetzung spezieller Vorbereitung den deutschen Unterricht zunächst bis in die mittleren Klassen wird übernehmen können.

Bei fortgesetzten philosophischen Studien wird er sich auch für die philosophische Propädeutik ohne Schwierigkeit vorbereiten können.

In der Religionswissenschaft hat der Kandidat den Anforderungen wohl genügt, welche das Reglement an solche stellt, die keine Facultas nachsuchen. In der Bibelkunde, in Glaubens- und Sittenlehre und in der Kirchengeschichte wurde die Mehrzahl der Fragen zur Zufriedenheit beantwortet. Die nicht unbedeutenden Lücken seines Wissens, welche hie und da hervortraten, wird der Kandidat auszufüllen bemüht sein müssen.

In der Geschichte und Geographie hat der Kandidat sich den Grad der Übersicht erworben, welche das Reglement von solchen fordert, die keinen Unterricht in diesen Objekten erteilen wollen.

In den alten Sprachen beabsichtigt der Kandidat nicht zu unterrichten. Im Lateinischen übersetzte er eine Stelle des Tacitus mit hinreichender Kenntnis. Die Prüfung im Griechischen lehnte er ab.

Im Französischen genügte er den allgemeinen Anforderungen; Unterricht kann er in dieser Sprache nicht erteilen.

Nach diesen Ergebnissen der Prüfung wird dem Schulamtskandidaten Herrn A. Qu. die bedingte facultas docendi erteilt und derselbe bei der Klarheit seines Wissens und Unterrichts besonders empfohlen.

Berlin, den 11. August 1856.

L. S. Königliche wissenschaftliche Prüfungskommission.

gez. Trendelenburg[1]) Meinecke Rose Schellbach[2])
Ehrenberg Hengstenberg Herrig Hirsch.

Das angekündigte Reglement für die Naturwissenschaften erschien am 14. Dezember 1839. Es wird darin in Physik verlangt:

---

1) Die Praxis wenigstens der Berliner Prüfungskommission hat sich zum großen Teil nach den Ideen gestaltet, die der Philosoph Trendelenburg, der 1836–1868 Vorsitzender war, in einen Gutachten von 1837 und im persönlichen Verkehr mit dem Minister Altenstein und mit Schulze geltend machte. Trendelenburg hat aber auch auf die Prüfung in Philosophie einen bedeutenden Einfluß ausgeübt. „Er hat philosophische Themen eingeführt, die sich an den Bildungsgang des Examinanden anschlossen; in der mündlichen Prüfung suchte er zu ermitteln, ob der Kandidat die in seiner speziellen Wissenschaft liegenden philosophischen Probleme als solche erfaßt und zu lösen versucht hat.“ Mit Entschiedenheit ist er aber auch den Bestrebungen eines Hengstenberg entgegengetreten, der aus der allgemeinen Prüfung in Religion eine Erforschung der Orthodoxie zu machen versuchte. Vgl. Bratuschek, Adolf Trendelenburg. Berlin 1873. F. Henschel.

2) Über Schellbach vgl. S. 81 und 104ff. dieser Abhandlung.

Für den Unterricht in den unteren und mittleren Klassen eine übersichtliche Kenntnis des ganzen Gebiets dieser Wissenschaft, verbunden mit einer deutlichen Einsicht in das Wesen der wichtigsten zum Leben in näherer Beziehung stehenden Naturerscheinungen und Gesetze, und die genauere Bekanntschaft mit der Einrichtung und dem Gebrauch der einfachen und gewöhnlichen physikalischen Werkzeuge. Ein vorzügliches Augenmerk ist darauf zu richten, ob die Kandidaten die Fähigkeiten besitzen die zu erläuternde Lehre an bekannte Tatsachen anzuknüpfen und durch Anwendung auf alltägliche Erscheinungen und Vorrichtungen fruchtbar zu machen, dem Verständnis durch leicht entworfene Zeichnungen an der Tafel zu Hilfe zu kommen, überhaupt den Unterricht stets anschaulich und lebendig zu erhalten und die Schüler zur Beobachtung und Kombination der Erscheinungen der Außenwelt anzuleiten. Für den Unterricht der Physik in den beiden oberen Klassen ist neben den in Obigem bezeichneten Kenntnissen und Fertigkeiten eine umfassendere und eindringliche Bekanntschaft mit allen Teilen der Physik, auch mit den neueren Entdeckungen und Hilfsmitteln, sowie mit den wichtigsten Lehren der Chemie und die Fertigkeit geeignete Lehren mathematisch zu begründen, zu verlangen.

Dieselbe Verfügung läßt auch schon eine Trennung der Mathematiker und Naturwissenschaftler zu, „weil es schwierig ist, nach den bisherigen Erfahrungen Kandidaten zu finden, die in Mathematik und Naturwissenschaften gleich tüchtig sind.“ Zur Mathematik gehört aber auch die mathematische Physik. Freilich konnte ein Kandidat, der nicht für Mathematik und Naturwissenschaft die Lehrbefähigung erhielt, nur ein Zeugnis „bedingter Fakultas“ bekommen.

Derselbe Erlaß handelt auch vom Zeichenunterricht:

Wenn sich Kandidaten finden sollten, die für den Unterricht in den Naturwissenschaften befähigt und zugleich imstande sind, den Zeichenunterricht zu übernehmen und sich hierüber vorschriftsmäßig ausweisen, so ist solches in dem ihnen zu erteilenden Zeugnis ausdrücklich zu bemerken, weil es wünschenswert ist, daß der Unterricht im Zeichnen zugleich von dem Lehrer in den Naturwissenschaften könne versehen werden.

Von einer Verbindung des Zeichnens mit der Mathematik ist noch nicht die Rede. Immerhin ist es interessant, daß man schon auch daran denkt, den Zeichenunterricht einem Oberlehrer zu übertragen. Ob unter dem verlangten vorschriftsmäßigen Ausweise das Bestehen der Zeichenlehrerprüfung auf Grund der Instruktion vom 14. März 1831 verstanden wird, ist nicht klar ausgesprochen. Weitere Verfügungen sind in dieser Sache meines Wissens nicht veröffentlicht worden.

Fünfunddreißig Jahre hatte die Prüfungsordnung Gültigkeit. Durch einen Erlaß vom 4. Februar 1838 wurde sie allerdings verschärft. Immer größeres Gewicht legte man auf die Religion und Philosophie; bei ungenügender Allgemeinbildung in diesen Fächern wurde durch den Erlaß vom 31. März 1843 die feste Anstellung versagt. Aus den Kreisen der Oberlehrer kommen immer häufiger Wünsche nach einer Änderung. Das Jahr 1848, das ja überhaupt die Geister in Deutschland erregte, ließ die ersten Versammlungen der Gymnasiallehrer entstehen zur Erörterung von Standesfragen, und auf diesen Versammlungen spielt die Frage des Staatsexamens eine wichtige Rolle. So wurden für die im Oktober 1848 angesetzte Brandenburger Provinzialversammlung, die

in Berlin zusammentrat, folgende Leitsätze von einem der eifrigsten Führer jener Tage, Mützell, aufgestellt[1]):

§ 1. Das Examen, welches die künftigen Schulmänner nach ihrer akademischen Studienzeit abzulegen haben, besteht:

1. in einem Examen über ihre philosophische Bildung und über ihr wissenschaftliches Hauptfach;

2. in einem Kolloquium über ihre allgemeine wissenschaftliche Bildung.

§ 2. Es ist wünschenswert, daß, wer jenes Examen gut besteht, damit das Recht zum Eintritt in ein pädagogisches Seminar erwerbe.

§ 3. Der Anstellung geht ein Kolloquium über pädagogische namentlich methodische Fragen voraus.

Diese Leitsätze können als typisch gelten für die Anschauungen und Forderungen, wie sie in den preußischen Provinzialversammlungen der Gymnasiallehrer in jener Zeit ausgesprochen wurden. Ganz ähnliche Forderungen erhebt z. B. die Versammlung westpreußischer Gymnasiallehrer in Marienburg am 19. Juni 1848[2]), wenn sie verlangt, daß in Zukunft keine Lehrer mehr angestellt werden sollen, die nicht die Befähigung des Unterrichts in den höheren Klassen wenigstens in einem Hauptfache nachgewiesen haben. Es ist also der wissenschaftliche Charakter der Oberlehrerbildung, der mehr oder weniger betont wird, aber im Gegensatz zu der doch mehr enzyklopädischen Anforderung der Prüfungsordnung, unter Beschränkung auf ein Hauptfach. Daneben aber erscheint auch die Frage der praktischen Ausbildung, wie sie durch § 2 und § 3 der Mützellschen Leitsätze angedeutet ist. Auf die dort genannten Seminare wie überhaupt auf die praktische Ausbildung nach dem Examen selbst wird weiter unten eingegangen. Hier handelt es sich nur darum, wie weit die Pädagogik Gegenstand der Prüfung sein soll. Die Westpreußen verlangen, daß die Prüfung der Kandidaten ebensowohl auf die pädagogische als die didaktische Bildung sich erstrecken solle, aber praktischen Schulmännern übertragen werde. Es werden Professoren für Pädagogik gefordert. Für die Brandenburger Versammlung liegt ein Antrag Bergmann vor:

Jeder, der sich für ein höheres Schulamt vorbereitet, ist gehalten, während der letzten sechs Monate vor dem Eintritt der Prüfung pro facultate docendi in den Klassen eines Gymnasiums oder einer Realschule zu hospitieren.

Im Gegensatz zu der preußischen Anschauung steht aber die Forderung, die in jenen Tagen eine in Leipzig zusammengetretene Gymnasiallehrerversammlung erhebt: Die Kandidatenprüfung ist in der Weise einzurichten, daß durch dieselbe vorzugsweise die Lehrfähigkeit der Kandidaten ermittelt wird. Demgegenüber fordern andere freilich, denen bezeichnenderweise auch Baltzer angehört, theoretische Vorbildung der Gymnasiallehrer und erst nach der Prüfung praktische Ausbildung auf dem mit einem Gymnasium der Universitätsstadt verbundenen Seminar.

1) Zeitschrift für Gymnasialwesen 1848, Jahrg. 2, Anhang S. 8.
2) Zeitschrift für Gymnasialwesen 1848, S. 680.

Wiederholt wird auf den preußischen Provinzialversammlungen dieser Zeit die Abschaffung der Prüfung pro ascensione und des Colloquium pro rectoratu gefordert als des Gymnasiallehrerstandes unwürdig.

Diese beiden Prüfungen waren, wie oben erwähnt, durch die Prüfungsordnung von 1831 nebst der Prüfung pro loco mit geregelt worden und hatten dadurch auch für die Mathematiker Bedeutung gewonnen.

Die Prüfung pro loco hat den Zweck, die Tüchtigkeit eines Kandidaten für eine bestimmte Stelle zu ermitteln. Sie ist nur auf die Lehrgegenstände zu erstrecken, worin der Kandidat in der bestimmten Stelle unterrichten soll, und sie geht in diesen Lehrgegenstand tiefer ein „als bei der Prüfung eines Kandidaten verlangt werden kann, der nur seine allgemeine Qualifikation zum Unterricht überhaupt dartun will."

Von der Mathematik handeln die §§ 28 und 29, wo es heißt:

Es ist (in dieser Prüfung) als Grundsatz anzunehmen, daß die Lehrer für die Mathematik in den oberen Klassen auch die Physik und überhaupt, wenn möglich, den Unterricht in den Naturwissenschaften übernehmen.

Bei Prüfung der an den höheren Bürger- und Realschulen anzustellenden Lehrer müssen die Forderungen in der Mathematik und den Naturwissenschaften, sowie in der Geschichte und Geographie, auch im Französischen eher gesteigert als ermäßigt, und die Forderungen in der lateinischen Sprache nie ganz erlassen werden.

Befreit von dieser Prüfung pro loco wurden auf Antrag der Königl. Provinzialbehörden vom Ministerium die Kandidaten, die innerhalb der drei ersten Jahre nach überstandener Prüfung pro facultate docendi und nach Abhaltung des vorgeschriebenen Probejahres zu einer Lehrstelle gewählt wurden, wenn ihr Zeugnis die erforderliche Tüchtigkeit erkennen ließ.

Die Prüfung pro ascensione war als Colloquium gedacht, dem sich die zu unterziehen hatten, die in eine höhere Lehrerstelle befördert werden sollten, d. h. in eine Stelle, mit Unterricht auf oberen Klassen und höherem Gehalt. Auch von dieser Prüfung konnte das Ministerium befreien.

Das Colloquium pro rectoratu hatte schließlich nach § 40 den Zweck zu ermitteln, „ob der zum Rektorat an einer höheren Schule Vorgeschlagene den Grad philosophischer, pädagogischer und wissenschaftlicher Bildung besitze, welche erfordert wird, um das Ganze einer solchen Lehranstalt gehörig zu übernehmen und zweckmäßig zu leiten".

Die Unterredung, welche teils in lateinischer, teils in deutscher Sprache zu führen ist, muß sich vorzüglich auf pädagogische und didaktische Gegenstände beziehen und dem Vorgeschlagenen Gelegenheit geben, seine Ansicht über den Begriff der Erziehung, über die höchsten Gesichtspunkte für Unterricht und Disziplin, über den Einfluß derselben auf die Bildung des Charakters, über den Zweck und die relative Wichtigkeit der einzelnen Lehrgegenstände, über das Verhältnis, in welchem das religiöse und sittliche Gefühl, der Sinn für das Schöne und das Verstandesmäßige und gedächtnismäßige Auffassen durch einzelne Lehrobjekte zu fördern sind; über die bei dem Unterricht in den einzelnen Fächern anzuwendende Methode, über Lehrpläne, Abgrenzung der Kurse nach einer gegebenen Klassenzahl, über Lehrmittel, über einzelne Disziplinareinrichtungen, über die Einwirkung der Schule auf häusliche und Volkserziehung, und das gegenseitige Verhältnis beider, über den

ganzen Standpunkt eines Direktors, sowohl in Beziehung auf die Lehrer als auf die Schüler und das Publikum und ähnliche den Wirkungskreis eines Vorstehers einer höheren Schule betreffenden Gegenständen vollständig zu entwickeln. In dem Colloquium pro rectoratu mit Männern, welche zu Vorstehern höherer Bürger- und Realschulen gewählt sind, ist besonders der Unterschied zwischen Gymnasium und Bürgerschule in Betreff des Zweckes der Lehrgegenstände und der Methode zu berücksichtigen. Es wird übrigens bei der Unterredung mehr auf Bestimmtheit und Klarheit der Antworten des zu Prüfenden, auf Sicherheit seiner Überzeugung, auf die Feinheit der Bemerkungen, auf Gewandtheit in etwa neue Vorstellungen einzugehen, auf gelegentlich sich vielleicht offenbarende Wärme für die Idee der Erziehung zu sehen sein, als gerade auf genaue Übereinstimmung mit den Ansichten des Examinators oder mit den Lehrsätzen eines bestimmten philosophischen Systems.

Die Prüfung pro loco und ascensione sind 1866 abgeschafft worden. Das Colloquium pro rectoratu ist aber bis heute offiziell noch nicht beseitigt, wenn es auch heute wohl kaum zur Anwendung kommt. Durch die Verfügung[1]) vom 21. Februar 1867 wird das Colloquium nicht mehr von der wissenschaftlichen Prüfungskommission, sondern von dem Königl. Provinzialschulkollegium abgehalten. Dieselbe sehr ausführliche Verfügung sagt ausdrücklich: es ist zu erwarten, daß es in der Regel eines Colloquium weiter nicht bedürfen würde. Interessant ist die einer früheren Auffassung entgegengesetzte, wenn es jetzt heißt: Literarische Tätigkeit und schriftstellerischer Beruf sind schätzbare Eigenschaften; entscheidend können sie für die Empfehlung zu einer Direktorstelle nicht sein.[2])

In früherer Zeit ist das Colloquium gelegentlich benutzt worden, um einen Grund der Nichtbestätigung zu finden für einen zum Direktor einer städtischen höheren Schule gewählten Oberlehrer. So ist z. B. durch mündliche Überlieferung bekannt, daß ein Mathematiker das Colloquium vor Jahrzehnten nicht bestand, weil er über die Methodik des lateinischen Unterrichtes nicht befriedigend Bescheid wußte. Er ist aber bald darauf ohne Colloquium Direktor eines großen Realgymnasiums geworden.[3])

Die Wünsche nach Änderung der Prüfungsordnung, die sehr lebhaft im Jahre 1848 ausgesprochen wurden, blieben lange unerfüllt. Aber wenn auch der lebhaften Erregung von 1848 bald eine ruhigere Zeit folgte, so drängte sich doch immer mehr die Erkenntnis auf, daß eine Änderung nötig war. Immer größer wurden die Anforderungen in den einzelnen Wissenschaften; immer mehr trat beim Studieren die Rücksicht auf die spätere praktische Tätigkeit zurück; immer mehr erwies es sich auch unmöglich, den Anforderungen auf allen Gebieten so zu genügen, wie es die Prüfungsordnung von 1831 vorschrieb.

1) Wiese-Kübler, Verordnungen und Gesetze, 2. Abt. 1888, S. 74.

2) Vgl. Anmerkung 1 S. 9 dieser Abhandlung.

3) Der Betreffende, der jetzt im Ruhestand lebt, hat mir brieflich die Tatsache bestätigt und mich ermächtigt diesen bald 40 Jahre zurückliegenden Vorgang zu veröffentlichen. Er mußte eine Stelle aus Cäsar übersetzen; veranlaßt durch das darin vorkommende Wort ephipsium wurde sogar das Griechisch herangezogen.

3. Die Prüfungsordnung in den 1864 und 1866 zu Preußen gekommenen Staaten.

Am 12. Dezember 1866 erschien endlich die längst ersehnte Prüfungsordnung. Dieses selbe Jahr hatte durch den Erfolg der kriegerischen Ereignisse Preußen zu den alten sieben wissenschaftlichen Prüfungskommissionen in Breslau, Königsberg, Berlin, Greifswald, Halle, Münster und Bonn die zwei neuen Göttingen und Marburg gebracht, während das Jahr 1864 Kiel hinzugefügt hatte. An diesen drei neuen preußisch gewordenen Universitäten hatten schon bisher Prüfungskommissionen für die Lehrer an höheren Schulen bestanden.[1]) In Kiel war im Geburtsjahr der preußischen Prüfungsordnung auch ein Examen angeordnet worden; in Göttingen bestand auf Kohlrauschs Anregung seit 1831, also dem Erscheinungsjahr des ersten preußischen Prüfungsreglements, eine wissenschaftliche Prüfungskommission. In Marburg ist das erste Reglement 1834 erschienen. Auch in der 1866 preußisch gewordenen ehemaligen freien Reichsstadt Frankfurt a. M. war 1857 eine wissenschaftliche Prüfungskommission eingerichtet worden unter dem Vorsitz des Gymnasialdirektors und mit einigen Gymnasialprofessoren als Beisitzern. Ein Mathematiker ist dort aber nicht geprüft worden.[2]) Ähnlich war es für das Fürstentum Waldeck am Gymnasium zu Corbach. Das Herzogtum Nassau hatte in Wiesbaden eine Kommission, der als Mathematiker Traugott Müller angehört hat, dem die Blüte der darstellenden Geometrie wie überhaupt der Mathematik am alten Wiesbadener Realgymnasium zu danken ist.[3]) Diese drei Kommissionen in Frankfurt, Wiesbaden und Corbach wurden natürlich 1866 aufgelöst. Von den damals außer Kraft gesetzten Prüfungsordnungen bietet die bis dahin für Göttingen gültige[4]) besonderes Interesse mit Rücksicht auf die mathematische Bedeutung, die Göttingen als Wirkungskreis von Gauß genoß. Die hannoversche Prüfungsordnung von 1831 bestätigt nun aber, was anderweitig schon bekannt ist. Die damaligen Studenten der Mathematik in Göttingen, die das höhere Lehrfach ergreifen wollten, sind durch Gauß kaum beeinflußt worden, und Gauß selbst hat wohl für die Studenten kein Interesse gehabt und damit wohl auch keine Fühlung mit dem hannoverschen Oberschulrat gesucht. Denn die Anforderungen sind in der Mathematik recht gering:

Zum Unterricht in den mittleren und unteren Klassen ist für den Lehrer eine gründliche Kenntnis der Elementarmathematik erforderlich (§ 5). Für die oberen Klassen: Kenntnis auch der höheren Teile dieser Wissenschaft.

1) Wiese, Das Höhere Schulwesen in Preußen Bd. II, S. 610ff.

2) In Frankfurt gab es damals nur ein Gymnasium. Das Prüfungsreglement ist nicht veröffentlicht worden. Es befindet sich jetzt im städtischen Archiv.

3) Vgl. über Traugott Müller einen demnächst in der Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht erscheinenden Aufsatz seines Schülers C. H. Müller.

4) Abgedruckt Zeitschrift für Gymnasialwesen, 7. Jahrgang 1853, S. 413 ff.

In den Naturwissenschaften ist dagegen für die oberen Klassen eine wissenschaftlich begründete Kenntnis der Physik erforderlich. In der beschreibenden Naturwissenschaft wird die Lehrbefähigung auch erteilt auf Grund eines Zeugnisses über die erfolgreiche Teilnahme an der naturwissenschaftlichen und mathematischen Abteilung des naturwissenschaftlichen Seminars.

Für Mathematiker war es auch gestattet, die polytechnische Schule in Hannover, und danach vielleicht eine kürzere Zeit die Universität zu besuchen.

Besonders hervorgehoben wird noch, „daß die Brauchbarkeit und Anstellungsfähigkeit auch der für die oberen Klassen approbierten Fachlehrer der Mathematik und Naturwissenschaften wesentlich erleichtert wird, wenn dieselben in der beschreibenden Naturkunde die zur Übernahme des Unterrichts erforderlichen, auf Anschauung begründeten Kenntnisse besitzen".

Erster Examinator für Mathematik war auch nicht etwa Gauß, sondern Friedrich Thibaut, der als ordentlicher Professor der Philosophie in seinen mathematischen Vorlesungen großen Zulauf hatte. Diese Vorlesungen behandelten nach dem von ihm herausgegebenen „Grundriß der reinen Mathematik zum Gebrauch bei akademischen Vorlesungen"[1]) den Lehrstoff, der heute etwa bis zum Schluß der Untersekunda der Realschulen erledigt wird. Die Art der Vorlesung ist nach mancherlei Überlieferung glänzend gewesen. Unter den Hörern waren wohl alle Fakultäten vertreten. Mein Exemplar des Grundrisses z. B. hat ein Frankfurter Mediziner, der später durch einige Artikel im Crelleschen Journal hervorgetretene Dr. Reiß einem anderen Frankfurter Mediziner geschenkt „als Erinnerung an die gemeinschaftlichen Studienjahre zu Göttingen 1815–1817". Dieser Grundriß macht es sehr wahrscheinlich, daß der Reiz und die Wirksamkeit der Thibautschen Vorlesungen in dem Hervortreten des „funktionalen Denkens" lagen. Man vergleiche z. B. S. 182, wo es heißt:

Wir wollen zuerst, nachdem die Construktion aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel als vollendet gedacht ist, Änderungen mit einer von diesen Seiten vornehmen. Es ist am natürlichsten dabey von anfänglicher Gleichheit auszugehen . . .

Im Vorwort zur ersten Auflage bemerkt Thibaut auch, daß das Interesse an der Geometrie und Trigonometrie durch „einige beyläufig angestellte praktische Messungen verstärkt werden kann".

Neben Thibaut, der schon 1832 starb und dessen Nachfolger Ulrich wurde, waren als erste Mitglieder der Göttinger Wissenschaftlichen Prüfungskommission Forscher wie Otfried Müller für Philologie und Altertumswissenschaft, Dahlmann für Geschichte und Jakob Grimm für deutsche Sprache, seit 1833 auch Herbart für Philosophie und Pädagogik. Mit sicher berechtigtem Stolz sagt der Schöpfer der Göttinger Prüfungsordnung, der obengenannte Hannoversche Generalschuldirektor Friedrich Kohlrausch, in seinen Lebenserinnerungen[2]):

1) Göttingen, Vandenhoek und Ruprecht. 2. Aufl. 1809.

2) Friedrich Kohlrausch, Erinnerungen aus meinem Leben. Hannover, Hahnsche Buchhandlung 1863. S. 306.

Die Schulamtsprüfungen der ersten vier Jahre zeigten, welche Früchte der Unterricht der genannten und anderer akademischer Lehrer getragen hat.

Im übrigen sei, was den Unterschied der Dozententätigkeit betrifft, wie sie durch die Gegenüberstellung Gauß — Thibaut gekennzeichnet wird, ausdrücklich auf die Darstellung bei Klein-Schimmack verwiesen.[1]) Nur möchte ich zur Ergänzung dieser Darstellung hier noch einmal betonen, daß Thibaut, der Nachfolger Kästners, sich auf dem angeführten Grundriß als Professor der Philosophie bezeichnet.

4. Die Prüfungsordnung von 1866.

Ganz im Gegensatz zu Göttingen macht sich in Altpreußen der bedeutende Aufschwung der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts auch im Staatsexamen geltend. Immer höher und spezieller werden die mathematischen Studien unter dem Einfluß der durch Jacobi in Königsberg eingerichteten Spezialvorlesungen. In Band III dieser Abhandlungen werden diese Verhältnisse, ihre Folgen und weitere Entwicklung genauer dargelegt werden. Hier ist lediglich als amtliche Anerkennung dieses Hochbetriebes die Prüfungsordnung von 1866 zu betrachten, die in § 29 sagt: Für den mathematischen Unterricht in den oberen Klassen sind nur die Kandidaten befähigt zu erachten, welche sich in der Prüfung als ausgebildete Mathematiker zeigen und in die höhere Geometrie, die höhere Analysis und analytische Mechanik soweit eingedrungen sind, daß sie auf diesen Gebieten eigene Untersuchungen mit Erfolg anstellen können.

Zum mathematischen und Rechenunterricht in den unteren Klassen genügt Kenntnis der elementaren Planimetrie und Stereometrie, der gemeinen Arithmetik, der Buchstabenrechnung und der Methodik des Rechenunterrichtes.

Für die mittleren Klassen ist Kenntnis der ebenen und körperlichen Geometrie, der ebenen und sphärischen Trigonometrie, der Algebra bis zu den Gleichungen des 3. und 4. Grades, der analytischen Theorie der geraden Linie und der Ebene mit Anwendung auf die Kegelschnitte, der Grundlehren der Differential- und Integralrechnung, sowie der Hauptsätze der Statik erforderlich.

Derselbe Paragraph der Prüfungsordnung umfaßt auch noch die Physik, die dadurch in einen selbstverständlichen Zusammenhang mit der Mathematik gebracht wird. Dagegen sind Chemie und beschreibende Naturwissenschaften in einem besonderen Paragraphen zusammengesetzt, dem Paragraph 30, während in der Prüfungsordnung von 1831 noch Mathematik und Naturwissenschaften vereint waren.

Nach § 8 der Prüfungsordnung hat der Unterschied zwischen

---

1) Klein-Schimmack, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen Leipzig, B. G. Teubner 1907. S. 158ff.

Gymnasium und Realschule keinen wesentlichen Einfluß auf die wissenschaftliche Prüfungsordnung.

„Es ist von den künftigen Lehrern der Gymnasien und der Realschulen eine im allgemeinen gleiche wissenschaftliche Vorbereitung zu fordern. Dies schließt jedoch in einzelnen Fällen eine Berücksichtigung der verschiedenen Unterrichtsziele in beiden Anstalten nicht aus."

Eine derartige Berücksichtigung finden wir bei der Physik, insofern von der Lehrbefähigung für die mittleren Klassen nur von der Realschule die Rede ist.

Auf den Gymnasien gab es zwar auch in einer mittleren Klasse damals Physik und zwar in der Untersekunda, die aber vielfach wohl mit Obersekunda noch vereint war.

Für die mittleren Realschulklassen wird gefordert:

Eine übersichtliche Kenntnis des ganzen Gebietes dieser Wissenschaft, verbunden mit einer deutlichen Einsicht in das Wesen der wichtigsten Naturerscheinungen und Gesetze, sowie Bekanntschaft mit der Einrichtung und dem Gebrauch der einfachsten physikalischen Instrumente.

Für den Unterricht in den oberen Klassen ist außerdem Kenntnis der Theorie der mathematischen Physik und der daraus sich ergebenden Methoden nebst genauer Kenntnis der physikalischen Instrumente und Übung in ihrer Behandlung zu fordern, ferner ist als Erfordernis des Unterrichts in der mathematischen Geographie Kenntnis der Elemente der Astronomie zu verlangen.

Man beachte, daß die Astronomie hier noch genannt ist. Sie ist aber seit der Prüfungsordnung von 1831 von der Mathematik zur Physik verschoben.

Ganz ist aber die oben erwähnte Trennung von den übrigen Naturwissenschaften noch nicht durchgeführt. Der Schluß dieses Paragraphen heißt:

Alle Kandidaten, welche sich der Prüfung in der Mathematik und Physik unterziehen, haben in den Naturwissenschaften (Chemie, Mineralogie, Zoologie, Botanik), auch wenn sie darin nicht unterrichten wollen, diejenige allgemeine Bildung darzutun, welche sie zu einem richtigen Urteil über den Inhalt und Umfang derselben, sowie über das Verhältnis zu den anderen Wissenschaften befähigt.

Dafür verlangt § 30 aber auch, daß jeder Lehrer der beschreibenden Naturwissenschaften die für den Unterricht in den mittleren Klassen erforderlichen mathematischen Kenntnisse besitzen muß, wie heute noch in Württemberg.[1])

Charakteristisch für den streng wissenschaftlichen Grundzug der Prüfungsordnung ist die allgemeine Bestimmung von § 31, wonach in jedem wissenschaftlichen Gebiete, worin der Examinand eine facultas docendi erwerben will, er auch eine angemessene Kenntnis der Literatur desselben darzutun hat.

Andererseits läßt der Paragraph aber auch die praktische Verwendbarkeit der Kandidaten durchblicken, wenn er verlangt, daß der mathematische Lehrer der oberen Klassen auch den Rechenunterricht in Sexta und Quinta zu erteilen geschickt ist.

1) Geck, Der Math. Unterricht in Württemberg. Diese Abhandlungen Bd. II, Heft 3, S. 93.

Diese letzte Bestimmung dürfte selten wirklich in der Prüfung beobachtet worden sein, wie überhaupt die Prüfung sich immer weniger auf den sogenannten elementaren Teil der Mathematik erstreckt hat, eine Tatsache, die in Bd. III dieser Abhandlungen ebenfalls eine eingehende Behandlung im Zusammenhang mit der Organisation des Studiums erfahren wird. Der Fortschritt in den Einrichtungen der Universitäten tritt aber in § 3 hervor, wonach es als besonders wünschenswert bezeichnet wird, „wenn in dem Lebenslauf, der bei der Meldung zur Prüfung mit einzureichen ist, die Teilnahme an den Übungen eines der mit der Universität und mit der Akademie zu Münster verbundenen Seminarien nachgewiesen wird."

Ein Fortschritt seit 1831 ist es weiter, daß dem Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften bei der Abfassung des Lebenslaufs der Gebrauch der deutschen Sprache gestattet ist.

Als Gegenstände der Prüfung führt die neue Prüfungsordnung in § 9 den Begriff der allgemeinen Bildung ein, „welche jeder, der sich dem Lehramte widmet, besitzen muß."

Im folgenden Paragraphen wird dieser Begriff näher definiert:

Jeder Schulamtskandidat, welcher in höheren Lehranstalten unterrichten will, muß den Forderungen allgemeiner Bildung in der Religionslehre seiner Konfession, in der Philosophie und Pädagogik, in der Geschichte, Geographie und in Sprachkenntnissen genügen. Es bleibt aber der Kommission überlassen, von einer Erforschung der allgemeinen Bildung soweit abzusehen, als dies durch ein vorzügliches Abiturientenzeugnis außer Frage gestellt ist.

Im einzelnen wird folgendes verlangt:

Diejenigen Kandidaten, welche keinen philologischen Unterricht erteilen wollen, müssen doch einen leichten lateinischen Text zu übersetzen und besonders auch über die Bedeutung der griechischen und lateinischen Terminologie ihres wissenschaftlichen Fachs Rechenschaft zu geben imstande sein (§ 23).

Auch wer nicht in den neueren Sprachen unterrichten will, muß doch einen leichteren französischen Schriftsteller zu übersetzen imstande sein (§ 25). Die Anforderungen sind aber gegenüber der Prüfungsordnung von 1831 gemindert. Dagegen findet eine besondere Prüfung im Deutschen nicht statt; „denn die Kommission hat hinreichende Gelegenheit bei den übrigen Teilen der schriftlichen und mündlichen Prüfung zu erkennen, ob die erforderliche allgemeine Bildung in der deutschen Sprache auch bei denen, die darin nicht unterrichten wollen, vorhanden ist, namentlich ob sie dieselbe sicher und angemessen zu gebrauchen wissen" (§ 24).

In Geschichte und Geographie sind in allgemeiner Bildung die Forderungen die gleichen wie 1831:

Insbesondere darf einem Lehrer die Geschichte und Geographie des preußischen und deutschen Vaterlandes nicht fremd sein (§ 26).

Bei denjenigen Schulamtskandidaten, welche sich nicht für den Religionsunterricht bestimmen wollen, ist darauf zu sehen, ob sie die von jedem Lehrer einer höheren Unterrichtsanstalt zu fordernde Kenntnis der Hauptlehren und eine allgemeine Übersicht über die Geschichte der Kirche besitzen und außerdem, ob sie mit dem Inhalt und Zusammenhang der heilgen Schrift hinreichend bekannt sind (§ 27).

Über Philosophie und Pädagogik heißt es schließlich in § 28:

Von jedem Schulamtskandidaten ist Kenntnis der wichtigsten logischen Gesetze und der Haupttatsachen aus der empirischen Psychologie zu fordern. Ebenso muß sich jeder darüber ausweisen können, daß er eine der wichtigsten philosophischen Schriften, dessen Wahl ihm frei steht, mit Aufmerksamkeit und Verständnis gelesen hat. Die eigene mündliche und schriftliche Darstellung muß bei jedem Schulamtskandidaten erkennen lassen, daß er bereits zu einiger Selbständigkeit und zu einer Ordnung der Gedankenbildung gelangt ist. Es muß ferner bei jedem Kandidaten einige Kenntnis der Geschichte der Philosophie, und eine allgemeine Bekanntschaft mit der Geschichte der neuen Pädagogik und die wesentlichen Bestimmungen der Methodik vorhanden sein (§ 28).

Mathematik und Naturwissenschaften gehören nach dieser Prüfungsordnung nicht zur allgemeinen Bildung. Während die Mathematiker also altsprachliche Kenntnisse nachweisen mußten, konnten die Alt- und Neusprachler, die Theologen und Historiker mit völliger Unwissenheit auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiete das Lehrfach ergreifen und haben es auch vielfach getan in einer Zeit der absoluten Herrschaft der alten Sprachen; denn das, was sie von der Schule an mathematischen und naturwissenschaftlichen Kenntnissen mitbrachten, war auch vielfach sehr gering und in Vergessenheit geraten. 1831 war, wie oben gezeigt wurde, von jedem Kandidaten verlangt worden, daß er auch ohne Lehrbefähigung den Zusammenhang der mathematischen, physikalischen und naturwissenschaftlichen Studien mit der Gesamtbildung des Menschen und das Verhältnis dieser Wissenschaften zu anderen Lehrgegenständen einzusehen und richtig zu würdigen weiß. Es ist eben jetzt die Zeit, wo die Mathematik an den Universitäten einen gewaltigen Aufschwung nahm, wo sich aber ihre Vertreter so überwiegend als reine Forscher ansahen, daß sie auf die Gestaltung der höheren Schulen keinen Einfluß zu gewinnen suchten, sondern diese ganz dem Altsprachler überließen. Es bildet sich jene tiefe Kluft zwischen der Universitätsmathematik, der höheren Mathematik, und der Schulmathematik, der elementaren Mathematik, die erst in unseren Tagen allmählich wieder ausgefüllt wird, wie in Band III des näheren zu zeigen ist. Es ist die Zeit der formalen Bildung, die Zeit, in der die Mathematik in den höheren Schulen lediglich als formales Bildungsmittel gilt, dessen Wert von vielen bestritten und dem offene Gleichgültigkeit entgegengebracht wird. Aus dieser Zeit altphilologischer Herrschaft gibt es von gar manchen Gymnasien Berichte über die offen zur Schau getragene Mißachtung der Mathematik, die man eben nicht zur allgemeinen Bildung rechnete. Man erzählt auch von Provinzialschulräten, die in der Reifeprüfung, solange Mathematik geprüft wurde, auffallend wenig Aufmerksamkeit der Prüfung widmeten, was vereinzelt in unseren Tagen allerdings auch noch vorkommen soll. Sie fühlten sich durchaus als Philologen im streng wissenschaftlichen Sinne und sahen als ungebildet an, wer nicht Lateinisch und Griechisch verstand. Indem solche Philologen, nun an Stelle der früheren Theologen Herren der höheren Schulen, philologische Gelehrsamkeit in die höheren

Schulen hineinbrachten und vielfach dort eine muntere Konjekturenjagd eröffneten und vor lauter grammatischen Feinheiten die Schriftsteller immer mehr zurücktreten ließen, gelang es ihnen in der Tat auch einige Zeit in dem Schüler selbst die Mathematik als eigentlich nebensächlich, durch die Reifeprüfungsordnung aber leider höchst peinliche Sache betrachten zu lassen. Die Zeit ist über diese altphilologische Einseitigkeit hinweg geschritten. Heute wird es kaum noch als unerhört angesehen, wenn ein Mathematiker Ordinarius in der Prima eines Gymnasiums ist; der zuweilen gewiß mit Recht, viel häufiger aber mit großem Unrecht „einseitig" genannte Mathematiker des Kollegiums nimmt keine vereinzelte Stellung mehr ein gegenüber den Amtsgenossen der sprachlichen Fächer. Die Ausgleichung hat verschiedene Ursachen, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Es sei nur soviel gesagt, daß sie durch die weiter unten zu besprechenden gemeinsamen pädagogischen Seminare mit erstrebt und meistens wohl auch erreicht wird. Aber auch der Zusammenschluß der fachwissenschaftlichen Studentenvereine, von denen die mathematischen in ihrer Geschichte und Bedeutung in Band III besprochen werden, zu einem Verband wissenschaftlicher Vereine hat doch auch allmählich schon beim Studium zu einem für das spätere gemeinsame amtliche Wirken ersprießlichen gegenseitigen Verstehen geführt.

Die letzten Betrachtungen haben uns schon in die neueste Zeit hineingeführt. Wir müssen aber noch einmal zu der Prüfungsordnung von 1866 zurückkehren. Die Prüfungsordnung von 1831 bestand, wie oben gezeigt wurde, aus drei Teilen; der schriftlichen Prüfung, der Probelektion und der mündlichen Prüfung.

Es ist eine ganz natürliche Folge des gesteigerten rein wissenschaftlichen Betriebes, daß die Probelektionen innerhalb der Prüfung ihre Bedeutung verlieren. Die Prüfungsordnung von 1866 läßt sie noch zu, verlangt sie aber nicht mehr: „Probelektionen können sich an die mündliche und schriftliche Prüfung anschließen" (§ 112). Tatsächlich sind sie wohl auch seit den siebziger Jahren nicht mehr gefordert worden.

In der schriftlichen Prüfung wird ein Aufsatz über ein philosophisches oder ein pädagogisches Thema gefordert und außerdem ein oder zwei Aufgaben aus den Fachwissenschaften, die binnen einer sechsmonatlichen Frist unter genauer Angabe der benutzten Hilfsmittel und mit der an Eides statt beigefügten schriftlichen Versicherung, daß sie ohne fremde Hilfe angefertigt sind. Die Frist kann auf höchstens weitere sechs Monate verlängert werden. Wegen der Zulassung von Dissertationen als Zusatz der schriftlichen Arbeiten gelten dieselben Bestimmungen wie 1831.

Neu ist es aber, daß die Kommission befugt ist, Klausurarbeiten anfertigen zu lassen, wie z. B. die Lösung mathematischer Aufgaben ohne Hilfsmittel.

Das Ergebnis der Prüfung wurde jetzt in Zeugnisgraden ausgedrückt, deren es drei gibt.

Zu einem Zeugnis ersten Grades war erforderlich:

1. Genügende allgemeine Bildung.

2. Im mathematisch-naturwissenschaftlichen Fache entweder die Befähigung Mathematik und Physik bis einschließlich Prima, außerdem aber die philosophische Propädeutik in Prima, oder die beschreibenden Naturwissenschaften, oder Religion, oder Lateinisch und Deutsch oder eine der neueren Sprachen in den mittleren Klassen zu lehren.

Oder Chemie und die beschreibenden Naturwissenschaften durch alle und Mathematik in den mittleren Klassen, außerdem aber Physik und Deutsch, oder Religion, oder Lateinisch und Deutsch, oder eine der neueren Sprachen zu lehren.

Auch Religion und Hebräisch für alle Klassen kann mit Mathematik und Physik für die mittlere Klasse kombiniert werden.

Dagegen – und das ist sehr bezeichnend – ist nicht mehr davon die Rede, daß beim philologisch-historischem Fache, das überhaupt an erster Stelle genannt wird, Mathematik für mittlere Klassen möglich wäre, während doch umgekehrt die Mathematiker unbedenklich eine sprachliche Lehrbefähigung erwerben können. Im neusprachlichen Fache ist wieder Mathematik und Naturwissenschaft als mögliches Nebenfach ausgesprochen.

Zu einem Zeugnis zweiten Grades war außer genügender allgemeiner Bildung die Befähigung in mittleren Klassen zu unterrichten erforderlich und zwar auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiete, in der Mathematik, Physik und mindestens einer beschreibenden Naturwissenschaft, oder in sämtlichen beschreibenden Naturwissenschaften. In der Verbindung mit sprachlich-historischen Fächern oder der Religion spielt Mathematik und Naturwissenschaft die entsprechende Rolle wie bei einem Zeugnis ersten Grades.

Außerdem wurde die Befähigung verlangt, in einigen Gegenständen in den unteren Klassen zu unterrichten.

Ein Zeugnis zweiten Grades wurde auch erteilt, wenn die fachwissenschaftlichen Kenntnisse für ein Zeugnis ersten Grades zwar ausreichten, die allgemeine Bildung aber unzureichend war. Wer in der allgemeinen Prüfung überhaupt nicht genügt hatte, mußte vor der endgültigen Anstellung in einer Nachprüfung zeigen, daß die Lücken ausgefüllt wurden. Auch gab es Ergänzungsprüfungen zur Erwerbung einer neuen Facultas docendi oder Erweiterung einer nur für Mittel- und Unterklassen erworbenen vor der Prüfungskommission, die die erste Prüfung abgenommen hatte, oder vor der Kommission der Provinz, in der die Kandidaten beschäftigt wurden. Nur mit Genehmigung des Ministeriums konnte auch eine andere Kommission zugelassen werden.

Ein Zeugnis dritten Grades wurde erteilt, wenn entweder bei fachwissenschaftlichen Kenntnissen, die für ein Zeugnis zweiten Grades hingereicht hätten, die allgemeine Bildung ungenügend war, oder wenn

bei einer im allgemeinen genügenden Vorbildung die fachwissenschaftlichen Kenntnisse für ein Zeugnis zweiten Grades nicht genügten.

Nicht bestanden hat der Kandidat, der nur eine notdürftige bis Quarta reichende Unterrichtsbefähigung dargetan. Immerhin konnte er aber, wenn auch nur ausnahmsweise, zum Probejahr zugelassen werden. Zur definitiven Anstellung war freilich ein genügendes Zeugnis nötig.

Im Folgenden sollen Zeugnisse verschiedener Prüfungskommissionen das Maß der Anforderungen charakterisieren.

Der Kandidat des höheren Schulamts, Herr

X. Y.,

geboren den 1. X. 1852 zu M., evangelisch, Sohn des verstorbenen Herrn Y. daselbst, zu Ostern 1873 von dem städtischen Gymnasium zu B. mit dem Zeugnis der Reife entlassen, von da ab bis Michaelis 1877 auf der Universität Breslau mit dem Studium der Mathematik und Physik beschäftigt, am 6. August 1877 auf Grund seiner Dissertation: „das räumliche Analogon eines Steinerschen Problems der Ebene" von der philosophischen Fakultät derselben Hochschule zum Doktor promoviert, von Michaelis 1878 bis Michaelis 1879 mit der Vertretung des ersten mathematischen Lehrers an einem hiesigen Gymnasium beauftragt, ist von der unterzeichneten Kommission in vorschriftsmäßiger Weise pro facultate docendi geprüft worden.

Das Ergebnis dieser Prüfung war folgendes:

In der Mathematik erstreckte sie sich auf einige Kapitel aus der Theorie der ebenen und räumlichen Kurven und der krummen Oberflächen, sowie auf die Theorie der Funktionen komplexer Variablen und der Integrale auf komplexem Wege. Der Kandidat zeigte hierbei, wie er bereits durch selbständige Forschung und seine Doktordissertation bewiesen hatte, daß er sich durch sorgfältige und eingehende Studien sehr gründliche und umfassende Kenntnisse angeeignet und ein sicheres und klares Verständnis dieser Gegenstände erworben hat. Ebenso bekundete er bei Gelegenheit einiger pädagogischen Fragen eine selbständige, auf eigener Überlegung und zum Teil auf eigener Erfahrung begründete Auffassung. Es kann ihm daher die Befähigung für den mathematischen Unterricht durch alle Klassen zuerkannt und zugleich die zuversichtliche Hoffnung ausgesprochen werden, daß er sich zu einem in wissenschaftlicher und pädagogischer Beziehung gleich tüchtigen Lehrer ausbilden werde.

Die Prüfung in der Physik zeigte, daß der Kandidat, obwohl seinem Gedächtnisse vielfache Einzelheiten entschwunden waren, doch über tüchtige Kenntnisse und über ein so gründliches Verständnis physikalischer Theorie und Beobachtung verfügt, daß ihm der Unterricht in allen Klassen anvertraut werden kann.

In der mathematischen Geographie besitzt er so gute, klare Kenntnisse, daß ihm der Unterricht hierin in allen Klassen erteilt werden kann. Auf den anderen Gebieten der Geographie wie auf dem der Geschichte genügen seine Kenntnisse den Anforderungen der allgemeinen Bildung. Dasselbe gilt vom Lateinischen und Französischen, sowie von der Religion, der Mineralogie, Zoologie und Chemie.

In der Botanik gehen seine Kenntnisse über die Ansprüche des Reglements, in bezug auf allgemeine naturwissenschaftliche Bildung hinaus, so daß es dem Kandidaten leicht werden wird, auch in diesem Fache eine Lehrbefugnis sich zu erwerben.

Seine schriftliche Bearbeitung der Aufgabe: „Kritik der Beweisführung Überwegs für die Realität des Raumes aus dem Newtonschen Gravitationsgesetze" beweist eine hervorragende philosophische Befähigung und Ausbildung. Auch in der mündlichen Prüfung zeigte er eine gründliche philosophische Ausbildung und Befähigung zu selbständigem Denken, so daß ihm der Unterricht in der philosophischen Propädeutik unbedenklich übertragen werden kann.

Auf Grund dieser Leistungen erhält der Kandidat des höheren Schulamts Herr Dr. X. Y.

ein Zeugnis ersten Grades

mit der Befugnis Mathematik nebst mathematischer Geographie[1]) und Physik in allen Klassen, philosophische Propädeutik in Prima zu lehren.

Schließlich wird der Kandidat angewiesen, sich unter Einreichung des Zeugnisses bei dem Königlichen Schulkollegium der Provinz, in welcher er beschäftigt zu werden wünscht und seinen Aufenthalt zu nehmen gedenkt, schriftlich zu melden und sich dem betreffenden Königlichen Provinzialschulrat womöglich persönlich vorzustellen, insbesondere auch um wegen des Probejahrs Auskunft und Anweisung zu erhalten.

Breslau, den 14. November 1879.

Königliche wissenschaftliche Prüfungskommission für Schlesien und Posen.

Sommerbrodt. Weinhold. Reifferscheidt. Dilthey.
O. E. Meyer. Schmölders. C. Neumann. Friedlieb. Hertz.
Poleck. F. Cohn. Schröter. Raebiger.[2])

Der Schulamtskandidat Herr A. B., am 17. September 1859 zu C., Kreis . . . geboren, Sohn des Herrn B. daselbst, evangelischer Konfession, Ostern 1879 von der Realschule I. Ordnung zu E. mit dem Zeugnisse der Reife entlassen, vom Sommersemester 1879 bis Ende Juli 1882 auf den Universitäten Greifswald und Leipzig weiter vorgebildet, in Greifswald drei Semester ordentliches Mitglied des mathematischen Seminars, hat sich nunmehr vor der unterzeichneten wissenschaftlichen Prüfungskommission der Prüfung pro facultate docendi unterzogen, über deren Ergebnis wir das nachstehende Zeugnis erteilen:

In der Mathematik genügte seine Arbeit über ein Thema aus der Theorie der relativen Bewegung, welches auf die Diskussion eines elliptischen Integrales 1. Gattung führte, den Anforderungen für obere Klassen. Im mündlichen Examen befriedigten besonders seine Kenntnisse in der Mechanik, weniger die in der Analysis und Geometrie. Nach dem Gesamtausfall des Examens konnte ihm aber die Lehrbefähigung für die oberen Klassen eines Gymnasiums oder eines Realgymnasiums zugesprochen werden.

In der Physik genügte seine Arbeit über Zirkularpolarisation für die oberen Klassen. Im mündlichen Examen befriedigte er besonders in der Wärmelehre und der Elektrizitätslehre. Es konnte ihm die Lehrbefähigung für die oberen Klassen zugesprochen werden.

In der Zoologie ließ die sich zunächst auf allgemeine biologische Verhältnisse erstreckende mündliche Prüfung zwar noch manche Unsicherheiten und Lücken erkennen; da dieselben durch verständnisvolle und sichere Antworten im Bereiche der Morphologie und Systematik der einzelnen Wirbeltierklassen aufgewogen wurden, so konnte ihm die Lehrbefähigung für den Unterricht in den unteren und mittleren Klassen unbedenklich zugesprochen werden.

Seine Kenntnisse in der Botanik befähigen ihn den Unterricht in derselben in den unteren und mittleren Klassen eines Gymnasiums oder Realgymnasiums zu übernehmen, doch ist ihm eine jedesmalige sorgfältige Vorbereitung zu empfehlen.

In der Mineralogie ist sein Wissen nicht umfangreich aber wohl begründet, durch Anschauung und eigene Untersuchung von Mineralien gewonnen. Es waren ihm die bei der mündlichen Prüfung vorgelegten häufiger vorkommenden Mineralien hinsichtlich ihrer physikalischen und chemischen Eigenschaften wohl bekannt, er wußte sie verständlich zu beschreiben, kannte außerdem die wichtigeren Gesteinsarten, auch ihre Lagerungsverhältnisse und bewies damit, daß er den mineralogischen Unterricht in den mittleren Klassen eines Gymnasiums oder Realgymnasiums mit Erfolg wird erteilen können.

Seine Kenntnisse in der Chemie genügen den Anforderungen allgemeiner Bildung und reichen für die Erteilung des mineralogischen Unterrichts in den mittleren Klassen aus.

---

1) Es wird also hier die Lehrbefähigung für ein Fach erteilt, das es als solches amtlich garnicht gab.

2) Man beachte bei diesen und den folgenden Zeugnissen, wie sehr die Zahl der Examinatoren gewachsen ist.

In der Philosophie genügte sowohl seine schriftliche Arbeit (Kants Naturphilosophie) sowie das mündliche Examen, welches die Kantsche Lehre von den Kategorien, von der Natur und der Erfahrung betraf, den Anforderungen der allgemeinen Bildung.

In der Religion entsprach sein Wissen den Anforderungen der allgemeinen Bildung auf allseitig befriedigende Weise.

Im Lateinischen genügte er den Anforderungen der allgemeinen Bildung; desgleichen in der Geschichte und Geographie und im Französischen.

Da nach den Ergebnissen dieser Prüfung dem Kandidaten Herrn A. B. außer allgemeiner Bildung die Lehrbefähigung in der Mathematik und Physik für die oberen Klassen, in der Zoologie, Botanik und Mineralogie für die mittleren Klassen eines Gymnasiums oder Realgymnasiums zuerkannt werden konnte, so wird ihm ein Zeugnis

„Ersten Grades“

von uns erteilt.

Schließlich wird derselbe angewiesen, sich bei dem Königlichen Schulkollegium der Provinz, in welcher er eine Anstellung zu erlangen wünscht oder einstweilen seinen Aufenthalt zu nehmen gedenkt, unter Vorlegung dieses Zeugnisses schriftlich zu melden und sich dem betreffenden Herrn Provinzialschulrat womöglich persönlich vorzustellen, um wegen des Probejahres Auskunft und Anweisung zu erhalten.

Greifswald, den 12. Mai 1883.

Königliche Wissenschaftliche Prüfungskommission.

gez. H. Schwanert. v. Wilamowitz. Gerstäcker. Münter. Ulmann.
Thomé. Schoppe. Credner. Konrath. Reifferscheid. Zöckler. Koschwitz.

Königsberg, den 30. April 1881.

Der Schulamtskandidat Herr X. Y., geboren den 13. Dezember 1856 zu Z., evangelisch, Sohn eines verstorbenen . . ., vom Gymnasium zu Z. zu Michaelis 1875 mit dem Zeugnis der Reife entlassen, dann auf der hiesigen Universität bis Michaelis 1880 durch mathematische und physikalische Studien gebildet, durch acht Semester Mitglied des mathematischen und physikalischen Seminars, hat sich heute vor der unterzeichneten Kommission einer Prüfung pro facultate docendi unterzogen, worüber ihm folgendes Zeugnis erteilt wird.

Die schriftliche mathematische Arbeit „Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer inkompressibeln Flüssigkeit“ behandelt das gestellte Thema in erschöpfender und gründlicher Weise sowohl analytisch als geometrisch. Sie beweist Selbständigkeit und Geschicklichkeit in der Handhabung der analytischen Hifsmittel, und ist ein erfreuliches Zeugnis von Fleiß und Sorgfalt. Damit übereinstimmend zeigte der Kandidat im mündlichen Examen in allen Teilen der Mathematik, auf welche sich das Examen erstreckte, sichere und umfassende Kenntnisse. Er besitzt sonach die Lehrbefähigung für Mathematik für die oberen Klassen in vollem Umfang.

In der Physik zeigte der Kandidat vielseitige und sichere Kenntnisse sowohl auf theoretischem Gebiete, wie bezüglich der Methoden, welche bei Untersuchungen benutzt werden, sodaß ihm die Lehrbefähigung für alle Klassen unbedingt erteilt werden kann.

In der Philosophie beweist die schriftliche Arbeit „Über die Anwendbarkeit mathematischer Operationen in der Physik“ Klarheit des begrifflichen Denkens und zutreffendes Urteil. Das mündliche philosophische Examen zeigte zwar in einzelnen Gebieten Lücken in den Kenntnissen, doch darf bei der genügend hervortretenden Beanlagung und dem Interesse des Kandidaten für dieses Gebiet angenommen werden, daß er dieselben bald ausfüllen werde. In den Grundbegriffen der Logik, Ethik, Metaphysik und teilweise der Psychologie war der Kandidat soweit bewandert, daß ihm der Unterricht in der philosophischen Propädeutik anvertraut werden kann.

In der Chemie, Mineralogie, Zoologie und Botanik besitzt er eine sehr gute allgemeine Bildung. Den Forderungen derselben genügte er auch in der Geschichte

und Geographie, dem Latein, Französischen, der evangelischen Religionslehre und Pädagogik.

Hiernach wird ihm

ein Zeugnis ersten Grades

erteilt mit der Befugnis, den Unterricht in der Mathematik, Physik und philosophischen Propädeutik in allen Klassen zu erteilen.[1])

Königliche Wissenschaftliche Prüfungskommission zu Kiel.

Zeugnis.

Der Kandidat des höheren Schulamts Herr G. K., geboren den 9. Dezember 1849 zu S., evangelischer Konfession, Sohn eines Kaufmanns, von dem Gymnasium in D. zu Ostern 1868 mit dem Zeugnis der Reife entlassen, auf den Universitäten Berlin, Heidelberg und Bonn durch das Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften vorgebildet, hat nach geschehener Meldung zur Prüfung pro facultate docendi vor der unterzeichneten Königlichen Kommission zu schriftlicher Behandlung folgende Aufgaben erhalten:

1. aus der Philosophie: Darstellung der Lehre der alten Atomistik und Vergleichung derselben mit der heutigen Lehre von Molekülen;
2. aus der Mathematik: Über die Konvergenz der unendlichen Reihen.

Nach Einlieferung der betreffenden Abhandlungen hat der Herr G. K. am gestrigen Tage eine schriftliche Klausurarbeit aus dem Gebiete der Physik angefertigt und sich sodann heute vor der unterzeichneten Königlichen Kommission der mündlichen Prüfung unterzogen. Über das Ergebnis der gesammten Prüfung wird demselben hierdurch folgendes bezeugt:

In der Mathematik hat der Kandidat eine gute und gründliche Abhandlung geliefert, welche seine Fähigkeit, wissenschaftlich mit Selbständigkeit zu arbeiten, in vollkommen ausreichender Weise darlegt. Die mündliche Prüfung zeigte, daß er sich in der Differential- und Integralrechnung, der Funktionentheorie, der Mechanik, auch in der Theorie der bestimmten Integrale und der elliptischen Funktionen sichere Kenntnisse und klare Anschauungen erworben hatte. Mit der Geometrie hat der Kandidat sich weniger eingehend beschäftigt; jedoch ist nach dem Ausfall des ganzen Examens nicht zu bezweifeln, daß derselbe fähig ist, die in seinen Kenntnissen noch vorhandenen Lücken durch eigenes Studium auszufüllen. Es kann ihm daher die Berechtigung, den mathematischen Unterricht in allen Klassen von Gymnasien und Realschulen zu erteilen, unbedenklich zuerkannt werden.

In der Physik beweist die schriftliche Klausurarbeit aus der mechanischen Wärmelehre gute theoretische Kenntnisse des Kandidaten. – Die mündliche Prüfung ergab, daß derselbe auch die physikalischen Erscheinungen und Gesetze sicher darzustellen versteht, und sich einige Erfahrungen über Konstruktion und Gebrauch der Instrumente erworben hat. – Es kann ihm die Lehrbefähigung für alle Klassen zugesprochen werden.

In der Mineralogie hat der Kandidat hinreichende Kenntnis von den Eigenschaften der Mineralkörper nachgewiesen, um die Befugnis zu erhalten, in den mittleren Klassen zu unterrichten.

In der Zoologie beantwortete der Kandidat alle Fragen, welche sich auf die Einteilung der Wirbeltiere und Insekten und auf den Bau der Vögel und Insekten bezogen, gut. – In der Botanik entwickelte er gute Kenntnisse inbetreff der Einteilung der Pflanzen, der Eigenschaften des Protoplasma und des Zelleninhalts. Er charakterisierte die Solaneen richtig. Hiernach darf ihm die Befugnis erteilt werden, Zoologie und Botanik in den mittleren Klassen zu lehren.

---

1) In der mir zur Verfügung gestellten Abschrift fehlen die Namen der Examinatoren; wie mir der Inhaber des Zeugnisses aber mitteilte, hat H. Weber in Mathematik geprüft.

Die philosophische Abhandlung ist ein durchaus genügender Beweis methodischer Darstellung und guter Stilisierung, sowie eines gesunden und klaren Urteils. In der mündlichen Prüfung aus der Philosophie beantwortete der Kandidat fast alle Fragen korrekt und zeigte scharfen, klaren Verstand. Den Anforderungen der allgemeinen Bildung hat er in vollem Maße entsprochen. Gleiches darf hinsichtlich der Chemie bezeugt werden. – Auch in der Religion und der Pädagogik entsprach er den Anforderungen, freilich nur in beschränkter Weise. – Im Lateinischen und Französischen, sowie in der Geschichte und Geographie brauchte mit Rücksicht auf die Prädikate des Maturitätszeugnisses keine Prüfung angestellt zu werden.

Auf Grund vorerwähnter Leistungen ist dem Herrn G. K. von der unterzeichneten Königlichen Kommission ein

„Zeugnis ersten Grades"

erteilt worden, mit der Befugnis an Gymnasien und Realschulen Mathematik und Physik in allen Klassen zu lehren, sowie die beschreibenden Naturwissenschaften in den mittleren:

Der Kandidat wird angewiesen, sich unter Einreichung dieses Zeugnisses bei dem Königlichen Schulkollegium der Provinz, in welcher er beschäftigt zu werden wünscht und seinen Aufenthalt zu nehmen gedenkt, schriftlich zu melden und sich dem betreffenden Königlichen Provinzialschulrate womöglich persönlich vorzustellen, insbesondere auch um wegen des Probejahres Auskunft und Anweisung zu erhalten.

Kiel, den 6. Juli 1878.

L. S. gez. Dr. Lahmeier. Volquardsen. Stimming. Ladenburg. Karsten. Thaulow. Lübbert. Klostermann. Pochhammer. K. Möbius. Schirren.

Zeugnis
der Königlichen Wissenschaftlichen Prüfungskommission
zu Göttingen.

Der Kandidat des höheren Schulamts Herr X. Y., geboren 1860 zu E., ref. Konf., Sohn des ..., hat sich bei der unterzeichneten Kommission zur Prüfung pro facultate docendi in der Mathematik, der Physik und den beschreibenden Naturwissenschaften gemeldet. Seine Vorbildung hat derselbe zuletzt auf dem Gymnasium zu H. erhalten. Nachdem er von dieser Anstalt mit einem Reifezeugnis vom 9. März 1880 entlassen worden war, widmete er sich von Ostern bis Michaelis 1880 zu Göttingen, darauf bis Michaelis 1881 zu Berlin, endlich bis Juni 1883 wieder zu Göttingen dem Studium der Mathematik. In Göttingen war er drei Semester Mitglied des mathematisch-physikalischen Seminars.

Die ihm von uns zur schriftlichen Bearbeitung gestellten Aufgaben waren folgende:

1. Philosophische Darstellung und Beurteilung der Ansichten von J. Stuart Mill über Geometrie und Arithmetik.

2. Mathematische Bestimmung derjenigen Minimalflächen, welche eine Schar von ebenen Krümmungslinien besitzen.

Danach hat er sich am heutigen Tage einer mündlichen Prüfung unterzogen, über deren Erfolg, verbunden mit den Ergebnissen der schriftlichen Arbeiten die Urteile also lauten:

Die philosophische Abhandlung verdient in jeder Hinsicht Lob. Das Referat im ersten Teil derselben ist genau und scharf, die Hauptgedanken Mills sind in ihrem inneren Zusammenhang richtig dargestellt. Die Kritik im zweiten Teil ist durchaus treffend, wenn auch die besonders schwache Seite der Millschen Theorie, die Vorstellung von den „wirklichen Linien", noch schärfer hätte hervorgehoben werden können. Der Kandidat zeigt sich durchaus befähigt zur philosophischen Behandlung der Grundbegriffe seiner Wissenschaft. In der mündlichen Prüfung in Philosophie und Pädagogik legte er durchaus gute Kenntnisse an den Tag.

Die schriftliche mathematische Arbeit ist mit sehr großer Sorgfalt angefertigt und ist sowohl hinsichtlich ihres Inhalts, als ihrer Form als sehr gut zu bezeichnen.

Der Verfasser hat nicht allein die gestellte Aufgabe in erschöpfender Weise mit Sachkenntnis und mit großem Geschick gelöst, sondern hat auch recht gelungene Zeichnungen angefertigt, durch welche die Gestalt einiger der in Betracht kommenden krummen Linien veranschaulicht wird. Überdies hat er für einen passend gewählten speziellen Fall einer Minimalfläche mit zwei Scharen ebener Krümmungslinien in geeigneten Dimensionen ein Gipsmodell angefertigt und durch dasselbe seine Geschicklichkeit dargetan, die Ergebnisse theoretischer Untersuchungen anschaulich darzustellen. Die mündliche Prüfung in dem Fache der Mathematik ergab ebenfalls in der Zahlentheorie, der Algebra, der Differential- und Integralrechnung, einschließlich der Lehre von den bestimmten Integralen, in der analytischen Geometrie und in der Theorie der analytischen Funktionen sehr gute untereinander zusammenhängende Kenntnisse, welche der Kandidat mit Sicherheit und Klarheit vortrug.

Die mündliche Prüfung in der Physik ergab in der Elektrizitätslehre und der elementaren Astronomie gute, in der Optik und Wärmelehre ausgezeichnete Kenntnisse; ebenso war die Bekanntschaft mit den wichtigsten Meßapparaten nach Theorie und Praxis durchaus befriedigend.

In der Zoologie sind seine Kenntnisse durchaus befriedigend.

In der Botanik legte er gute Kenntnisse an den Tag.

In der Mineralogie zeigte er ein recht gutes Wissen. In der Religion, der lateinischen und der französischen Sprache, der Geschichte und Geographie legte er die erforderliche allgemeine Bildung an den Tag.

Nach diesen Ergebnissen der schriftlichen und mündlichen Prüfung erteilen wir dem Herrn X. Y. dieses Zeugnis

ersten Grades

mit der Befähigung die Mathematik und die Physik in allen, Zoologie, Botanik und Mineralogie in den mittleren und unteren Klassen eines Gymnasiums oder einer Realanstalt zu lehren, indem wir ihn für den Unterricht in der Mathematik und Physik noch besonders empfehlen.

Schließlich wird derselbe angewiesen, sich unter Einreichung dieses Zeugnisses bei dem Königlichen Schulkollegium der Provinz, in welcher er beschäftigt zu werden wünscht und seinen Aufenthalt zu nehmen gedenkt, schriftlich zu melden und sich dem betreffenden Königlichen Provinzialschulrat womöglich persönlich vorzustellen, insbesondere auch um wegen des Probejahrs Auskunft und Anweisung zu erhalten.

Göttingen, den 6. August 1884.

Königliche Wissenschaftliche Prüfungskommission.

C. A. Volquardsen. v. Wilamowitz. M. Heyne. Herm. Wagner. H. Schulz.
C. Boedecker. W. Voigt. H. A. Schwarz. E. Ehlers. C. Klein. A. Napier.
Kluckhohn. I. V. D. Peipers. Sauppe. Reinke. Vollmöller.

Der Kandidat des höheren Schulamts, Herr Dr. phil. C., geboren den 30. Mai 1858 zu B., katholischer Konfession, welcher unter dem 21. März 1879 von dem Gymnasium zu W. mit dem Zeugnis der Reife entlassen worden ist und von da ab bis Ostern 1883 auf der hiesigen Königlichen Akademie sich dem mathematischen und naturwissenschaftlichen Studium gewidmet hat, auch von der philosophischen Fakultät der hiesigen Königlichen Akademie auf Grund der Dissertation: „Über einem Dreieck um- und eingeschriebene Kegelschnitte" unterm 22. Februar c. zum Doktor der Philosophie ernannt worden ist, ist auf eigenen Antrag von der unterzeichneten Kommission pro facultate docendi geprüft worden.

In der philosophischen Arbeit des Kandidaten über das Thema: „Das Unendliche mathematisch und metaphysisch betrachtet" ist der Unterschied zwischen dem metaphysisch und mathematisch Unendlichen zu wenig hervorgehoben und eigentlich nur das mathematisch Unendliche behandelt. Die allerdings sehr diskutierbare Ansicht, daß das mathematisch Unendliche ein aktual Unendliches sei, hat der Verfasser nicht begründet. Die Arbeit ist nach Inhalt und Form befriedigend.

In dem mündlichen Examen in der Mathematik wurden Fragen aus der Theorie der Gleichungen, über die Flächen 2. Grades, die elliptischen Funktionen, aus den Elementen der Astronomie und aus der Geschichte der Mathematik gestellt und meistens genügend beantwortet.

In der Zoologie besitzt derselbe hinreichende Kenntnisse, um mit Erfolg in den mittleren Klassen eines Gymnasiums und auch Realgymnasiums unterrichten zu können.

In der speziellen Botanik beantwortete der Kandidat die gestellten Fragen mit einiger Nachhilfe; in der allgemeinen Botanik dagegen waren seine Kenntnisse so gute, daß ihm die Lehrbefähigung in der Botanik für die mittleren Klassen unbedenklich erteilt werden kann.

In der Kristallographie und der Lehre von den physikalischen Eigenschaften der Mineralien zeigte der Kandidat durchaus befriedigende Kenntnisse, so daß, wenn auch in der Physiographie einzelner Mineralien noch Lücken hervortraten, ihm die Lehrbefähigung für die mittleren Klassen erteilt werden kann.

Dem Gebiete der Physik hat Kandidat noch nicht das Interesse und denjenigen Fleiß zugewandt, ohne welche ein befriedigender Erfolg nicht erzielt werden kann. Namentlich fiel es auf, daß er in der Mechanik eingehendere Studien, die doch vom Mathematiker verlangt werden müssen, unterlassen hat. Es kann ihm daher nur die Fakultas für die mittleren Klassen erteilt werden.

Die Prüfung in der Chemie ergab, daß Kandidat in allen Zweigen derselben Kenntnisse besitzt, jedoch nur von solchem Umfange, daß seine Lehrbefähigung auf die mittleren Klassen zu beschränken ist.

In der Philosophie waren seine Kenntnisse genügend, im Lateinischen im ganzen genügend.

Die Kenntnisse des Kandidaten in der Religionslehre und in der Geschichte entsprachen den Anforderungen der allgemeinen Bildung.

Nach Beendigung der Prüfung wurde das Ergebnis dahin festgestellt, daß dem Dr. . . . ein

Zeugnis zweiten Grades

zu erteilen sei, mit der näheren Bestimmung, daß er

1. in der Mathematik in allen Klassen,
2. in der Physik, der Zoologie, Botanik und Mineralogie und in der Chemie in den mittleren Klassen unterrichten könne.

Münster, den 20. Juli 1885.

L. S. Königliche Wissenschaftliche Prüfungskommission.

gez. Schulz. Langen. Stork. Stahl. Schwane. Körting. Lindner. Hagemann. Sturm. Hittorf. Hohius. Brefeld. Salkowski. Landois.

Das letzte Zeugnis wurde durch folgendes Nachprüfungszeugnis ergänzt.

Der Kandidat des höheren Schulamts Herr Dr. ... hier, wegen dessen Personalien auf das demselben erteilte Prüfungszeugnis vom 20. Juli 1885 Bezug genommen wird, ist auf eigenen Antrag von der unterzeichneten Kommission einer Nachprüfung in der Physik und Chemie unterzogen worden.

In der physikalischen Prüfungsarbeit über die Aufgabe: „Die Theorie der Atwoodschen Fallmaschine unter Berücksichtigung des Einflusses der Rolle auf die Bewegung" ist die Bestimmung des Einflusses, welchen die Rolle der Atwoodschen Fallmaschine auf die Bewegung hat, verfehlt. Sonst ist die Darstellung im wesentlichen richtig.

Kandidat hat die Zeit zwischen dieser und der ersten Prüfung benutzt, um seine physikalischen Kenntnisse praktisch wie theoretisch zu erweitern und zu vertiefen. Er nahm während des verflossenen Sommersemesters an den Übungen im Laboratorium und an den Vorlesungen teil. In der schriftlichen Arbeit, welche die Theorie der Atwoodschen Fallmaschine unter Berücksichtigung des Einflusses der Rolle auf die Bewegung zum Gegenstande hatte, wurde leider das Verhalten der

Rolle nicht unter dem richtigen Gesichtspunkte erfaßt; im übrigen ist die Darstellung befriedigend. Die mündliche Prüfung ergab, daß Kandidat die Lücken in seinen Kenntnissen der Mechanik, welche in der ersten Prüfung hervorgetreten waren, auszufüllen mit Erfolg bemüht gewesen ist, und daß er mit den theoretischen Grundsätzen, nach welchen jener Einfluß der Rolle berechnet werden mußte, wohl vertraut war. Auch wurden die Fragen aus anderen Teilen der Physik (Akustik, Elektrizität, Magnetismus befriedigend beantwortet. Daher kann jetzt seine Fakultas auf alle Klassen ausgedehnt werden.

Bei der Nachprüfung in der Chemie zeigte Kandidat in seiner Kenntnis der Einzelheiten zwar noch manche fühlbare Lücke, erwies sich aber mit den allgemeinen Lehren so vertraut, daß ihm der Unterricht auch in den oberen Klassen ohne Bedenken überlassen werden kann. Nach Beendigung der Prüfung wurde das Ergebnis dahin festgestellt, daß dem p. Dr. ... nunmehr die Lehrbefähigung für Physik und Chemie in allen Klassen erteilt werden könne. Da er außerdem in der früheren Prüfung die Lehrbefähigung in der Mathematik für alle Klassen, für Zoologie, Botanik und Mineralogie in den mittleren Klassen nachgewiesen, so wird ihm hierdurch

ein Zeugnis ersten Grades

zuerkannt.

Münster, den 21. November 1887.

L. S. Königliche Wissenschaftliche Prüfungskommission.

gez. Schulz. Storck. Schwane. Hohius. Bachmann. Salkowski.

Leider ist es mir nicht gelungen den Wunsch eines Mitarbeiters der IMUK zu erfüllen und auch ein Zeugnis aus den „Berliner sogenannten Kriegsjahren zu bringen, in denen der Provinzialschulrat Klix den Vorsitz in der Kommission führte, und die Zeugnisse überwiegend nur aussprachen, was der Kandidat alles nicht gewußt hat".

5. Die Prüfungsordnung von 1887.

Einundzwanzig Jahre hatte diese Prüfungsordnung von 1866 Gültigkeit, bis sie durch die Ordnung der Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen vom 5. Februar 1887 abgelöst wurde.

Auf der Konferenz, die im Oktober 1873 in Berlin im Unterrichtsministerium unter dem Vorsitz des Ministers Falk über „verschiedene Fragen des höheren Schulwesens" abgehalten wurde, hatte nach Erledigung der Tagesordnung der als geladener Teilnehmer anwesende Gymnasialdirektor Bonitz einige auch schriftlich eingereichte Anträge begründet betreffend die Prüfung der Kandidaten des höheren Lehramts. Es handelte sich darin unter anderen Dingen um Beseitigung des dritten Zeugnisgrades und der Prüfung in „allgemeiner Bildung", soweit „diese eine schwächliche Wiederholung der Maturitätsprüfung sei". Auf eine weitere Erörterung verzichtete damals Bonitz, da der Minister erklärte, daß er auf der zu Ende gehenden Konferenz eine gründliche Durchberatung nicht mehr für möglich halte,

1) Protokoll der im Oktober 1873 im Kgl. Preußischen Unterrichtsministerium über verschiedene Fragen des höheren Schulwesens abgehaltenen Konferenz. Berlin 1874. S. 175. W. Hertz. (Auch abgedruckt im Zentralblatt der Unterrichtsverwaltung 1874.)

daß er aber Veranlassung nehme, an diese Anträge Weiteres anzuknüpfen.

Bei der Vorbereitung der neuen Prüfungsordnung fand Bonitz selbst, der inzwischen als Nachfolger von Wiese in das Ministerium eingetreten war, Gelegenheit, auf seine Anträge von 1873 zurückzukommen. Sie spiegeln sich in den amtlichen Bemerkungen wieder, die der Prüfungsordnung von 1887 mit auf den Weg gegeben wurden.[1]) Natürlich ist Bonitz nicht der alleinige Schöpfer dieser Prüfungsordnung. Die amtlichen Bemerkungen sagen vielmehr ausdrücklich, daß diese als „das Ergebnis der gemeinsamen Erwägung der beteiligten Faktoren zu betrachten sei", d. h. der Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen, der Provinzialschulkollegien und einzelner außerhalb dieser Kreise stehender hervorragender Schulmänner.

In diesen amtlichen Bemerkungen werden drei Gründe hervorgehoben, die den Anlaß zu einer Änderung gebildet haben.

1. Die Zulassung eines dritten Zeugnisgrades erfährt nahezu einstimmige Mißbilligung.

2. Die Prüfung in der allgemeinen Bildung wird als sachlich nicht erforderlich und die Zahl und Mannigfaltigkeit ihrer Gegenstände als nachteilig bezeichnet.

3. Der Versuch in § 21 des Reglements von 1866 alle möglichen Kombinationen von Fächern festzustellen, hat zu einer beengenden Kasuistik geführt, die die Übersicht erschwert und doch die Mannigfaltigkeit der Fälle nicht zu erschöpfen vermag.

So wird denn in § 9 jetzt bestimmt, daß das Gesamtergebnis zwei Stufen hat, sofern die Prüfung überhaupt bestanden ist, entweder ein Oberlehrerzeugnis, d. h. die wissenschaftliche Befähigung zu einer Oberlehrerstelle an einem Gymnasium und einer Realanstalt von neunjährigem Kursus oder ein Lehrerzeugnis, d. h. die wissenschaftliche Befähigung zu einer ordentlichen Lehrerstelle an diesen Anstalten.

Zum Verständnis dieser Scheidung ist zu beachten, daß die Amtsbezeichnung „Oberlehrer" damals noch nicht allgemein für die festangestellten wissenschaftlichen Lehrer galt. Diese hießen vielmehr „ordentliche Lehrer am Gymnasium oder Realgymnasium usw." und wurden erst im vorgerückten Alter in eine Oberlehrerstelle befördert. Die Amtsbezeichnung „Oberlehrer" für alle fest angestellten wissenschaftlichen Lehrer der höheren Schulen datiert erst seit dem Allerhöchsten Erlaß von 1892.

Für ein Oberlehrerzeugnis war erforderlich außer der Erfüllung der allgemeinen Anforderung die Lehrbefähigung in zwei Hauptfächern für alle Klassen und in zwei Nebenfächern für mittlere Klassen oder in einem dritten Fach für die oberen Klassen. Für ein Lehrerzeugnis genügte die Lehrbefähigung in zwei Hauptfächern für mittlere Klassen und einem Nebenfach ebenfalls für die mittleren Klassen, während in einem zweiten Nebenfache die Lehrbefähigung für die unteren Klassen ausreichte.

1) Wiese-Kübler, Verordnungen und Gesetze für die höheren Schulen Preußens. Dritte Ausgabe, 2. Abteilung. 1888. S. 49–56.

Daß neben dem Oberlehrerzeugnis noch ein Lehrerzeugnis beibehalten wurde, entsprach nicht, wie die amtlichen Bemerkungen zugeben, den Wünschen der Gymnasiallehrer, aber

„Man kann die Unterschiede der wissenschaftlichen Befähigung und des eindringenden energischen Arbeitens weder leugnen noch beseitigen. Es läßt sich ferner nicht verkennen, daß dasjenige Maß wissenschaftlicher Leistungen, durch welches nach der vorliegenden Prüfungsordnung ein Lehrerzeugnis begründet wird, verbunden mit gewissenhafter Treue der Pflichterfüllung, Ersprießliches im Unterrichte zu erreichen vermag und ein nicht zu entbehrendes noch zu unterschätzendes Element des Lehrerstandes der höheren Schulen bildet. Endlich ist es nicht möglich, die geringere Begabung zu der Höhe des glücklicheren Talentes hinaufzuschrauben; dagegen ist es sehr wohl möglich, daß bei vollständiger Aufhebung des Unterschiedes der Zeugnisse der glücklicheren Begabung der Antrieb zu energischer Entwickelung verkümmert würde. Die Folge einer vollständigen Nivellierung der Zeugnisse über die wissenschaftliche Lehramtsprüfung würde voraussichtlich sein, daß in der Prüfungsordnung selbst oder doch jedenfalls in ihrer Ausführung die Forderungen im allgemeinen herabgestimmt und damit bald auch der Durchschnitt der Leistungen herabgedrückt würde; wahrscheinlich ergäbe sich als weitere, das Ansehen das Lehrstandes gefährdende Folge, daß gerade die auf Grund schwächerer Leistungen erworbene gleiche Berechtigung sich am zuversichtlichsten geltend machen würde."

In der Mathematik wird jetzt gefordert (§ 21):

1. Für den mathematischen und Rechenunterricht in den unteren Klassen ist zu verlangen Kenntnis der ebenen und körperlichen Geometrie, der ebenen Trigonometrie, der allgemeinen Arithmetik mit Einschluß der logarithmischen Rechnung und der Algebra bis zu den Gleichungen zweiten Grades einschließlich, sowie die für die zweckmäßige Erteilung des Rechenunterrichts erforderliche Bekanntschaft mit den Eigenschaften des dekadischen Systems.

2. Für den Unterricht in den mittleren Klassen wird außerdem Kenntnis der Gleichungen dritten und vierten Grades, der sphärischen Trigonometrie nebst ihren hauptsächlichsten Anwendungen auf die mathematische Geographie, der analytischen Geometrie der Ebene, besonders der Haupteigenschaften der Kegelschnitte und der Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung gefordert.

3. Für den Unterricht in den oberen Klassen muß der Kandidat außerdem mit den wichtigsten Lehren der höheren Geometrie, der höheren Analysis und der analytischen Mechanik soweit bekannt sein, daß er eine nicht zu schwierige Aufgabe aus einem dieser Gebiete selbständig zu bearbeiten im Stande ist.

In der Physik § 22:

1. Für den physikalischen Unterricht in den mittleren Klassen ist erforderlich Kenntnis der wichtigsten Erscheinungen und Gesetze aus dem ganzen Gebiete dieser Wissenschaft, sowie die Befähigung, diese Gesetze mathematisch zu begründen, soweit es ohne Anwendung der höheren Mathematik möglich ist; Bekanntschaft mit den wichtigsten physikalischen Instrumenten und ihrer Handhabung.

2. Für den Unterricht in den oberen Klassen ist außerdem zu fordern eine allgemeine Übersicht über die mathematische Physik und eine genauere Kenntnis von den grundlegenden mathematischen Untersuchungen auf einem der wichtigsten Ge-

biete der theoretischen Physik, ferner einige Übung in dem Gebrauch der für den Schulunterricht erforderlichen physikalischen Instrumente.

Hierzu bringen die amtlichen Bemerkungen einige recht charakteristische Ausführungen, die auch für die jetzige Zeit sehr beachtenswert erscheinen:

„Durch das bisherige Reglement ist für die Lehrbefähigung in den oberen Klassen erfordert, daß der Kandidat sich als ausgebildeter Mathematiker zeige und in dem Gebiete der Geometrie, der höheren Analysis und der analytischen Mechanik eigene Untersuchungen mit Erfolg anstellen können.

In der tatsächlichen Ausführung dieser Forderung wird jedenfalls der Umstand nicht unerwogen gelassen sein, daß die zu prüfenden Kandidaten eben erst am Schluß ihrer Universitätsjahre stehen, es erscheint jedoch ausgeschlossen, dieser Erwägung schon durch den Wortlaut der Prüfungsordnung Rechnung zu tragen. Es liegt in dem Wesen der Mathematik, daß von den Lehrern der obersten Klassen klare Einsicht und sichere Bewegung auf Gebieten erfordert werden muß, welche für den Unterricht weniger unmittelbare Verwendung finden, als dies im wesentlichen von denjenigen Kenntnissen gilt, welche auf den sprachlichen und historischen Gebieten von den Kandidaten erfordert werden. Die Ansprüche in dieser Hinsicht sind in der Höhe zu stellen, daß dadurch dem mathematischen und dem mathematisch-physikalischen Unterricht auf der obersten Stufe lichtvolle und selbst zu weiteren Studien anregende Behandlung gesichert werde und daß der Kandidat die Befähigung gewonnen habe, auf einem Gebiete mit Freudigkeit und mit Erfolg weiter zu arbeiten. Aus diesem Grunde wird die jetzt gewählte Formulierung ihre Erklärung finden, sowohl in betreff dessen, was ausdrücklich erwähnt, als dessen, was unerwähnt gelassen ist. So kann die für die oberste Stufe der physikalischen Lehrbefähigung erforderte Kenntnis von den grundlegenden mathematischen Untersuchungen zu der Anwendung elliptischer Funktionen führen; aber es hat vermieden werden sollen, durch Erwähnung derselben an dieser Stelle zu dem Anspruch auf Bekanntschaft mit diesen Untersuchungen in ihrem ganzen Umfange einen Abschluß zu geben. Dagegen bietet die erforderte Bekanntschaft mit den Grundgesetzen der analytischen Mechanik ein vorzügliches Mittel, die Vertrautheit des Kandidaten mit der Differential- und Integralrechnung zu ermitteln, und ist zugleich von hoher Bedeutung für die Einsicht in die Grundgesetze der Physik.

Der erwähnte Umstand, daß das Verhältnis des in der Prüfung geforderten Wissens zu seiner unmittelbaren Verwendung im Unterricht auf dem mathematischen Gebiete ein merklich anderer ist, als für die meisten anderen Lehrgegenstände, gibt besonders Anlaß an die Allgemeingiltigkeit der in § 27, 1 der Prüfungsordnung enthaltenen Bestimmung zu erinnern, daß behufs Erwerbung der Lehrbefähigung auch

für die obersten Klassen von der Ermittelung der für die niedere Stufe erforderlichen Kenntnisse keinesfalls Abstand genommen werden darf. Durch die strenge Einhaltung dieses Verfahrens werden übrigens die Kandidaten darauf hingewiesen, daß für die vom Lehrer zu erfordernde Kenntnis der elementaren Mathematik die aus dem Schulunterricht bewahrte Erinnerung und feste Grundlage nicht ausreicht, daß sie es vielmehr als einen wesentlichen Teil ihrer mathematischen Bildung betrachten müssen, die elementaren Grundbegriffe und den Zusammenhang des gesamten Lehrstoffes der elementaren Mathematik sich durch erneutes Nachdenken zu voller Klarheit gebracht zu haben."

Wie sehr durch diesen letzten Hinweis gerade auch verblümt auf wesentliche Lücken des damaligen mathematischen Unterrichts an den Universitäten hingewiesen wird, soll in Band III dieser Abhandlungen gezeigt werden.

Außer der Prüfung in dem besonderen Fache hat jeder Kandidat auch nachzuweisen, ob er durch sein Studium der Philosophie und Pädagogik, durch seine Beschäftigung mit der deutschen Sprache und Literatur und sofern er einer der christlichen Kirchen angehört, durch seine Kenntnis der Religionslehre seiner Konfession den an Lehrer der höheren Schulen allgemein zu stellenden Anforderungen entspricht. Mit Absicht ist hier nicht, wie in der früheren Prüfungsordnung, von „allgemeiner Bildung" die Rede. Im Sprachgebrauch der Studenten hat sich der Begriff aber in Verbindung mit dem Staatsexamen doch erhalten, wenn auch die Prüfung in den Sprachen, in Geschichte und Erdkunde weggefallen ist.

Die in Religion, Philosophie, Pädagogik und deutscher Literatur[1]) an jeden Kandidaten zu stellenden Anforderungen sind in folgenden Paragraphen besonders angegeben:

§ 11. Bekanntschaft mit dem Inhalt und dem Zusammenhang der heiligen Schrift; eine allgemeine Übersicht über die Geschichte der christlichen Kirche und Kenntnis der Hauptlehren der Konfession.

§ 12. Jeder Kandidat hat in der mündlichen Prüfung nachzuweisen, daß er klassische Werke der neueren deutschen Literatur mit Verständnis gelesen und mit den Bedingungen des korrekten Gebrauchs der deutschen Sprache sich vertraut gemacht hat.

§ 26. Kenntnis der wichtigsten logischen Gesetze, der Haupttatsachen der empirischen Psychologie und den wesentlichsten zu ihrer philosophischen Erklärung eingeschlagenen Richtungen. Bekanntschaft mit den philosophischen Grundlagen der Pädagogik und Didaktik und mit den wichtigsten Tatsachen ihrer Entwicklung seit dem 16. Jahrhundert. Ferner hat sich jeder Kandidat darüber auszuweisen, daß er eine bedeutende philosophische Schrift mit Verständnis gelesen hat. In der Geschichte der Philosophie muß jeder Kandidat über die Hauptmomente bestimmt orientiert sein.

Die Forderungen in der Religionslehre und in der Philosophie und Pädagogik sind also wesentlich die gleichen geblieben. Neu sind aber

1) Bonitz hatte in seinen oben erwähnten Anträgen auf der Schulkonferenz von 1873 nur Philosophie und Pädagogik beibehalten!

die Forderungen in deutscher Literatur. Zu diesen Anforderungen sagen die amtlichen Bemerkungen noch folgendes:

Auf die Beherrschung der deutschen Sprache für schriftlichen und mündlichen Gebrauch und auf Erweckung des Interesses für die Meisterwerke der deutschen Literatur und die Achtung vor ihnen hinzuwirken, ist an deutschen höheren Schulen Aufgabe nicht bloß der wenigen diesem Unterrichtsgegenstande besonders zugewiesenen Lehrstunden, sondern ist durch das Zusammenwirken des gesamten Unterrichts zu erreichen.

Durch den an alle Kandidaten gerichteten Anspruch wird nicht der Nachweis von Kenntnissen in der Literaturgeschichte erfordert – eine solche Forderung würde überdies unvermeidlich zu einer flüchtigen Einprägung gedächtnismäßigen Stoffes führen – vielmehr ist der Kandidat veranlaßt zu zeigen, daß er nicht ein Fremdling in den Schöpfungen der klassischen deutschen Literatur ist. – Nach manchen Anzeichen wird es nicht als überflüssig zu betrachten sein, die zukünftigen Lehrer unserer höheren Schulen tatsächlich daran zu erinnern, welche Ansprüche sie als Lehrer an deutschen Schulen notwendig an ihre eigene Bildung im Deutschen zu stellen haben.

Leider wurde der an sich verständige und gute Zweck, diese Prüfungsforderung im Deutschen durch die Art der Prüfung nicht selten vereitelt. Indem diese Prüfung von Spezialisten, nämlich Professoren der Germanistik, abgehalten wurde, kam es doch wiederholt zu Fragen, die viele Einzelkenntnisse in der gelehrten Literaturgeschichte voraussetzten. So wurde ein sehr tüchtiger und sehr allgemein gebildeter jung verstorbener Mathematiker in dieser Prüfung von einem sehr berühmten Germanisten gefragt, wo Lessing seinen Faust veröffentlicht habe; weiter sollte er genau den Gedankengang des zweiten Teils von Goethes Faust angeben. Die erste Frage konnte nicht beantwortet werden, auch die zweite nicht mit der geforderten Genauigkeit. Er genügt daher den „Anforderungen an eine allgemeine Bildung nur in bescheidenem Maße".

Eine solche entschieden mißbräuchliche Art der Prüfung war früher wohl da möglich, wo die Prüfung ohne jeden Zeugen in der Wohnung des Examinators stattfand. Hiervon wird weiter unten die Rede sein, wo die Zusammensetzung der Kommission besprochen wird.

An schriftlichen häuslichen Arbeiten werden nach § 29 drei verlangt. Eine philosophische oder pädagogische und je eine aus jedem der beiden Hauptfächer. „Wenn zwei von dem Kandidaten gewählte Hauptfächer in solcher Beziehung stehen, daß die Prüfungskommission die Gründlichkeit des Studiums derselben durch eine Aufgabe ermitteln zu können glaubt, so ist es zulässig, für dieselbe nur eine Aufgabe zu stellen."

Für Mathematik und Physik scheint kaum von dieser Vereinigung Gebrauch gemacht zu sein. Lazarus Fuchs z. B. hat, solange er in Berlin Mathematik und Physik prüfte, immer zwei Aufgaben gestellt, wie das von ihm über die Aufgaben geführte Heft zeigt, das sein Sohn mir zur Einsicht freundlichst zur Verfügung gestellt hat.

Die Themen der Prüfungsaufgaben aus der Mathematik werden

in Band III allgemein besprochen werden, da sie als notwendige Folge der Art des Studiums erscheinen. Eine Druckschrift konnte als Ersatz der schriftlichen Arbeit gelten.

Die Arbeiten sind in deutscher Sprache anzufertigen, sofern nicht der Kandidat für Abfassung in einer anderen Sprache die Genehmigung der Prüfungskommission nachgesucht und erhalten hat. Die philosophische oder pädagogische Arbeit mußte aber jedenfalls in deutscher Sprache abgefaßt sein. Man beachte den Fortschritt seit 1866. Damals war den Mathematikern und Naturwissenschaftlern der Gebrauch der deutschen Sprache für die Facharbeit gestattet.

Die Arbeiten waren nach 3 mal 8[1]) Wochen abzuliefern, doch konnte die Frist auf Gesuch um weitere 24 Wochen durch die Kommission verlängert werden. Eine weitere Verlängerung konnte dann vom Minister genehmigt werden. Die erste Verlängerung ist recht häufig eingetreten gerade auch bei sehr tüchtigen Studenten, die umfangreiche wissenschaftliche Abhandlungen lieferten, aus denen dann vielfach Dissertationen entstanden.

Außerdem war die Kommission befugt, Klausurarbeiten von mäßigem Umfange zu verlangen. In der Mathematik ist wohl meistens bei einer Prüfung für die mittleren Klassen eine solche Klausurarbeit verlangt worden, z. B. die Diskussion einer Kurve, Bestimmung der Maxima, Minima, der Wendepunkte usw.

Den Klausurarbeiten entsprachen in der Physik die Ausführung einiger leichterer Experimente im physikalischen Kabinett.[2]) Davon war nur abzusehen, wenn durch amtliche Zeugnisse der ausreichende Nachweis über die Bekanntschaft mit den wichtigsten physikalischen Instrumenten und ihrer Handhabung geführt ist.

Wer die Prüfung nicht bestanden hatte, konnte vor derselben Kommission eine Wiederholungsprüfung ablegen. Die Wahl einer anderen Kommission mußte der Minister genehmigen.

Außerdem gab es eine innerhalb drei Jahren notwendig nachzuholende Ergänzungsprüfung für die, die nur ein bedingtes Oberlehrer- oder Lehrerzeugnis erhalten hatten, d. h. nämlich den allgemeinen Forderungen nicht genügt hatten. Diese Kandidaten wurden zum Probejahr zugelassen, mußten aber vor der endgültigen Anstellung die Lücken ausfüllen.

Schließlich war es noch jedem Kandidaten unbenommen, sein Zeugnis durch eine Erweiterungsprüfung zu verbessern, besonders ein Lehrerzeugnis in ein Oberlehrerzeugnis zu verwandeln. Solcher Erweiterungsprüfung haben sich noch manche 30–40 jährige Lehrer unter-

1) Die Prüfungsordnung von 1887 selbst schreibt noch 3 mal 6 Wochen vor: in einer Ergänzungsverfügung ist aber schon zwei Jahre später die Frist in 3 mal 8 Wochen geändert worden.

2) Dieser altertümliche Ausdruck „physikalisches Cabinett" steht tatsächlich noch in der Prüfungsordnung von 1887.

zogen, um in den Genuß des höheren Gehalts zu gelangen. Auch führte die Überfüllung im höheren Lehrfache in den achtziger Jahren vielfach zu einer ungesunden unwissenschaftlichen „Fakultätenjagd". Die Form der ausführlichen Zeugnisse blieb im allgemeinen die gleiche wie bisher und mag durch folgende Zeugnisse erläutert werden:

X. Y.[1]), geboren am 17. Juni 1871 in B., Sohn des verstorbenen Kaufmanns Y., ... Konfession, hatte seine wissenschaftliche Vorbildung auf dem Realgymnasium in B. erhalten. Von demselben mit einem Zeugnisse der Reife vom 22. März 1889 entlassen, hatte er sich in der Zeit vom Sommersemester 1889 bis zum Schluß des Sommersemesters 1893 auf den Universitäten Gießen, Berlin und Halle dem Studium der Mathematik und Geographie gewidmet und an Seminarübungen für Mathematik und Geographie teilgenommen.

Nachdem er sich bei der unterzeichneten Kommission zur Prüfung für das Lehramt vorschriftsmäßig gemeldet hatte, wurde er nach Einreichung der schriftlichen Prüfungsarbeiten der mündlichen Prüfung am 2. und 3. Februar 1894 unterzogen, worüber ihm das nachfolgende Zeugnis erteilt wird:

1. Die mathematische Prüfungsarbeit, welche die Anziehung von Segmenten des dreiachsigen Ellipsoids und des elliptischen Paraboloids betraf, zeugte nicht nur von großem Fleiße, sondern auch von selbständigem Nachdenken und anerkennenswerter Gewandtheit in der Ausführung analytischer Entwicklungen. Ebenso günstig war das Ergebnis der mündlichen Prüfung, der Kandidat zeigte sich in allen Teilen der niederen und höheren Mathematik wohl bewandert. Insbesondere hatte er auch die schwierigen Teile der höheren Analysis, wie die Lehre von den bestimmten Integralen und die von den elliptischen Funktionen, ferner die höhere Geometrie, die analytische Mechanik und die Potentialtheorie mit Erfolg studiert. Es konnte ihm daher die Lehrbefähigung in der Mathematik für alle Klassen zuerkannt werden mit dem Bemerken, daß er den Anforderungen der Prüfungsordnung in lobenswerter Weise entsprochen hat.

2. Bei einer Vorprüfung auf dem physikalischen Laboratorium zeigte sich der Kandidat über die Einrichtung und den Gebrauch der vorgelegten Apparate gut unterrichtet. In der Hauptprüfung wurde erörtert die Theorie der galvanischen Elemente, Faradays Gesetz der festen elektrolytischen Aktion, Widerstandsmessung mit Wheatstones Brücke für Drähte und polarisierbare Leiter, die Ableitung der Kirchhoffschen Sätze, Definition und Bestimmung der Dielektrizitätskonstante, der Ausdruck der elektrischen Energie und des magnetischen Potentials. Die Antworten legten durchweg von dem erfolgreichen Studium und eindringenden Verständnis des Kandidaten Zeugnis ab, das er schon in den theoretisch-physikalischen Übungen bewiesen hatte. Es kann ihm die Lehrbefähigung in der Physik für Prima unter besonderer Anerkennung seiner guten Leistungen erteilt werden.

3. In der Erdkunde hat er andauernden Studien mit regem Interesse obgelegen und sich auch mit gutem Erfolg mehrere Semester hindurch an den Übungen des hiesigen Seminars für Erdkunde beteiligt. Die mündliche Prüfung erwies einen genügenden und über fast alle Gebiete der Wissenschaft ziemlich gleichmäßig verbreiteten Wissensstand; nur mit der Methodik der schulmäßigen Erdkunde hatte sich der Kandidat noch nicht systematisch beschäftigt. Seine schriftliche Prüfungsarbeit über das Thema: „Welches sind die maßgebendsten erdkundlichen Grundlagen für den Verkehr der Naturvölker?" zeigt gleich seinen Vorträgen im Seminar Klarheit des

---

1) Ausnahmsweise sei hier der Name genannt: Es ist der so früh verstorbene Oberlehrer am Charlottenburger Realgymnasium und Privatdozent an der technischen Hochschule Dr. Eugen Meyer. Vgl. E. Salkowski, Eugen Meyer †. Sitzungsbericht der Berliner Mathematischen Gesellschaft. IX. Jahrgang, 2. Stück, S. 9, und W. Lorey, Eugen Meyer †. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter. 1911. Nr. 1.

Urteils und des Ausdrucks. Demnach kann ihm der erdkundliche Unterricht durch alle Klassen übertragen werden.

4. Die philosophische Arbeit, welche Humes Philosophie der Mathematik darstellen, auf ihren Zusammenhang mit den Lehren Berkeleys prüfen und sachlich würdigen sollte, ist dieser Aufgabe nach allen Seiten gerecht geworden. Es ist eine in Vorführung und Vergleichung des historischen Materials durchaus sorgfältige, methodisch gründliche und wohlgeordnete, in der Darstellung klare, in Beurteilung und gelegentlicher Polemik scharfsinnige und daher in jedem Betracht vorzügliche Arbeit. In der mündlichen Prüfung zeigte sich, daß Kandidat, zwar in der alten Philosophie weniger selbständig gearbeitet und sich vorzugsweise mit den naturphilosophischen Partien beschäftigt, daß er auch in der neueren Philosophie noch Lücken auszufüllen hat, aber zugleich, daß er überall das Wesentliche mit Verständnis und treffendem Urteil zu erfassen imstande gewesen ist. Er zeigte ferner eine durchdachte Kenntnis der Lehren der Logik und eine gute Bekanntschaft mit den Problemen der Psychologie und mit deren wichtigsten Lösungsversuchen. Danach wird ihm, unter Voraussetzung der Vervollständigung seiner historischen Kenntnisse, unbedenklich die Befähigung zum Unterricht in der philosophischen Propädeutik zugesprochen werden dürfen.

Auch über pädagogische Fragen und über die Geschichte der neueren Pädagogik wußte er sachkundige Auskunft zu geben, so daß er den allgemeinen Anforderungen in löblicher Weise entsprach.

5. Im Deutschen genügte er den allgemeinen Anforderungen in löblicher Weise.

Nach den Ergebnissen der gesamten Prüfung wird dem Schulamtskandidaten Herrn X. Y. durch dieses

Oberlehrer-Zeugnis

die wissenschaftliche Befähigung zuerkannt, die M a t h e m a t i k, die P h y s i k, die G e o g r a p h i e und die p h i l o s o p h i s c h e P r o p ä d e u t i k in den o b e r e n Klassen einer höheren Schule zu lehren.

Bezüglich der Ableistung des Probejahres wird der Kandidat auf § 41 der Prüfungsordnung verwiesen.

Halle a./S., den 3. Februar 1894.

Die Königliche Wissenschaftliche Prüfungskommission.

L. S. gez. Keil. Kirchhoff. Haym. W a n g e r i n. Burdach. D o r n.

Zeugnis
der Königlichen Wissenschaftlichen Prüfungs-Kommission
zu Göttingen.

Herr X. Y., geb. 1873 zu Z., evangelischer Konfession, Sohn eines Arztes, hat sich bei der unterzeichneten Kommission zur Prüfung pro facultate docendi in Mathematik und Physik für alle Klassen als den Hauptfächern sowie in Chemie und Mineralogie und in der deutschen Sprache für die mittleren Klassen als den Nebenfächern gemeldet. Seine Vorbildung hat derselbe zuletzt auf dem Gymnasium zu Z. erhalten. Nachdem er von dieser Anstalt mit einem Reifezeugnisse vom 12. September 1891 entlassen worden war, widmete er sich auf den Universitäten zu München, Halle und Göttingen dem Studium der Mathematik. In Göttingen war er 4 Semester Mitglied des mathematisch-physikalischen Seminars.

Die von uns für die schriftlichen Hausarbeiten gestellten Aufgaben waren folgende:

1. Philosophie: Kants Lehre von Raum und Zeit nach ihren Motiven und Konsequenzen.

2. Mathematik: Über die von Georg Cantor entwickelten Begriffe der Mengenlehre und deren Bedeutung für eine strenge Grundlegung der Analysis.

3. Physik: Gibbs Theorie des Phasenzusammenhanges soll entwickelt und durch Beispiele erläutert werden.

Nachdem er die Hausarbeiten rechtzeitig eingeliefert hatte, wurde er gestern

und heute einer mündlichen Prüfung unterzogen. Über das Ergebnis der gesamten Prüfung lautet das Urteil folgendermaßen:

1. Philosophie: Die Abhandlung fließend geschrieben, zeigt Kenntnisse und Nachdenken. Die mündliche Prüfung in Philosophie und Pädagogik ergab befriedigendes Wissen.

2. Mathematik: Die schriftliche Arbeit gibt über den in Betracht kommenden sehr abstrakten Gegenstand ein scharfsinniges und genaues Referat. Bei der mündlichen Prüfung zeigte sich eine gute und klare Auffassung in allen Gebieten, welche funktionentheoretischen oder arithmetischen Charakter tragen. Dagegen fehlt die Übung der Raumanschauung und wohl überhaupt die Begabung für geometrische Auffassung. Trotz dieses Mangels kann dem Kandidaten in Anbetracht seiner allgemeinen mathematischen Fähigkeiten die Lehrbefähigung für alle Klassen erteilt werden.

3. Physik: Die schriftliche Arbeit ist gut geschrieben, sie zeigt eingehende Kenntnis der einschlägigen Literatur, richtiges Urteil und klare Auffassung. Die mündliche Prüfung ergab gute Kenntnisse in dem Gebiete der Mechanik, der Wärme und Optik, sowie den hiermit zusammenhängenden Teilen der Elektrizitätslehre, und ließ in erfreulicher Weise erkennen, daß der Kandidat mit Eifer und Erfolg bestrebt war, seine Kenntnisse durch selbständige weitergehende Studien zu vertiefen. Er ist zur Erteilung des physikalischen Unterrichts in allen Klassen wohl befähigt.

4. Chemie: Der Kandidat zeigte in der mündlichen Prüfung gute theoretische Kenntnisse, so daß ihm die Lehrbefähigung für mittlere Klassen sehr wohl erteilt werden kann.

5. Mineralogie: Die Kenntnisse waren nicht ohne Lücken, so daß dem Kandidaten der Unterricht in den mittleren Klassen nur in der Erwartung anvertraut werden kann, daß er diese Lücken auszufüllen sucht.

6. Deutsch: Die Prüfung, die sich auf Geschichte der Sprache, Grammatik, Metrik, Lehre von den Dichtungsarten und Literaturgeschichte der neueren Zeit erstreckte, ergab so gute Kenntnisse des Kandidaten, daß ihm der deutsche Unterricht in den mittleren Klassen wohl anvertraut werden darf. In der Religion entsprechen seine Kenntnisse den allgemeinen Anforderungen.

Nach diesen Ergebnissen wird dem Herrn X. Y. durch dieses Oberlehrerzeugnis die wissenschaftliche Befähigung zuerkannt, als Hauptfächer die Mathematik und Physik in allen Klassen, als Nebenfächer die Chemie, Mineralogie und deutsche Sprache in den mittleren Klassen einer höheren Schule zu lehren.

Göttingen, den 26. Oktober 1895,
Königliche Wissenschaftliche Prüfungskommission
gez. Viertel, Riecke, Baumann, Knoke, Wallach, v. Koenen, Klein, M. Heyne.

Prüfungs-Zeugnis
für Herrn ...

Der Kandidat des höheren Schulamts, Herr ..., geboren ... zu ..., Sohn eines ..., ... Konfession, hat sich bei der unterzeichneten Kommission im ... zur Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen gemeldet und zwar in Mathematik und Physik als Hauptfächer wie für Geographie als einem Nebenfache für alle Klassen und in Botanik und Zoologie für die mittleren Klassen. Von dem Gymnasium zu ... mit einem Maturitätszeugnis vom ... entlassen, widmete er sich von ... bis dahin ... zu Marburg, Zürich, Berlin und wieder in Marburg dem Studium der Mathematik und Physik. In Marburg war er vier Semester Mitglied des mathematischen Seminars.

A. Zur häuslichen Bearbeitung wurden ihm die folgenden Aufgaben gestellt:

1. Über Kants Analogien der Erfahrung.

2. Es soll mit Anwendung der elliptischen Funktionen die Bewegung eines in einer vertikalen Ebene schwingenden einfachen Pendels untersucht werden unter der

Voraussetzung, daß auf dieselbe außer der Schwerkraft eine der Entfernung von der vertikalen Achse proportionale horizontale Kraft (Zentrifugalkraft) wirkt.

3. Kritischer Überblick über den gegenwärtigen Stand der Frage nach der Entstehung der schweizerischen und oberbayrischen Seen.

Die über diese Arbeiten abgegebenen Urteile lauten:

ad 1. Noch im allgemeinen genügend.

ad 2. Einer der Hauptfälle der Bewegung ist infolge eines Versehens übergangen. Die übrigen sind aber mit Sorgfalt und Genauigkeit untersucht und auf elliptische Funktionen zurückgeführt, so daß die Arbeit als völlig genügend bezeichnet werden kann.

ad 3. Der Verfasser hat seine Aufgaben in recht befriedigender Weise gelöst.

B. In Klausur hatte er einige Pflanzen zu beschreiben und deren Familiencharakter anzugeben.

Die Arbeit fiel gut aus.

Ferner hatte er zu erörtern: Die Bestimmung des spezifischen Gewichts fester Körper.

Das Urteil über diese Arbeit lautet:

Im ganzen gut.

Die am heutigen Tage mit dem Kandidaten vorgenommene mündliche Prüfung ergab folgende Resultate:

1. In der allgemeinen Bildung Religion betreffend zeigte der Kandidat gute, Pädagogik und Philosophie betreffend genügende Kenntnisse. In Bezug auf Deutsch entsprach er in erfreulicher Weise den Anforderungen der Prüfungsordnung.

2. In der Mathematik zeigte der Kandidat in allen in der Prüfung berührten Gegenständen gute und sichere Kenntnisse.

3. In der Physik waren die Kenntnisse des Kandidaten in den Gegenständen, auf welche sich die Prüfung erstreckte, genügend, wenn auch an mehreren Punkten eine größere Sicherheit zu wünschen gewesen wäre.

4. In der Geographie fehlte es in der Länderkunde überhaupt, aber namentlich von Asien und Afrika noch hier und da an Kenntnissen, während in der mathematischen und physikalischen Geographie allenthalben Sicherheit und Verständnis zutage trat. Mit Rücksicht darauf, wie auf den Ausfall der schriftlichen Arbeiten kann dem Kandidaten, da eine baldige Ausfüllung der noch vorhandenen Lücken von ihm mit Sicherheit erwartet werden darf, die Lehrbefähigung für alle Klassen zugesprochen werden.

5. In der Botanik zeigte sich der Kandidat sowohl in allgemeiner als spezieller Botanik genügend unterrichtet.

6. In der Zoologie erwiesen sich die Kenntnisse des Kandidaten sowohl auf dem Gebiete der Anatomie als Systematik im allgemeinen recht befriedigend.

Auf Grund der Ergebnisse der gesamten Prüfung wird Herrn ... durch dieses

Oberlehrer-Zeugnis

die wissenschaftliche Befähigung zuerkannt, Mathematik und Physik in allen Klassen, ebenso Geographie unter der oben gemachten Voraussetzung in allen Klassen und Botanik und Zoologie in den mittleren Klassen einer höheren Schule zu lehren.

Bezüglich der Ableistung des Probejahres wird auf § 41 der Prüfungsordnung verwiesen.

Marburg, den ...

Königliche Wissenschaftliche Prüfungskommission

gez. Th. Zinke, H. Weber, Göbel, Bergmann, Feußner, Greeff, Achelis, Th. Fischer.

6. Die Aufnahme der Prüfungsordnung von 1887 und die Vorbereitung einer neuen Ordnung.

Ohne Kritik und Widerspruch wurde die Prüfungsordnung natürlich nicht aufgenommen. Aus Universitätskreisen heraus waren Kundgebungen erfolgt, nach denen durch die neue Prüfungsordnung Befürchtungen für die Wissenschaft entstanden waren. Gegenüber diesen Kundgebungen erklärte der damalige Kultusminister von Gossler, unter dessen Namen die Prüfungsordnung herausgegeben war, in einer Parlamentsrede am 6. März 1889[1]) unter ausdrücklichem Hinweis auf jene Vorschriften seinen Standpunkt dahin, daß, „sowohl auf der Universität als im Examen derjenige zu bestehen habe, welcher als Lehrer vorgebildet sei für seinen praktischen Beruf, und nicht derjenige, welcher sich einer gelehrten Tätigkeit zuwende. Nicht die Züchtung von Gelehrten, sondern die Heranbildung praktischer Lehrer sei die Aufgabe des philologischen (sic!) Unterrichts, und die Gelehrten, die doch die Minderheit bildeten, fänden sich Gott sei Dank bei der Trefflichkeit unserer Professoren und der Gediegenheit unserer Lehreinrichtungen auf den Universitäten gewissermaßen von selbst."

Diese Kundgebungen aus Universitätskreisen dürften wesentlich durch die Altsprachler veranlaßt gewesen sein. In letzter Linie hingen die Kundgebungen natürlich mit der Auffassung über die Aufgabe der Universitäten zusammen und insbesondere der philosophischen Fakultäten, eine Frage, die in Band III dieser Abhandlungen zu besprechen ist. Hier sei an die viel Widerspruch erregende Rede eines führenden Altsprachlers, Ullrich v. Wilamowitz-Moellendorf, erinnert: Philologie und Schulreform[2]), in der er es ausdrücklich ablehnt für solche, die nur Oberlehrer an Gymnasien werden wollen, zu lesen.

Auch M. Simon erklärt in seiner Didaktik[3]) des mathematischen Unterrichts die Prüfungsordnung von 1887 für einen Rückschritt: „Die ältere Ordnung gab die Fakultas für alle Klassen nur dem, der sich als durchgebildeter Mathematiker erwies, imstande die Wissenschaft zu fördern; und das war das Richtige."

Daß auch die Prüfungsordnung von 1887 dem Sinne nach die Lehrbefähigung für alle Klassen in Mathematik nur dem geben will, der in Mathematik wirklich durchgebildet ist, kann man m. E. nicht bezweifeln, wenn man die oben angeführten amtlichen Bemerkungen zu der Prüfungsordnung in Betracht zieht. Es erhebt sich freilich die wichtige Frage, was unter mathematischer Durchbildung zu verstehen ist, eine Frage, die in Bd. III ausführlich erörtert wird. Als Einzelheit mag hier

1) Vgl. Fries, Die wissenschaftliche und praktische Vorbildung für das höhere Lehramt. 2. Aufl., München, Becksche Verlagsbuchhandlung 1910, S. 4.

2) Göttingen. L. Horstmann. 1902.

3) Simon, Rechnen und Mathematik. In Baumeister, Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre. 1895. 1. Aufl., S. 17.

gesagt sein, daß ein Kandidat jedenfalls nicht mathematisch durchgebildet ist, der im Examen auf die Frage, was die Aussage bedeute, π sei eine transzendente Zahl, die verblüffende Antwort gibt: π ist weder rational noch irrational!

Zweifel an mathematischer Durchbildung kommen wohl auch, wenn jemand an eine Hyperbel von einem Punkt vier Tangenten legt; aber auch, wenn ein ordentlicher Professor der Mathematik einer ausländischen Universität bei der Besichtigung eines Instituts für angewandte Mathematik den führenden Mathematiker fragt: gibt es nicht auch ein Journal für reine und angewandte Mathematik?

Andererseits sei hier nur noch, um die Wichtigkeit der Frage der allgemeinen mathematischen Bildung hervorzuheben, auf das Begleitwort von Study hingewiesen, das er der von Beck gelieferten Übersetzung der Algebra Bôchers mitgegeben hat. Die Notwendigkeit der Übersetzung begründet Study auch wohl mit Recht damit, daß in diesem Buche mathematische Dinge enthalten sind, die heute zur allgemeinen Bildung der Mathematiker gehören. Ohne daß aber hier schon der Begriff der allgemeinen mathematischen Bildung festgelegt wird, sei aber soviel ausdrücklich betont, daß mathematische Durchbildung, wie sie im Staatsexamen für die Lehrbefähigung auch für die oberen Klassen zu fordern ist, wohl zu unterscheiden ist von der mathematischen Bildung, die erforderlich ist zur Habilitation als Privatdozent.

Die Prüfungsordnung von 1887 hat nur zwölf Jahre gegolten. Ein Jahr vor dem Hinscheiden Kaiser Wilhelms I. erlassen, gehört sie einer Zeit an, die dem höheren Schulwesen Preußens wesentliche Reformen brachte. Der an das Staatsministerium gerichtete Königliche Erlaß vom 1. Mai 1889, den Fürst v. Bismarck noch gegengezeichnet hat, leitete die amtliche Reformbewegung ein. Indem dieser Erlaß von den neuen Aufgaben der Schule spricht, sagt er gegen Schluß[1]: „Insbesondere wird es darauf ankommen, die Lehrer zu befähigen, die neuen Aufgaben mit Hingebung zu erfassen und mit praktischem Geschick durchzuführen."

In der Sitzung vom 27. Juli 1889 hat darauf das Staatsministerium sich über bestimmte Vorschläge zur Ausführung des Erlasses verständigt. Unter diesen Vorschlägen erscheint der Leitsatz[2]: Die Prüfungsordnung für die Kandidaten des höheren Schulamts ist im Sinne der vorstehenden Anordnungen zu revidieren. Durch Allerhöchste Ordre vom 30. August 1889 wurde der Kultusminister beauftragt, die zur Ausgestaltung des Unterrichtswesen erforderlichen Anordnungen zu treffen. Daraufhin erging unter dem 18. Oktober 1890 an sämtliche Provinzialschulkollegien ein Ministerialerlaß, in dem es heißt[3]:

---

1) Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts. Im Auftrage des Ministers der geistlichen Unterrichts- und Medizinalangelegenheiten. Berlin 1891. Verlag Wilhelm Hertz. Im folgenden angeführt als „Schulkonferenz 1890".

2) Schulkonferenz 1890 S. 8. 3) Schulkonferenz 1890 S. 9.

Dem höheren Schulwesen fällt hiernach die Aufgabe zu, in noch wirksamerer Verfolgung seiner bisherigen Ziele diejenigen Gesellschaftsklassen, welche zu maßgebendem Einflusse auf unser gesamtes Volksleben berufen sind, nicht nur mit dem dazu nötigen fruchtbringenden Wissen auszurüsten, sondern ihnen auch durch eine auf dem Grunde des Christentumes und des deutschen Volksgeistes beruhende Erziehung eine dauernde Richtung des Willens und des Charakters zu geben. Dafür werden vor allem diejenigen Lehrgegenstände voll auszunutzen sein, welche Gefühl und Willen unmittelbar zu bestimmen geeignet sind. Neben dieser allen höheren Schulen gemeinsamen Aufgabe sind die den einzelnen Schularten gesteckten Ziele fest im Auge zu behalten. Wird aber hierbei überall als Ergebnis des Unterrichtes eine nicht bloß höher gebildete, sondern auch geistig gesammelte und sittlich gefestigte Persönlichkeit erstrebt, so wird auch alle wissenschaftliche Arbeit der höheren Schule in den Dienst der Erziehung treten. Dies wird allgemein anerkannt, aber über die zur Erreichung jenes Zieles einzuschlagenden Wege herrschen verschiedene und zum Teil einander widersprechende Ansichten. Es hat sich daher empfohlen, durch gemeinsame Beratung von Männern verschiedener Lebensstellung zu ermitteln, welche von den zahlreichen Vorschlägen zur Verbesserung unseres höheren Schulwesens berechtigt und wie dieselben untereinander auszugleichen, besonders aber, wie sie für die geschichtlich überkommenen Schulformen zu verwerten sind.

Seine Majestät der König haben geruht, eine solche Beratung allergnädigst zu genehmigen.

Dieselbe wird zur Zeit vorbereitet. Sobald ihre Ergebnisse vorliegen, wird erwogen werden, in welcher Weise und in welchem Umfange sie bei der Ausgestaltung des Lehrplanes der höheren Schulen zu verwenden sind.

Es waren vierundvierzig Männer aus verschiedenen Lebensstellungen, die vom Minister unter dem 30. Oktober 1890 eine Einladung zu einer Donnerstag, den 4. Dezember, im Kultusministerium zu eröffnenden Konferenz erhielten.

Die mathematischen Fächer waren unter den Eingeladenen durch folgende Herren nach der Teilnehmerliste vertreten: Bertram, Stadtschulrat in Berlin, Helmholtz, ord. Professor, Präsident der Physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg, Holzmüller, Gewerbeschuldirektor in Hagen. Auch der Forschungsreisende Güssfeld, der kurze Zeit Privatdozent der Mathematik gewesen war, gehörte zu den Teilnehmern. Unter den vierzehn der Konferenz vorgelegten Fragen kommt für uns die Frage 11 in Betracht:

Welche Änderungen sind bezüglich der wissenschaftlichen Ausbildung der künftigen Lehrer an höheren Schulen erforderlich? Mit dieser Frage wurde Nummer 4 der Fragen verbunden, die der Kaiser in seiner Eröffnungsrede der Konferenz vorgelegt hatte, nämlich die Frage: Sind für die neue Lehrmethode wenigstens die Hauptpunkte aufgestellt?

Berichterstatter für die Frage waren der Brandenburger Provinzialschulrat Klix und der Romanist der Berliner Universität Professor Tobler. Nur dieser handelt in seinen Leitsätzen auch von der Prüfungsordnung. Es heißt bei ihm in Satz 1[1]):

Obgleich bezüglich des Bestandes an Lehrfächern und der in diesen zu erreichenden Ziele zwischen den Arten höherer Schulen wesentliche Unterschiede zur Zeit bestehen und voraussichtlich fortdauern werden, empfiehlt es sich bei möglichst ein-

1) Schulkonferenz 1890 S. 54 ff.

heitlicher Ausbildung ihrer Lehrer zu beharren, auch von der Gleichheit der Prüfungsforderungen für jede der drei Stufen der Unterrichtsberechtigung nicht abzugehen, damit

a) die Gleichartigkeit wissenschaftlicher Durchbildung innerhalb des Lehrerstandes möglichst gewahrt bleibe;

b) ein Austausch von Lehrkräften zwischen den Schulen verschiedener Art ausführbar bleibe;

c) das Zurücktreten einzelner Fächer an der einen oder der anderen Art von Schulen einen Ausgleich durch die nicht minder volle Beherrschung des Faches seitens seiner Lehrer finde.

Wichtig ist auch Toblers 7. Leitsatz:

Wer mit wirklicher Reife für philologische Studien zur Universität abgeht, kann in drei bis vier Jahren an derselben das durch die Prüfungsordnung geforderte Wissen und Können erreichen, wenn er es an eigener Arbeit nicht fehlen läßt, und ihm auch die besondere Anlage nicht abgeht, die zu gewandter Handhabung fremder Sprachen unerläßlich ist.

Unheilvoll würde es sein, wenn in Prüfungskommissionen die Ansicht Geltung haben sollte, die Prüfungsbestimmungen seien so zu behandeln, daß jeder auch nur mäßig begabte, ungenügend vorgebildete, die Vorlesungen fleißig besuchende, vielleicht aber nebenher alle freie Zeit auf Unterrichterteilen verwendende und zur Anschaffung der notdürftigsten literarischen Hilfsmittel zu arme Student nach drei Jahren ihnen entsprechen könne.

In der Behandlung der Fragen traten die mathematischen Fächer naturgemäß zurück, deren Vertreter sich auch nicht an der Debatte beteiligten. Immerhin ist für unsere Zwecke hier heute noch beachtenswert, was der Hauptberichterstatter damals ausführte in den Worten[1]):

Man hat wohl verwundert bemerkt, daß, wenn man einen Lehrer einer höheren Schule fragt, was er sei, er nicht antwortet, er sei Lehrer, sondern er sei Philologe, Mathematiker, Naturhistoriker und dergleichen. Das ist gewiß in der Ordnung. Lehrer kann er nur sein, wenn er Philologie, Mathematik, Naturwissenschaft oder sonst ein Fach vertritt, aber er soll an erster Stelle Lehrer sein in seinem Amt und an zweiter Fachmann. Glücklicherweise ist nun die Vorbildung der Lehrer noch nicht genötigt, den Weg zu gehen, den die Wissenschaft gegangen ist, indem sie in großartiger Weise sich spezialisiert. Wenn, wie den Herren bekannt ist, Examinatoren für Botanik und Zoologie nicht mehr da sind, ja, wenn besondere Examinatoren für alte, für mittlere und neuere Geschichte vorhanden sind, so kann eine solche Spezialisierung nicht Ziel der Vorbildung des Lehrers sein.

Und ebenso sei aus der Rede des damaligen vortragenden Rates im Ministerium, Stauder, folgende Stelle angeführt:

„Meine Herren! Es ist mir mit dem Herrn Referenten, Herrn Geheimrat Klix, ein wahres Herzensbedürfnis, hier es auszusprechen, wie die wissenschaftliche Tüchtigkeit unseres preußischen höheren Lehrerstandes in der Tat eine solche ist, das wir uns glücklich schätzen können, einen solchen Lehrerstand zu besitzen. Ich halte mich dazu umso mehr für verpflichtet, als es leider Gottes in der großen Agitation vielfach Mode geworden ist, nur Steine auf unseren braven Lehrerstand zu werfen.

Ich kann ferner auch das, was der Herr Geheimrat Klix ausgeführt, und was auch Herr Professor Tobler betont hat, nur als richtig anerkennen, daß der Lehrer nicht bloß darin unterrichtet sein muß, was er in der betreffenden Klasse zu lehren hat, sondern, daß er wissenschaftlich aus dem Vollen schöpfen muß. Kann er das nicht, so sinkt er zu leicht zum Tagelöhner herab und die Jugend wird nur den Nachteil davon haben. Außerdem

1) Schulkonferenz 1890 S. 600. 2) Schulkonferenz 1890 S. 608.

aber bedenken Sie, meine Herren, daß für viele dieser Männer, die draußen im Leben, fern von wissenschaftlicher Anregung arbeiten müssen, das Zurückziehen auf ein wissenschaftliches Lieblingsstudium, zu dem sie auf der Universität den Grund gelegt haben, oft die einzige Erhebung ist, daß es die schönsten Weihestunden für einen solchen Lehrer sind, wenn er aus seinen wissenschaftlichen Lieblingsstudien neue Nahrung für seinen Beruf schöpft.

Das Ergebnis der Besprechung über die Frage 11 wurde schließlich in einigen nahezu einstimmig gefaßten Leitsätzen zusammengefaßt, von denen die vier ersten für die Staatsprüfung gewisse Bedeutung haben; sie lauten[1]):

1. Grundsätzliche Änderungen bezüglich der wissenschaftlichen Ausbildung der künftigen Lehrer an höheren Schulen sind nicht erforderlich.

2. Die Universität und ihre Bildungsmittel haben sich für ihre wissenschaftliche Ausbildung bisher als ausreichend erwiesen.

3. Es empfiehlt sich, durch Aufstellung hodegetischer Studienpläne den Studierenden die erforderliche Anweisung für ihre Studien zu geben.

4. Es läßt sich erwarten, daß seitens der Universitat die Ausführbarkeit der Studien den Plänen entsprechend gesichert und insbesondere auch für allgemeinere zusammenfassende Vorlesungen über bestimmte Wissenschaften gesorgt wird.

Diese beiden letzten Leitsätze führen in die Frage des Universitätunterrichtes hinein, die in Band III dieser Abhandlungen zu behandeln ist; sie weist auf gewisse Mängel hin in der Einrichtung der Vorlesungen, die oben schon angedeutet waren, Mängel, die der Minister an dem gleichen Tage, an dem die Prüfungsordnung erlassen wurde, in einem vertraulichen Zirkularerlasse an die philosophischen Fakultäten ausdrücklich angibt. Da dieser Erlaß, wie Stauder im weiteren Verlauf seiner oben angeführten Rede erwähnt, auch von der Mathematik handelt, wird er gleichfalls in Band III zu besprechen sein.

Über die Prüfungsordnung selbst wurde nur wenig gesprochen. Die von Tobler angeregte Beseitigung der Prüfung in Religion, von der er mit Recht es als ein Unglück ansieht, wenn es zu einer Prüfung der religiösen Gesinnung der Lehramtskandidaten kommen sollte[2]), hat leider keine Beachtung gefunden. Auch was er über die Prüfung in Philosophie sagt, scheint wenig bekannt geworden zu sein. Er ist nicht für eine Beseitigung der Philosophie aus der Prüfung, nur soll nicht lediglich Geschichte der Philosophie geprüft werden.

„Alles andere außer der Geschichte der Philosophie scheint jetzt für diese Prüfungen gar nicht vorhanden zu sein. Und doch möchte ich glauben, daß gerade bei den Lehrern mindestens eben so großes oder noch größeres Gewicht auf gewisse allgemeine Fragen zu legen ist, die für jeden Lehrer von der höchsten Bedeutung sind. Er soll doch imstande sein, einmal Rechenschaft zu geben über den Zusammenhang seines Faches mit allen übrigen Wissenschaften, dann Rechenschaft zu geben von den verschiedenen Methoden, mit welchen in den verschiedenen Wissenschaften gearbeitet wird. Das sind alles philosophische Fragen, die wichtiger erscheinen als die historischen, innerhalb deren die philosophische Prüfung sich zu drehen pflegt. Der Philologe könnte bei solcher Gelegenheit sehr wohl einmal gefragt werden, ob er sich Rechenschaft gegeben hat über die Verhältnisse, die

1) Schulkonferenz 1890 S. 647. 2) Schulkonferenz 1890 S. 60.

zwischen Denken und Sprechen bestehen können. Für jedes Fach würde sich die philosophische Prüfung von einer anderen Seite in ihrer besonderen Bedeutung darstellen."

Wenn nun auch die Konferenz von 1890 mit der Änderung der Lehrpläne, die sie sofort herbeiführte, nicht gleich auch eine neue Prüfungsordnung für das Lehramt an höheren Schulen zur Folge hatte, so ist doch der Wunsch nach einer den geänderten Verhältnissen entsprechenden Prüfungsordnung sehr bald lebhaft geworden und nicht nur in Preußen. Und nun sind es die Mathematiker der Universitäten und vieler höheren Schulen, die zu der Frage der Prüfungsordnung Stellung nehmen. Die in Bremen 1890 gegründete Deutsche Mathematiker-Vereinigung beschäftigte sich schon in ihrer 3. Jahresversammlung, die 1893 in München stattfand, auf Anregung von Herrn v. Brill mit der Frage der Prüfungsordnung für das Lehrfach der Mathematik und Physik. In der geschäftlichen Sitzung am 8. September unter dem Vorsitz von Gordan schlug v. Brill vor, ohne daß irgendwelche Verhandlungen im Vorstande vorausgegangen zu sein scheinen, daß die gegenwärtige Versammlung zu der Frage der Reform der Lehramtsprüfung Stellung nehmen möge. Nach längerer Debatte, an der sich die Herren Bauer, Gordan, Dingeldey und Lampe beteiligten, wird beschlossen, am folgenden Tage der Versammlung den definitiven Wortlaut einer Resolution vorzulegen. Am anderen Tage hatt Herr v. Brill die Resolution begründet, eine Debatte scheint sich nicht weiter angeschlossen zu haben.[1]) Bezeichnend ist es jedenfalls, daß in der ersten Sitzung außer dem Antragsteller drei süddeutsche Herren, Bauer-München, Gordan-Erlangen, Dingeldey-Darmstadt, und nur ein norddeutscher, Lampe-Berlin, gesprochen hat.

Wenn auch wesentlich durch die Rücksicht auf die bayrischen und württembergischen Verhältnisse veranlaßt, wo ja die Prüfung einen ganz anderen Charakter trug, als in Norddeutschland, wie die Berichte der Herren Wieleitner und Geck in Band II dieser Abhandlungen zeigen, haben diese Münchener Besprechungen doch auch für Norddeutschland Bedeutung; zumal sich auch dort hier und da Bestrebungen zeigten zu gunsten der praktisch pädagogischen Ausbildung die wissenschaftliche Ausbildung zu kürzen. Auch der damalige Herausgeber der Zeitschrift für mathematischen Unterricht ließ manches doch recht Bedenkliche, wie man geradezu sagen muß, Unwissenschaftliche zu Worte kommen, was seiner Zeitschrift mitunter für den Fernstehenden einen Charakter gab, der sich für ein Blatt für höhere Schulen, die doch durch die Wissenschaft für das Leben erziehen, nicht eignete. Die großen Verdienste, die der frühere Herausgeber sich durch seine Zeitschrift für die Erweckung der Interessen an methodischen Fragen des

1) Diese Angaben verdanke ich dem derzeitigen Schriftführer der Mathematiker-Vereinigung, Herrn Krazer, der sie den im Archiv aufbewahrten Akten entnommen hat.

mathematischen Unterrichtes bei den Lehrern der Mathematik erworben hat, sollen gewiß anerkannt werden; andererseits erfordert es aber auch die geschichtliche Treue, daß einmal öffentlich ausgesprochen wird, was viele Mathematiker an höheren Schulen, die wirklich Mathematiker waren, damals über die Zeitschrift dachten, weil man nach ihr allein ein falsches Bild von dem mathematischen Unterricht an den höheren Schulen und seinen Lehrern dieser Zeit bekäme.

Den Bericht über die Münchener Verhandlung von 1893, wie er im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erschienen ist, hat Herr Gutzmer in seiner Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung als Anlage abgedruckt. Da er die erste offizielle Kundgebung der deutschen Mathematiker an Hochschulen und höheren Schulen in einer Frage des Staatsexamens ist, so sei er auch hier im Wortlaut mitgeteilt. Man wolle dabei beachten, daß darin dem süddeutschen Sprachgebrauch entsprechend von Mittelschulen die Rede ist, gemeint aber die höheren Schulen in norddeutschem Sinne sind.

„Wenn auch der nächste und vornehmste Zweck der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung die Besprechung rein wissenschaftlicher Fragen ist, so erscheint es doch naturgemäß, auch Fragen des mathematischen Unterrichts in den Bereich der Diskussion zu ziehen, weil die Gesellschaft in ihrer Vereinigung von Lehrern der Mathematik an Hoch- und Mittelschulen ein hervorragendes Interesse an solchen Einrichtungen nimmt, welche die Ausbildung der Lehramtskandidaten betreffen.

Infolge der kürzlich vollzogenen Reform des Mittelschulunterrichtes in fast allen deutschen Ländern hat sich das Bedürfnis herausgestellt, auch die Prüfungsordnungen für Kandidaten des höheren Lehramts in Mathematik und Naturwissenschaften neu zu regeln, und es ist bekannt, daß die Vorbereitungen für diese Änderung vielerorts im Flusse sind. Vor allem beabsichtigt man, praktische und theoretische Kurse in Pädagogik einzurichten, welche die Kandidaten des Lehramts für die Bewältigung ihrer großen Aufgabe besser als bisher vorbereiten sollen. Es läßt sich nicht leugnen, daß in dieser Hinsicht noch manches zu tun übrig bleibt, und man kann deshalb zu diesen Bestrebungen nur Glück wünschen.

Aber manche Anzeichen sprechen dafür, daß man hier und dort auch geneigt ist, diese Seite der Vorbildung für die ausschlaggebende anzusehen, und daß, indem die Studierenden eine mehr in die Breite gehende Vorbereitung für ihren Beruf erhalten, die Gründlichkeit des Studiums und die Vertiefung in Einzelfächer notleiden könnte. Es ist aber von höchstem Werte für den zukünftigen Lehrer, daß er sich schon auf der Hochschule die Befähigung erwirbt, einen einzelnen, wenn auch beschränkten Zweig seiner Wissenschaft völlig zu beherrschen, was bisher in den meisten deutschen Staaten durch Einforderung einer selbständigen Arbeit über ein wissenschaftliches Thema seitens der Prüfungskommissionen erreicht wurde. Diese Einrichtung in der einen oder anderen Form beizubehalten, erscheint notwendig, weil erst durch eine solche Vertiefung in ein Einzelthema die Gründlichkeit und Klarheit des mathematischen Denkens erreicht wird, welche den Lehrer über den Stoff stellt, den er in der Schule zu lehren hat, und weil nur diese volle Beherrschung des Unterrichtsgebietes dem Lehrer auch dasjenige Maß von Sicherheit in der Bewegung gibt, welches ihm in den höheren Klassen auch begabten Schülern gegenüber besser als alle Disziplinarmaßregeln die Autorität sichert. Dies Ziel wird aber nicht durch bloße Lösung von Prüfungsaufgaben und mündliche Examina erreicht. Die deutsche Mathematikervereinigung hat der Überzeugung, daß die Wissenschaftlichkeit der Examina nicht notleiden dürfe, durch folgende Resolution, die mit Einstimmigkeit angenommen wurde, Ausdruck gegeben:

Im Hinblick darauf, daß die Prüfungsordnung für Kandidaten des höheren Lehramts in mehreren deutschen Staaten demnächst abgeändert werden wird, gibt die Deutsche Mathematiker-Vereinigung der Überzeugung Ausdruck, daß eine gründliche und vertiefte wissenschaftliche Ausbildung die Grundlage jeder ersprießlichen Lehrtätigkeit ist, und hegt die Erwartung, daß die Änderung in dem Sinne erfolge, daß eine solche voll gewährleistet wird.

Diese einstimmig am 9. September angenommene Resolution wurde auf Beschluß der Versammlung in den Zeitungen veröffentlicht; dagegen aber leider nicht unmittelbar den Regierungen übermittelt.

7. Die Prüfungsordnung von 1898.

An jener Münchener Versammlung hatte F. Klein leider nicht teilnehmen können. Er war in dieser Zeit in Amerika, wo er im amtlichen Auftrage dem gelegentlich der Chicagoer Weltausstellung veranstalteten mathematisch-astronomischen Kongresse beiwohnte. Man vergleiche seine Ansprache bei Eröffnung des Kongresses „The Present State of Mathematics“ und sein Referat über „die Entwicklung der Gruppentheorie in den letzten zwanzig Jahren“. Indem jene Ansprache zum Schluß zu einer internationalen Vereinigung der Mathematiker auffordert, bereitet sie damit auch die IMUK vor. Im Anschluß an das Referat schilderte Klein danach auch die Unterrichtseinrichtungen an der Universität Göttingen und entwickelte die Gedanken, die, unter dem Einfluß der amerikanischen Eindrücke verstärkt, in den folgenden Jahren zur Ausführung kommen.[1]) Klein sollte auch von Amerika eine Studentin der Mathematik mitbringen, weil die preußische Unterrichtsverwaltung dem Drängen der Frauen nachgebend einen Versuch mit dem Frauenstudium machen wollte und die Mathematik für das am besten geeignete Versuchsfach hielt.[2])

Daß er der Münchener Versammlung nicht hat beiwohnen können, wurde von vielen Teilnehmern sehr bedauert, weil er, der vom Beginn seiner akademischen Laufbahn an immer großes pädagogisches Interesse gezeigt hat, gerade Anfang des letzten Jahrzehnts des abgelaufenen Jahrhunderts in enge Fühlung mit der preußischen Unterrichtsverwaltung und vor allen Dingen mit Friedrich Althoff kam, der zwar Jurist aber doch mit tiefem Verständnis und weitem Blick in seinem Amt als vortragender Rat, und später als Ministerialdirektor den Aufgaben der Universitäten und der höheren Schulen gegenübertrat und der besonders auch rasch die Reformgedanken und -Pläne erfaßte und för-

---

1) Chicago Congress. Matematical Papers Vol. I 1893. S. 133 ff.

2) Vgl. Lorey, Die mathematischen Wissenschaften und die Frauen. Leipzig, Teubner, 1909. Als Sonderabdruck erschienen aus Zeitschrift „Frauenbildung“. VIII. Jahrgang 1909, Heft 4.

derte, die von Göttingen aus im Gebiete der Mathematischen Wissenschaften damals auszustrahlen begannen und die natürlich auf die zu erwartende neue Prüfungsordnung Einfluß gewinnen sollten. Diese ganze Bewegung, in deren Mittelpunkt schließlich die Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik erscheint, ist in der schon oben genannten Kleinschen Vorlesung über die Organisation der höheren Schulen dargestellt. Auch die Abhandlung, die Herr Schimmack, der diese Kleinsche Vorlesung herausgegeben hat, in dieser Sammlung der IMUK demnächst veröffentlicht[1], wird diese Göttinger Reformbewegung charakterisieren. Hier sollen nur einige Einzelheiten erwähnt werden, die gerade für die neue Prüfungsordnung von vorbereitender Bedeutung waren.

In seiner im Winter 1889/90 gehaltenen Vorlesung über „Nichteuklidische Geometrie"[2]) kommt Klein am Schluß auf Unterrichtsfragen zu sprechen. Unter Hinweis auf Herbart tritt er lebhaft dafür ein, daß der Schüler auch die Anwendungen der Mathematik kennen lerne.

Im Sommer 1894 hielt er eine zweistündige Vorlesung „über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie". Diese Vorlesungen werden auf Grund einer unter Kleins Aufsicht von fünf Studenten gelieferten Ausarbeitung durch Tägert herausgegeben, der als Teilnehmer an dem Fortbildungskurs Ostern 1894 in Göttingen die von Klein vorgetragene Skizze der Vorlesung kennen lernte[3]). Daß auf diesen Göttinger naturwissenschaftlichen Ferienkursen auch die Mathematik von vornherein vertreten war, ist ein charakteristischer Zug der Göttinger Bewegung. Die erwähnte Vorlesung über Fragen der Elementargeometrie widmet Klein der vierten Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtes, der Pfingsten 1895 in Göttingen tagte und damit frühzeitig in enge Verbindung mit den Göttinger Bestrebungen gebracht wurde.

Erwähnt man noch, daß seit 1892 schon in Göttingen die „angewandte Mathematik" in einem Hauptteile amtlich anerkannt wird, dadurch, daß in diesem Jahre der damalige Göttinger außerordentliche Professor Schoenflies einen Lehrauftrag für „Darstellende Geometrie" erhielt, daß weiter in demselben Jahre dort zum ersten Male an einer preußischen Universität ein Studienplan für die Mathematiker herausgegeben wird, verfaßt von den damaligen Direktoren des mathematisch-physikalischen Seminars, F. Klein, E. Riecke, E. Schering, W. Voigt, H. Weber, und schließlich daß weiter Klein im April 1896 im Mathe-

1) Schimmack, Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland. Diese Abhandlungen Band III, Heft 1, S. 32 ff.

2) F. Klein, Nichteuklidische Geometrie I. Ausgearbeitet von F. Schilling, 2. Abdruck. Göttingen 1893 S. 362 ff.

3) F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Leipzig, B. G. Teubner 1895.

mathischen Verein in Hannover einen Vortrag gehalten hat „Über die Anforderung der Ingenieure und die Ausbildung der mathematischen Lehramtskandidaten"[1], so dürften alle diese Tatsachen es wohl erklärlich erscheinen lassen, daß für die neue Prüfungsordnung, im Gebiet der mathematisch-physikalischen Fächer besonders die Göttinger Gutachten in Betracht kamen. Natürlich sind auch wie früher von sämtlichen wissenschaftlichen Prüfungskommissionen und Provinzial-Schulkollegien Gutachten eingefordert worden.

Fast auf den Tag genommen, fünf Jahre nach der Münchener Versammlung, nämlich am 12. September 1898, erschien die neue „Prüfungsordnung für das Lehramt an höheren Schulen in Preußen". Indem diese Prüfungsordnung die Lehrbefähigung nur für die unteren Klassen allgemein beseitigt und nur zwei Stufen der Lehrbefähigung erteilen läßt, erhebt sie in Mathematik nach § 21 folgende Forderung:

Von den Kandidaten, welche die Lehrbefähigung in der reinen Mathematik nachweisen wollen, ist zu fordern:

a) für die zweite Stufe (d. h. bis Untersekunda einschließlich): Sichere Kenntnis der Elementarmathematik und Bekanntschaft mit der analytischen Geometrie der Ebene, besonders mit den Haupteigenschaften der Kegelschnitte, sowie mit den Grundlehren der Differential- und Integralrechnung;

b) für die erste Stufe (d. h. für alle Klassen) überdies: Eine solche Bekanntschaft mit den Lehren der höheren Geometrie, Arithmetik und Algebra, der höheren Analysis und der analytischen Mechanik, daß der Kandidat eine nicht zu schwierige Aufgabe aus einem dieser Gebiete selbständig zu bearbeiten imstande ist.

Als etwas ganz neues erscheint die Lehrbefähigung in angewandter Mathematik, von der § 22 handelt:

Von den Kandidaten, welche die Lehrbefähigung in der angewandten Mathematik nachweisen wollen, ist außer einer Lehrbefähigung in der reinen Mathematik zu fordern: Kenntnis der darstellenden Geometrie bis zur Lehre von der Zentralprojektion einschließlich und entsprechende Fertigkeit im Zeichnen; Bekanntschaft mit den mathematischen Methoden der technischen Mechanik, insbesondere der graphischen Statik, mit der niederen Geodäsie und Elementen der höheren Geodäsie nebst Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler.

Diese Lehrbefähigung hat also keine Stufenabteilung. Die Übung im geometrischen Zeichnen wird nach § 30 durch selbständig gefertigte Zeichnungen nachgewiesen, die mit den schriftlichen Hausarbeiten abzuliefern sind. Hauptsächlich im Interesse dieser neuen Lehrbefähigung ist die durch § 5 Absatz 2 eingeführte neue Bestimmung zu begrüßen:

1) Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 1896 und Klein-Riecke, Vorträge über angewandte Mathematik. Leipzig, B. G. Teubner 1900, S. 223.

Bei der Bewerbung um die Lehrbefähigung in der Mathematik, der Physik und Chemie wird das ordnungsmäßige Studium an einer deutschen Technischen Hochschule dem Studium an einer deutschen Universität bis zu drei Halbjahren gleich gerechnet.

In Physik sind die Forderungen wesentlich dieselben geblieben wie in der Prüfungsordnung von 1887.

Nach § 9 ist reine Mathematik stets mit Physik zu verbinden, was offenbar so gemeint ist, daß, wenn jene Hauptfach ist, diese auch gewählt werden muß. Denn nach Absatz 3 desselben Paragraphen ist es dem Kandidaten unbenommen, eine größere Anzahl von Fächern zu wählen, als für das Bestehen der Prüfung erforderlich ist. Ein Neusprachler könnte also z. B. eine Lehrbefähigung in der Mathematik erwerben ohne Physik. Nach demselben Paragraphen kann freilich auch Physik mit Chemie und Mineralogie als Hauptfach verbunden werden, wie es scheint, ohne Mathematik.

Auch die von jedem Kandidaten zu fordernde Kenntnis in Religion und Philosophie sind nicht geändert. In der Pädagogik hat der Kandidat in der mündlichen Prüfung nachzuweisen, daß er die philosophischen Grundlagen, sowie die wichtigsten Ereignisse in ihrer Entwicklung seit dem 16. Jahrhundert kennt und bereits einiges Verständnis für die Aufgaben seines künftigen Berufes gewonnen hat. In der deutschen Literatur hat er darzutun, daß ihm der allgemeine Entwicklungsgang namentlich seit dem Beginne ihrer Blüteperiode im 18. Jahrhundert bekannt ist, und daß er auch nach dem Abgange von der Schule zu seiner weiteren Fortbildung bedeutende Werke dieser Zeit mit Verständnis gelesen hat. Diese Prüfung in den allgemeinen Fächern kann auf Wunsch des Kandidaten seit 1906 innerhalb desselben Semesters bis zu drei Monaten getrennt von der Hauptprüfung vorgenommen werden.

An schriftlichen Hausarbeiten werden nach § 28 jetzt nur noch zwei verlangt, während bisher deren drei gefordert waren. Die eine ist aus dem Gebiete der allgemeinen Prüfung zu entnehmen; sie braucht also nicht allein aus dem Gebiete der Philosophie oder Pädagogik zu sein, kann vielmehr auch der deutschen Literatur oder der Religion angehören. In dieser Arbeit hat der Kandidat nach § 10 nicht bloß ausreichendes Wissen und ein verständnisvolles Urteil über den behandelten Gegenstand zu bekunden, sondern auch zu zeigen, daß er einer sprachrichtigen, logisch geordneten, klaren und hinlänglich gewandten Darstellung fähig ist.

Die andere ist eine Facharbeit aus einem der Fächer, für die die Lehrbefähigung in erster Stufe nachgewiesen werden soll. Wünsche der Kandidaten bezüglich der Auswahl der Aufgaben sind tunlichst zu berücksichtigen. Sie müssen bei der auf Grund des § 6 zu erfolgenden Meldung angegeben werden. Dieser Meldung ist ein vom Kandidaten eigenhändig geschriebener Lebenslauf beizulegen, in dem die von

ihm genossene Schulbildung zu bezeichnen und der Gang und Umfang der akademischen Studien eingehend darzulegen ist.

Die letzte Forderung, den Studiengang eingehend darzulegen, ist neu und im Interesse einer möglichst individuellen Prüfung namentlich in einer Zeit des Massenandranges zu begrüßen, wo so manche Kandidaten den Examinatoren nicht persönlich bekannt sind. Die Frist für die schriftliche Hausarbeit beträgt 16 Wochen. Für eine Verlängerung dieser Frist gelten die alten Bestimmungen. Versäumt der Kandidat die Frist, so gilt die Prüfung als nicht bestanden. Werden jedoch nachträglich triftige Gründe der Verhinderung nachgewiesen, so tritt diese Folge nicht ein, und dem Kandidaten sind neue Aufgaben zu stellen.

Unter den gleichen Bedingungen wie früher kann eine Druckschrift als Ersatz für eine der beiden Hausarbeiten gelten.

Ferner können nach § 29 Klausurarbeiten mit einer Zeitdauer von höchstens drei Stunden verlangt werden.

Ganz neu gegenüber allen bisherigen Prüfungsordnungen ist der § 34, der vom Gesamtergebnis der Prüfung handelt:

Bestanden hat der Kandidat, wenn er in der allgemeinen Prüfung genügt und die Lehrbefähigung mindestens in einem Fache für die erste Stufe und noch in zwei Fächern für die zweite Stufe nachgewiesen hat.

Das ist also freilich weniger, als für ein Oberlehrerzeugnis bisher erforderlich war, das ja für zwei Fächer Lehrbefähigung für alle Klassen forderte.

Auf der anderen Seite aber, und das ist doch die Hauptsache, die der Entwicklung des Oberlehrerstandes und seinen Forderungen entspricht, wer nicht wenigstens in einem Fache für die erste Stufe genügt, hat überhaupt nicht bestanden. Während früher jemand mit so geringer wissenschaftlicher Bildung, daß er nicht wenigstens in einem Fache die Lehrbefähigung für Prima erworben hatte, auf Grund eines „Lehrerzeugnisses" in den höheren Schuldienst eintreten konnte, ist das jetzt zum Glück unmöglich.

Ob es nicht auch besser wäre zum Bestehen in zwei Fächern die Lehrbefähigung für die erste Stufe zu verlangen, wie das in Sachsen jetzt der Fall, ist eine offene Frage.

Für das Prädikat „gut" bestanden und „mit Auszeichnung" bestanden sind zwei Lehrfächer für die erste Stufe erforderlich. Auch diese Zusammenfassung der Gesamtergebnisse in eine der Zeugnisnoten „genügend bestanden", „gut bestanden", „mit Auszeichnung bestanden", ist neu. Ist die Prüfung nicht bestanden, so muß erneut in einer Wiederholungsprüfung die gesamte Prüfung noch einmal gemacht werden, oder es ist die Ergänzung einzelner Teile in einer Ergänzungsprüfung zu fordern. Die Meldungen zu diesen Prüfungen haben in längstens zwei Jahren nach der ersten Prüfung stattzufinden. Eine nochmalige Wiederholung ist nur mit Genehmigung des Ministers zulässig (§ 37). Es gibt schließlich noch Erweiterungsprüfungen, von denen § 38 handelt:

1. Wer die Prüfung für das höhere Lehramt bestanden hat, ist befugt, innerhalb der sechs darauf folgenden Jahre, sei es um noch für andere Fächer die Lehrbefähigung nachzuweisen, sei es um eine bereits zuerkannte Lehrbefähigung zu vervollständigen und so das Gesamturteil des Zeugnisses zu erhöhen, sich einer Erweiterungsprüfung in einzelnen Fächern zu unterziehen, sofern das Königliche Provinzialschulkollegium, in dessen Bezirk der Betreffende im Schuldienste bereits beschäftigt ist oder demnächst Verwendung finden soll, die Zulassung zu einer solchen Prüfung befürwortet.

2. Zuständig für die Erweiterungsprüfung ist sowohl die Kommission, vor welcher der Kandidat seiner Zeit die Prüfung für das höhere Lehramt bestanden hat, als auch die Kommission im Bezirke des befürwortenden Provinzialschulkollegiums.

3. Eine Erweiterungsprüfung kann in jedem der unter 1. genannten beiden Fälle nur einmal abgelegt werden.

Die Zeugnisse sind jetzt ganz schematisch geworden. Gewiß waren sie früher manchmal zu ausführlich und namentlich die nachgewiesenen Mängel nahmen mitunter einen zu großen Raum ein gegenüber den guten Leistungen. Es mag auch vorgekommen sein, daß ein Kandidat bei der Bewerbung um eine Oberlehrerstelle an einer städtischen höheren Schule in einer kleinen Stadt von einem Mitglied des Kuratoriums, z. B. einem biederen Bäckermeister, ermahnt wurde, die nach dem Zeugnis noch vorhandenen Lücken seiner Kenntnisse in der Theorie der elliptischen Funktionen auszufüllen. Individueller und für den sachverständigen Leser jedenfalls inhaltsreicher waren die früheren Zeugnisse, von denen oben Proben von allen Kommissionen mitgeteilt sind, als die jetzigen Zeugnisse, von denen ein einziges zur Erläuterung völlig genügt.

Herr . . ., Sohn des . . ., geboren den . . . 1882 zu . . ., . . . Konfession, bestand die Reifeprüfung Ostern 1902 auf dem Gymnasium in . . . und studierte Mathematik und Naturwissenschaften von Ostern 1902 bis Ostern 1903 in Münster, im Sommer 1903 in Göttingen und von Herbst 1903 bis Herbst 1905 in Münster.

Auf die Meldung vom 25. Oktober 1905 zur Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen zugelassen, erhielt er zur schriftlichen Bearbeitung die Aufgaben:

In der Mathematik: Die geodätische Abbildung einer Fläche auf eine Ebene, in der Philosphie: Die verschiedenen Interpretationen des psychophysischen Gesetzes.

Der mündlichen Prüfung unterzog er sich in der Zeit vom 20. November bis 4. Dezember 1906.

Herr . . . hat die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen bestanden und zwar ist ihm nach dem gesamten Ergebnis der schriftlichen und mündlichen Prüfung das Zeugnis

gut bestanden

zuerkannt; er besitzt die Lehrbefähigung in der Mathematik, sowie in der Botanik und Zoologie für die erste Stufe, in der Physik für die zweite Stufe.

Bezüglich der Meldung zur Ableistung des Seminarjahres wird auf die Ordnung der praktischen Ausbildung der Kandidaten für das Lehramt an höheren Schulen vom 15. März 1890 verwiesen.

Münster, den 4. Dezember 1906.

Königliche Wissenschaftliche Prüfungskommission.

gez. Cauer. Killing. Busse. Fell. Geyser. Spicker. Konen. Zopf. Bellowitz. Busz.

8. Die Aufnahme der Prüfungsordnung von 1898.

Wie auf die Prüfungsordnung von 1887 sehr bald die Dezemberkonferenz von 1890 folgte, so fand auch schon im zweiten Jahre der Gültigkeit der Prüfungsordnung von 1898 eine Konferenz zur Reform der höheren Schulen in Berlin statt: die bekannte Pfingstkonferenz[1]), die vom 6. bis 8. Juni 1900 im Kultusministerium unter dem Vorsitz des Ministers Studt und der überaus fördernden Teilnahme des schon oben genannten Friedrich Althoff tagte und als deren Hauptergebnis der Grundsatz der Gleichwertigkeit der drei höheren Schulen: Gymnasium, Realgymnasium, Oberrealschule zu betrachten ist. Die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer waren auf dieser Konferenz unter den vierunddreißig eingeladenen Teilnehmern wesentlich stärker vertreten als im Dezember 1890. Neben den beiden Professoren der Mathematik G. Hauck und F. Klein finden wir den Meteorologen Professor v. Bezold, als Vertreter der technischen Wissenschaften die Professoren Jntze, Launhardt und Slaby, die Chemie verkörpert Professor Fischer, die Industrie Dr. Böttinger. Als Schulmann vertritt der Direktor des Dorotheenstädtischen Realgymnasiums, Professor Schwalbe, die Mathematik und Naturwissenschaften. Auch der Professor der Nationalökonomie, Lexis, muß als Vertreter unserer Wissenschaft gelten; er hat freilich an den Konferenzen selbst nicht teilgenommen, war aber an den Vorarbeiten stark beteiligt. Unter den Ministerialräten gehört Gruhl zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Fache. Die Prüfungsordnung für das Lehramt an höheren Schulen bildete keinen besonderen Verhandlungsgegenstand. Sie wird auch in den Gutachten kaum erwähnt, die von Schwalbe, Lampe und Hauck auf die Frage gegeben wurden[2]):

Welche Fortschritte sind seit der Schulkonferenz vom Jahre 1890 auf dem Gebiete des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtes an den höheren Schulen, insbesondere auch nach der angewandten und technischen Seite hin, zu verzeichnen, und was kann in dieser Beziehung noch geschehen?

Ausführlicher geht nur Lexis[3]) in seinem Gutachten über dieselbe Frage auf die Prüfungsordnung ein. Er sagt:

Für die wichtigste seit 1890 zu verzeichnende Neuerung in betreff des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Lehranstalten halte ich eine Maßregel, die nicht unmittelbar die Lehreinrichtungen berührt, sondern sich auf die Ausbildung der Lehrer bezieht, nämlich den Erlaß der Prüfungsordnung vom 12. September 1898 und insbesondere die dadurch gegebene Einführung einer besonderen Lehrbefähigung für angewandte Mathematik. Die – allerdings nur allmählig eintretende – Wirkung dieser neuen Bestimmungen wird voraussichtlich darin bestehen, daß immer mehr Lehramtskandidaten sich ausschließlich dem matematisch-physikalischen Fache zuwenden, indem sie sich die Lehrbefähigung sowohl für die angewandte, wie für die reine Mathematik und die Physik erwerben, den

1) Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichtes. Berlin, 6. bis 8. Juni 1900. Halle a. S. Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses. 1901.

2) Verhandlungen S. 366ff. 3) Verhandlungen S. 383.

übrigen Naturwissenschaften aber fern bleiben. Gegen diese Spezialisierung ist grundsätzlich nichts einzuwenden; es ist vielmehr zu erwarten, daß Lehrer mit solcher Vorbildung besser als andere imstande sind, einen lebensvollen und anregenden mathematisch-physikalischen Unterricht nach anschaulichen Methoden zu erteilen und zugleich auch vermöge ihrer Bekanntschaft mit der wissenschaftlichen Seite der Technik den Schülern, die sich der technischen Laufbahn widmen wollen, eine bessere Vorbereitung zu verschaffen.

In den Verhandlungen ist selbst von der Prüfungsordnung nicht die Rede, wenn natürlich auch die Ausbildung der Oberlehrer wiederholt zur Sprache kam, so namentlich durch Klein.[1])

Dagegen erwähnen die amtlichen Erläuterungen, die den zur Berichterstattung vorgelegten Fragen mitgegeben wurden, ausdrücklich die neue Prüfungsordnung. Es heißt dort[2]):

Was die Ausbildung der Lehrer betrifft, so wird zunächst die neue Prüfungsordnung auf den Studiengang zweckmäßig einwirken. Für die Mathematik ist ein neues Prüfungsfach, die angewandte Mathematik, hinzugekommen.... Es ist den Studierenden gestattet, ihre Studien drei Semester lang auf einer deutschen technischen Hochschule ordnungsmäßig zu betreiben, und es wird ihnen, wie auch an den Universitäten Gelegenheit geboten werden, Verständnis für die Technik und deren Bedeutung zu gewinnen.

Geradezu einen Kommentar zu der neuen Prüfungsordnung bieten die zwei Vorträge, die Klein auf dem Ferienkurs Ostern 1900 in Göttingen gehalten hat: „Allgemeines über angewandte Mathematik" und „über technische Mechanik". Auch der wenige Tage nach Erlaß der neuen Prüfungsordnung auf der Düsseldorfer Naturforscherversammlung 1898 von ihm gehaltene Vortrag: „Universität und technische Hochschule" ist hier zu nennen.

Diese Vorträge finden sich in den von Klein und Riecke herausgegebenen Vorträgen „Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen".[3])

Aus dem zuerst genannten Vortrage sei folgende Stelle hier mitgeteilt[4]):

Die Lehrbefähigung in angewandter Mathematik (die fakultativ bleibt) ist an die Lehrbefähigung in reiner Mathematik gebunden. In der Tat würde ohne eine solche Festsetzung die Gefahr bestehen, daß die Kandidaten, die der angewandten Mathematik zuneigen, den zentralen Schwierigkeiten des mathematischen Studiums ausweichen, daß sie sich mit der Erwerbung bloß äußerlicher Fähigkeiten begnügen. Dies will die Unterrichtsverwaltung ersichtlich vermeiden und verdient dafür ohne Zweifel den Dank aller ernsten Mathematiker.

In diesem Zusammenhange ist auch Holzmüller zu nennen, durch dessen Zusammenwirken mit Klein und Hauck, wie Grünbaum[5]) richtig betont, die neue Lehrbefähigung in angewandter Mathematik zustande gekommen ist.

In seinen „Bemerkungen über den Unterricht und die Lehramts-

1) Verhandlungen S. 154. 2) Verhandlungen S. 414.

3) Leipzig, B. G. Teubner 1900. 4) a. a. O. S. 17.

5) Grünbaum, Der mathematische Unterricht an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. Diese Abhandlungen Bd. IV, Heft 1. S. 59.

prüfung in der angewandten Mathematik"[1]) stellt Holzmüller, der übrigens erster Examinator für angewandte Mathematik in Münster war, u. a. folgende Leitsätze auf:

1. Der niedere Teil der darstellenden Geometrie ist von jedem Kandidaten des mathematischen Lehrfaches zu fordern. Ein Studium von einem Semester ist ausreichend.

2. Der höhere Teil der darstellenden Geometrie ist nur von den Kandidaten des Lehrfaches der angewandten Mathematik zu fordern. Ein zweites Semester dürfte ausreichend sein.

Außerdem wünscht er aber, damit der § 22 der Prüfungsordnung nicht auf dem Papier bleibe, gewisse positive Berechtigungen mit der Lehrbefähigung in angewandter Mathematik verbunden zu sehen, insbesondere „die Anwartschaft auf Anstellung im höheren und niederen technischen Schulwesen".

Inhaltlich deckt sich die Forderung des ersten Holzmüllerschen Leitsatzes mit dem, was Gutzmer[2]) in seinem Vortrage auf dem Dritten Internationalen Mathematikerkongreß 1904 in Heidelberg forderte unter besonderem Hinweis auf Süddeutschland.

Die Prüfungsordnung von 1898 hat von mathematischer Seite eine in der Form wohl zu scharfe, auch sachlich nicht immer richtige Kritik durch Study erfahren, damals Professor in Greifswald und Mitglied der dortigen wissenschaftlichen Prüfungskommission. Ursprünglich im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung[3]) erschienen, ist diese Kritik in teils erweiterter teils verkürzter Form in den Hochschulnachrichten vom Verfasser veröffentlicht[4]) und aus diesen schließlich in die Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht[5]) übernommen worden.

Studys Kritik behandelt die allgemeinen Fächer, die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer und die Examinatoren. Nur die beiden ersten Punkte sollen hier besprochen werden; dagegen wird die Kritik an den Examinatoren in dem folgenden Abschnitt, der von den wissenschaftlichen Prüfungskommissionen handelt, erörtert werden. In den vier Bestandteilen der allgemeinen Prüfung: Religion, Philosophie, Pädagogik und deutsche Literatur findet Study eine humanistische Einseitigkeit. Für ganz überflüssig hält er die Prüfung in Religion. Hier decken sich seine Äußerungen wesentlich mit den oben angeführten Toblers auf der Berliner Konferenz von 1890. Er weist darauf hin, daß Hessen und Baden diese Prüfung nicht haben, und daß die philosophische Fakultät in Leipzig sich ein-

1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. XIV. 1905. S. 202.

2) Gutzmer, Über die auf Anwendungen gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. XIII. 1904. S. 520.

3) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung VII. 1900. Seite 121 ff.

4) Hochschulnachrichten. November 1900.

5) Zeitschr. f. math. u. naturwiss. Unterricht. 31. Jahrg. 1902. Seite 70 ff.

stimmig für Abschaffung dieser Prüfung ausgesprochen hat; in Leipzig ist auch in der Tat seit 1908 diese Prüfung abgeschafft worden.

In seinem schon obengenannten (S. 47) Buche: „Die wissenschaftliche und praktische Vorbildung für das höhere Lehramt" kommt Fries, der derzeitige Direktor der Hallischen wissenschaftlichen Prüfungskommission, auch auf die Frage der Religionsprüfung zu sprechen. Weitblickende, sehr zu beachtende Gründe lassen ihn für diese Prüfung eintreten. Aber er verkennt nicht die Bedenken und Schwierigkeiten, wenn er sagt:

Die Prüfung hat durchaus nicht den Zweck, entweder theologische Gelehrsamkeit oder ein persönliches Bekenntnis des Kandidaten zu erfragen. Letzteres gehört überhaupt nicht in den Rahmen einer Prüfung, ersteres griffe über die Ansprüche der allgemeinen Bildung hinaus. Die Anforderungen sind allgemein und maßvoll gefaßt, trotzdem aber geeignet, einer sträflichen Gleichgültigkeit und Unwissenheit vorzubeugen. Nach meiner Erfahrung kommt es allerdings bei diesem Gegenstande mehr als bei andern auf die Einsicht des Prüfenden an, um der Absicht der Prüfungsordnung zu entsprechen; richtig geleitet, etwa mehr in die Form einer Unterredung gekleidet, kann die Prüfung, die man wohl am besten an den praktischen Schulmann überträgt, den Prüfling zu weiterer Beschäftigung mit religiösen Fragen und biblischen Stoffen anregen. Ein solches Ergebnis wäre in der Tat der Mühe wert.

Aber man muß sehr zweifeln, ab ein solches Ergebnis häufig erreicht werden treten kann durch eine Prüfung im Staatsexamen, an den Tagen also, an denen bei einer gewissen natürlichen allgemeinen Erregung eine starke Konzentration der Gedanken auf die Gebiete seiner wissenschaftlichen Studien bei den Kandidaten herrschen muß. Sollte nicht vielleicht gerade bei geistig sehr regsamen Kandidaten, die über den Kreis ihrer Fachstudien hinaus im Verkehr mit gleichgesinnten Studienfreunden häufig ethische und religiöse Fragen besprochen haben, der Zwang einer Prüfung eine ganz andere Wirkung haben? Welche Wirkung wird z. B. aber auch bei einem Kandidaten eintreten, der die erste Stufe in Mathematik, Physik, Chemie und Mineralogie „mit Auszeichnung" erwirbt, trotzdem aber diese Gesamtnote nicht erhält, weil die Prüfung in Religion den Examinator nicht befriedigt?

Auch die Prüfung in Pädagogik hält Study für überflüssig, wie er überhaupt ein Gegner pädagogischer Professuren ist, weil er durch sie eine Beeinträchtigung der Fachstudien befürchtet. Beschäftigung mit der Pädagogik gehört nach ihm den beiden praktischen Vorbereitungsjahren an, von denen weiter unten zu sprechen ist. Darin stimme ich Study jedenfalls zu, und, wie ich glaube, die meisten mathematischen Fachgenossen an den höheren Schulen, daß auf der Universität keine Zeit zu einem eigentlichen Studium der Pädagogik für Mathematiker ist noch sein kann. Tiefer gehendes Interesse und Verständnis für pädagogische Fragen kommen meines Erachtens überhaupt erst, wenn man unter guter Anleitung in die Praxis eingetreten ist. Gegen die Beschäftigung der Mathematiker mit Pädagogik auf der Universität spricht eine Tatsache ferner, die Study nicht erwähnt, die

aber beachtenswert erscheint und auf die F. Klein gelegentlich aufmerksam gemacht hat. Indem die Pädagogik von Professoren der Philosophie übernommen wird, die zumeist einen philologisch-historischen Bildungsgang durchgemacht haben, ohne selbst pädagogisch praktisch tätig gewesen zu sein, treten in ihren Vorlesungen die Fragen des mathematischen Unterrichtes sehr zurück. Das zeigt ja auch ein so treffliches Werk wie Paulsens Geschichte des gelehrten Unterrichtes; das zeigte auch seine Vorlesung an der Universität über Pädagogik, wo Mathematik und Naturwissenschaften in einer Stunde erledigt wurden. Demgegenüber füllt die schon oben genannte von Schimmack herausgegebene Vorlesung Kleins „Über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen" eine tiefe Lücke aus. Eine Ergänzung bis in die neueste Zeit bildet seine von E. Hecke ausgearbeitete Vorlesung des Winterhalbjahres 1910/11: „Über die moderne Entwicklung des mathematischen Unterrichts". Auch die reichhaltige und wertvolle Ergänzung, die das mathematische Lesezimmer in Göttingen nach der Seite der pädagogisch-mathematischen Literatur hin seit einigen Jahren erfährt, soll hier erwähnt werden, wenn auch diese Einrichtungen des Lesezimmers erst im dritten Bande dieser Abhandlungen besprochen werden. Anderseits bezweifle ich durchaus nicht, daß an den drei preußischen Universitäten, an denen Männer der Schulpraxis Fragen des höheren Unterrichtes in ihren Vorlesungen erörtern, das auch für die Mathematiker sehr anregend wirkt.[1])

Nicht kann ich Study in seinem Kampfe gegen die Philosophie recht geben. Allerdings ist auch bei dieser Prüfung, was Tobler, wie oben erwähnt, darüber sagt, sehr zu beachten.[2]) Die allgemeine Prüfungsarbeit aber lediglich eine Stilübung zu nennen, wie das Study tut, erscheint doch zu scharf, und die Themen, die in den oben abgedruckten Zeugnissen genannt sind, geben jedenfalls nebst dem Urteil über das Ergebnis der philosophischen Prüfung ein anderes Bild als das Thema, das nach Study einem Physiker gestellt wurde, der nach irgendeinem Gesichtspunkte Gellerts Kirchenlieder zu behandeln hatte. Aber auch dieses Thema ist vielleicht, wenn man nicht geradezu einen Mißgriff des Examinators annehmen will, auf besonderen Wunsch des Kandidaten gewählt worden. Schreibt doch die neue Prüfungsordnung geradezu vor, daß auch das Thema der allgemeinen Arbeit möglichst individuell, nicht etwa nur aus der

---

1) In Berlin und Halle die Honorarprofessoren der Pädagogik Münch und Fries; in Münster der Privatdozent der Philosophie und Oberlehrer am Gymnasium Professor Koppelmann.

2) Nach dem im September 1910 herausgegebenen Entwurf einer neuen Prüfungsordnung soll in Bayern künftig bei den Mathematikern und Naturwissenschaftlern „Philosophie und ihre Geschichte im Zusammenhang mit der Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaft" geprüft werden. Dagegen soll dort eine Prüfung in Pädagogik erst nach Ableistung des Seminarjahres abgelegt werden.

Philosophie gewählt sein soll. Ich sollte meinen, daß die sehr richtigen, beachtenswerten Ausführungen Studys über den Umfang und Inhalt des Begriffes „Allgemeine Bildung" bei einer freiheitlichen Auffassung der Prüfungsordnung sehr wohl angewendet werden können und sicher auch angewendet werden. Daß also z. B. ein Chemiker, der nationalökonomische Studien betrieben hat, davon in seiner allgemeinen Prüfungsarbeit den Beweis liefert, halte ich für durchaus möglich und angebracht, ebenso wie es mir nicht in Widerspruch mit der Prüfungsordnung zu stehen scheint, wenn man einem musikalischen Mathematiker ein musikgeschichtliches Thema gibt. Jedenfalls können diese allgemeinen Arbeiten der Kommission einen guten Einblick in die allgemeine geistige Reife des Kandidaten geben, wie sie diesen selbst auch veranlassen, sich darüber klar zu werden, daß er nicht bloß Mathematiker oder Physiker usw., das heißt überhaupt lediglich ein Mann des besonderen Faches sein kann.

Wenn Study weiter auch die Prüfung in deutscher Literatur abgeschafft wissen will, so kann man ihm darin wohl zustimmen. Hat doch auch die sächsische Prüfungsordnung vom 1. Mai 1908 nur Philosophie und Pädagogik für die allgemeine Prüfung beibehalten.[1] Sonderbar ist aber die Tatsache, daß die am 25. Januar 1909 erlassene „Ordnung der Prüfung für die Kandidaten des höheren Schulamts der mathematisch-physikalischen und chemischen Richtung an der Kgl. Technischen Hochschule in Dresden" in der allgemeinen Prüfung neben Philosophie und Pädagogik auch deutsche Literatur verlangt[2]) Gewiß müßte der Lehrer der Mathematik nicht fremd sein in der deutschen Literatur, wenn anders er nicht lediglich als Fachlehrer, sondern auch als Erzieher und Ordinarius einer Klasse wirken will, der die Aufgabe hat, seinen Schülern in der Auswahl der Lektüre beratend zur Seite zu stehen. Nach meinen Erfahrungen und Beobachtungen zeigen die mathematischen Studenten auch ein lebhaftes Interesse an der deutschen Literatur, auch wenn sie vielleicht nicht in der Prüfung imstande sind, den Gedankengang z. B. eines bekannten Schauspiels genau anzugeben. Man braucht übrigens hier nicht an solche Fragen zu denken, wie sie oben (S. 41) als entschieden unpassende Fragen einer Prüfung in allgemeiner Bildung angeführt sind.

Wenn man überhaupt eine allgemeine Prüfung beibehalten will, so wäre wohl zu erwägen, ob man von dem Mathematiker nicht eine gewisse allgemeine Bildung naturwissenschaftlicher Art verlangen soll. Einen derartigen Gedanken läßt auch Study durchblicken, wenn er auch in seinem Leitsatze 1 ganz allgemein die Forderung erhebt: „Allgemeine Bildung ist aus der Prüfungsordnung zu streichen".

---

1) Vgl. A. Witting, Der math. Unterricht im Königreich Sachsen. Diese Abhandlungen Band II, Heft 2, S. 47.

2) Ebenda S. 57.

Wie wir gesehen haben[1]), bestand früher in Preußen eine derartige Forderung. Die Prüfungsordnung von 1866 verlangte ausdrücklich, daß „von Mathematikern und Physikern diejenige allgemeine Bildung in Chemie, Mineralogie, Zoologie, Botanik darzutun ist, welche sie zu einem richtigen Urteile über den Inhalt und Umfang derselben, sowie über das Verhältnis zu den andern Wissenschaften befähigt".

Diese Forderung ist 1887 darum wohl fallen gelassen worden, weil den Studenten der Mathematik und Physik kaum Gelegenheit geboten war, kleine orientierende Vorlesungen aus dem Gebiet der Naturwissenschaft zu hören. Jetzt werden ja an vielen Universitäten für Studierende aller Fakultäten Vorlesungen über Entwicklungsgeschichte gelesen, und so viel an allgemeiner Erfassung des Entwicklungsgedankens, wie in diesen Vorlesungen geboten wird, müßte der Kandidat der Mathematik und Physik, der nicht Biologie studiert hat, in sich aufnehmen und verarbeiten, und Ähnliches gilt auch von den anderen Zweigen der Naturwissenschaft. Es kann heute vorkommen, daß ein sehr tüchtiger Mathematiker als Abiturient eines humanistischen Gymnasiums einer kleinen Stadt von dem Entwicklungsgedanken kaum etwas Klares gehört hat, und das ist entschieden ein Mangel an allgemeiner Bildung. Sollte aber eine solche Prüfung in allgemeiner naturwissenschaftlicher Bildung wieder für die Mathematiker eingeführt werden, so wäre von vornherein mit aller Entschiedenheit auch zu betonen, daß die nachgewiesene allgemeine naturwissenschaftliche Bildung noch lange nicht befähigt, biologischen Unterricht zu erteilen. Die Erkenntnis, daß der Mathematiker durchaus nicht notwendig auch biologischen Unterricht geben müsse, wie früher vielfach altphilologische Direktoren gemeint haben, dringt ja allmählich immer weiter durch.

Die naturwissenschaftlichen Fächer spielen nach Study, der sich hierbei auf Gutachten naturwissenschaftlicher Professoren beruft, in der Prüfungsordnung überhaupt eine zu geringe Rolle, wohingegen die Mathematik nach ihm fast zu sehr bedacht ist. Die Stellung der Naturwissenschaften als Prüfungsfächer zu erörtern, ist hier nicht am Platze; dagegen erfordert die Studysche Auffassung, daß der Mathematik zuviel Raum gegönnt sei, hier natürlich eine Kritik.

Study ist kein Freund der neuen Lehrbefähigung in „Angewandter Mathematik". Er vertritt einen entgegengesetzten Standpunkt, als ihn die Deutsche Mathematiker-Vereinigung auf ihrer Jahresversammlung im September 1899 einnahm.

Für diese Versammlung, die im ersten Jahre der neuen Prüfungsordnung stattfand, hatte der Vorstand „die Ordnung des mathematischen Hochschulunterrichts auf Grund der neuen preußischen Prüfungsordnung auf das Programm gestellt, angesichts der ganz

1) Seite 24 dieser Abhandlung.

neuen Sachlage, die durch Einführung der neuen Fakultät, für welche an den meisten Universitäten weder in betreff der Lehrkräfte noch der Lehrmittel Vorsorge getroffen ist".[1])

Berichterstatter waren H. Weber und G. Hauck, von denen jener die allgemeinen Gesichtspunkte, dieser im einzelnen die drei Teile der neuen Lehrbefähigung: Darstellende Geometrie, Geodäsie, technische Mechanik behandelte[2]).

Hauptsächlich ist in diesen Berichten von den Einrichtungen die Rede, die die neue Lehrbefähigung an den Hochschulen erfordert, und daher wird im dritten Bande auf diese Münchener Verhandlung zurückgegriffen werden müssen. Aber es wird von der Prüfung selbst auch natürlich gesprochen, und insofern interessieren diese Münchener Verhandlungen auch hier.

Hauck spricht sich über die Höhe der Anforderungen, die in der Prüfung zu stellen sind, so aus:

„Es ist diese Frage nicht identisch mit der Frage, in welcher Ausdehnung die drei Disziplinen gelehrt werden sollen. Denn es muß nicht alles, was gelehrt wird, auch geprüft werden; wie dies auch die Prüfungsvorschriften z. B. hinsichtlich der höheren Geodäsie ausdrücklich anerkennen. – Die Anforderungen des Examens werden sich dem Unterrichtsprogramm in einem gewissen Reduktionsverhältnis anpassen müssen. Wir lehren nicht fürs Examen, sondern wir examinieren auf Grund eines mittleren Maßes des Gelehrten. – Namentlich für den Anfang, solange sich die ganze Einrichtung noch im Versuchsstadium befindet und das Unterrichtsprogramm noch nicht genau fixiert ist, dürfte es sich empfehlen, die Forderungen niederzustellen und sie erst allmählich entsprechend den gemachten Erfahrungen zu steigern."

Beide Berichterstatter begrüßen die neue Lehrbefähigung, von der sie eine Belebung des mathematischen Unterrichts erwarten, wie das namentlich Hauck im einzelnen ausführt. Wenn nun auch, wie Weber sagt, durch die Einführung der angewandten Mathematik als neues Prüfungsfach das Reglement einer alten Forderung praktischer Pädagogen entgegenkommt, so muß anderseits doch betont werden, daß auch auf seiten der praktischen Schulmänner es nicht wenige gab und auch heute noch gibt, die die Lehrbefähigung in angewandter Mathematik mit Rücksicht auf die praktische Verwendbarkeit der Kandidaten nicht für vorteilhaft halten. Gewiß ist an einem kleinen Gymnasium ein Mathematiker wenig verwendbar mit der Lehrbefähigung in an-

1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung B. 8. S. 6. 1900.

2) Abgedruckt im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung B. 8 unter dem Titel: Wirkung der neuen preußischen Prüfungsordnung für Lehramtskandidaten auf den Universitätsunterricht. Dazu hat Klein einige allgemeine Bemerkungen gegeben und Krazer sich über den Unterricht in der darstellenden Geometrie geäußert. Beides kommt in Band III dieser Abhandlungen zur Besprechung.

gewandter Mathematik und außerdem für die zweite Stufe in reiner Mathematik und Physik, der also ein genügendes Zeugnis besitzt, wie es nach der Prüfungsordnung von 1898 möglich ist.

Daß ein derartiges Zeugnis überhaupt genügt, ist sehr gegen den Willen der Väter der Preußischen Prüfungsordnung von 1908 und ruht auf einem Versehen. Daher macht auch Stäckel den Vorschlag, dem § 9, 4 der Prüfungsordnung folgende Fassung zu geben[1]):

Angewandte Mathematik kann nur im Anschluß an reine Mathematik erster Stufe gewählt werden. Diese Verbindung ist notwendig für Kandidaten, die später an realistischen Anstalten den mathematischen Unterricht auf der Oberstufe erteilen wollen.

Der erste Satz dieser Stäckelschen Fassung wird hoffentlich in nicht zu ferner Zeit in die Prüfungsordnung übergehen. Gegen den zweiten Satz spricht das grundsätzliche Bedenken, daß durch das Bestehen der Prüfung ganz allgemein die wissenschaftliche Befähigung für das Lehramt an höheren Schulen ausgesprochen wird, ohne Rücksicht auf den Charakter der einzelnen Schule. Die älteren Prüfungsordnungen machten, wie wir gesehen haben, gewisse Unterschiede in den Anforderungen für das Lehramt an Gymnasien und Realanstalten. Daß das jetzt nicht mehr der Fall ist, scheint mir im Zusammenhang mit der endlich durchgedrungenen Anerkennung der Gleichwertigkeit der drei verschiedenen Arten höherer Schulen notwendig und gut zu sein. – Erfreulicherweise finden sich jetzt immer mehr in den Ausschreibungen mathematischer Oberlehrerstellen an städtischen höheren Schulen, namentlich in den Vororten Berlins, unter den geforderten Lehrbefähigungen auch die angewandte Mathematik. Es ist ganz unzweifelhaft, daß es für den mathematischen Unterricht an einer höheren Schule und für die gegenseitige Anregung der Fachlehrer von Nutzen ist, wenn neben einem Vertreter der reinen Mathematik auch ein Verteter der angewandten Mathematik wirkt.

Bei einer Besprechung von Vertretern der angewandten Mathematik, die am 22. und 23. März 1907 in Göttingen stattfand[2]), erklärte Rohn:

„Die angewandte Mathematik soll vor allen Dingen den Lehrer für den Schulunterricht tüchtiger und gewandter machen, insbesondere in den geometrischen Fächern."

Für die Schulverwaltung sehr beachtenswert ist, was Klein damals sagte:

„Ein bekannter Schulmann fragte seinerzeit: was soll ein Gymnasialdirektor mit einem Kandidaten machen, der Lehrbefähigung nur

---

1) P. Stäckel, Angewandte Mathematik an den Preußischen Universitäten. Monatsschrift für höhere Schulen herausgegeben von Köpke und Matthias. III. Jahrgang 1904. S. 297. Vgl. auch seine alle deutschen Universitäten umfassenden Berichte. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 11. 1902. S. 26ff. und Bd. 13. 1904. S. 313ff.

2) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung B. 16. 1907. S. 512 ff.

in reiner Mathematik und angewandter Mathematik nebst Physik besitzt? Ich antwortete: er soll ihn vor andern anstellen, denn die angewandte Mathematik wird seinen ganzen Unterricht in vortrefflicher Weise beleben."

Der einzige praktische Schulmann, der an diesen Göttinger Besprechungen teilnahm, war der Gymnasialdirektor Schwering in seiner Eigenschaft als Examinator für angewandte Mathematik in Bonn. Auch er erklärt:

„Die angewandte Mathematik wird auch für den Unterricht an den höhern Lehranstalten gute Früchte tragen."

Auch Study ist durchaus kein Gegner der angewandten Mathematik an sich. Er verlangt sogar, daß man die Beschäftigung mit Geodäsie oder darstellender Geometrie im bescheidenen Umfange nach Wahl des Kandidaten obligatorisch mache, wohingegen die Anforderungen in anderer Hinsicht entsprechend herunterzusetzen sind. Zu streichen ist nach ihm die technische Mechanik. Der Nachweis für die Beschäftigung mit einem Zweige der angewandten Mathematik wäre durch Zeugnisse über erfolgreiche Teilnahme an Übungen ohne weiteres besonderes Examens zu erbringen.

Studys Gegnerschaft gegen die neue Lehrbefähigung geht aus seiner Befürchtung hervor, daß man nicht an jeder Universität und namentlich nicht an den kleineren, die Einrichtungen schaffen könne, die die Pflege der angewandten Mathematik erfordert. Ferner aber und darum will er auch die technische Mechanik aus dem Unterrichtsprogramm der Universität streichen, hält er es nicht für Aufgabe der Universität, die Lehrer für die technischen Mittelschulen auszubilden. Er sagt in seinem Leitsatz 7:

Abgesehen von den Lehrern rein theoretischer Fächer sollten die Lehrer technischer Mittelschulen ihre Ausbildung im allgemeinen nicht an Universitäten, sondern an technischen Hochschulen erhalten.

Diese Studysche Auffassung hängt ersichtlich damit zusammen, daß durch eine lange Tradition aus dem mathematischen und physikalischen Unterricht der Universitäten und aus dem Interessenkreise der mathematischen und physikalischen Forscher, die in der technischen Mechanik „der Makrophysik" hervorkommenden Tatsachen leider verschwunden sind.

Zu den rein theoretischen Fächern rechnet er offenbar die Mathematik. Sicher kann aber ein Mathematiker an einer technischen Schule nur dann erfolgreich wirken, wenn er auch in angewandter Mathematik zu Hause ist. Gerade weil früher die Mathematiker, die an den Fachschulen wirkten, infolge der Ausbildung, die sie auf der Universität genossen hatten, oft wenig oder auch gar keine Fühlung mit der angewandten Mathematik hatten, ist ja das Bestreben mancher Ingenieure zu erklären, den mathematischen Unterricht nur durch Ingenieure erteilen zu lassen, was vom mathematischen Standpunkte

aus natürlich als unzweckmäßig zu betrachten ist. Es ist im Gegenteil sehr zu wünschen, daß angewandte Mathematiker mit einer gründlichen Ausbildung auch in reiner Mathematik an den Fachschulen der verschiedensten Art wirken; denn nur so wird es möglich sein, auch gerade an diesen Schulen einen zeitgemäßen mathematischen Unterricht zu erteilen und Mißstände zu vermeiden und zu beseitigen, von denen Grünbaum in seinem Berichte[1]) spricht, auf den hiermit besonders verwiesen sei. Zu vergleichen ist hier auch der in Druck befindliche Bericht von C. Ott über „Angewandte Mathematik an den mittleren technischen Fachschulen" in Band IV dieser Abhandlungen.

Seit den Münchener Verhandlungen von 1899 hat sich gewiß nach und nach die Erfahrung herausgebildet, die Hauck, wie oben erwähnt, abwarten will. Leider ist über das Maß der Anforderungen außer von Göttingen nichts weiter veröffentlicht worden; auch aus den Zeugnissen ist ja jetzt nichts mehr darüber zu ersehen. Ausführlicheres über das, was der Student, der eine Lehrbefähigung in angewandter Mathematik sich erwerben will, treiben soll, steht im Göttinger Studienplan (neueste Aufl. 1911), der in Band III dieser Abhandlungen erörtert werden wird. in diesen Studienplan sind ziemlich unverändert die „Ratschläge, betreffend das Studium der angewandten Mathematik" aufgenommen, die F. Klein im Herbst 1902 veröffentlicht hat. Es heißt darin u. a.:

Der Studierende muß lernen, die Probleme nicht nur in allgemeinen Umrissen zu sehen, sondern auch in allen Einzelheiten zu beherrschen; soll er doch weiterhin für die Resultate, welche er ableitet, die volle persönliche Verantwortung übernehmen. Daher ist in der angewandten Mathematik die zuverlässige und geschickte Durchführung der Aufgaben nach der zeichnerischen und rechnerischen Seite hin, wie andererseits ein Urteil über die in jedem Falle erreichte Genauigkeit, eine unerlässliche Forderung.

Hieraus folgt, daß von jedem Kandidaten, der sich zum Lehramtsexamen in angewandter Mathematik melden will, selbstangefertigte Zeichnungen und selbständig durchgeführte Rechnungen als Belege gefordert werden müssen.

Was zunächst die graphischen Fächer, also darstellende Geometrie und graphische Statik angeht, so scheint es richtig, von den Kandidaten die Vorlegung von etwa zehn selbstangefertigten und vom Dozenten bescheinigten Zeichnungsblättern zu verlangen.

Weiterhin wird, was Geodäsie angeht, die Vorlegung zweier unter der Kontrolle des Dozenten angefertigter und berechneter Terrainaufnahmen verlangt werden. Die zugehörigen Rechnungen sind ausdrücklich beizufügen. Hierüber hinaus wird ein Beleg über Teilnahme an astronomischen Übungen sehr willkommen sein.

Endlich kann dem Kandidaten nur dringend empfohlen werden, sich an den Übungen in technischer Physik zu beteiligen und die selbst durchgearbeiteten Laboratoriumsprotokolle beim Examen einzureichen; erhält doch das Studium der technischen Mechanik erst durch die unmittelbare Beschäftigung mit den Maschinen und ausgeführten Baukonstruktionen seine eigentliche über bloße theoretische Studien der Mechanik hinausgehende Bedeutung.

Auch auf der obengenannten Göttinger Besprechung von 1907 ist über die Höhe der Forderungen nicht gesprochen. Der von Weber

1) H. Grünbaum, Der math. Unterricht an den Deutschen Mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. Bd. IV, Heft 1 dieser Abhandlungen S. 93ff.

angeregte Gedanke eines Mittelexamens für die Mathematiker, die etwa nach drei Semestern abzulegen wäre, hat nicht die Billigung der Göttinger Versammlung gefunden.

Unter den einstimmig damals angenommenen Leitsätzen findet sich folgender:

Die angewandte Mathematik soll im mathematischen Studium der Lehramtskandidaten einen normalen Bestandteil bilden.

Wenn dieser gewiß wünschenswerte Zustand einmal eingetreten ist, dann wird sich als notwendige Folge ergeben, daß bei der Prüfung in Mathematik auch die angewandte Mathematik mit zu berücksichtigen ist. Man könnte dann die Lehrbefähigung in angewandter Mathematik auch in zwei Stufen teilen, wie das schon wiederholt gefordert wurde, und es wäre dann mit „Reiner Mathematik" für die erste Stufe notwendig „Angewandte Mathematik" für die zweite Stufe zu verbinden.

In seiner oben genannten Abhandlung setzt Stäckel auseinander, warum die Unterrichtsverwaltung überhaupt eine besondere Lehrfähigung in Angewandter Mathematik eingeführt hat. Er sagt:

Da die Disziplinen der höheren Geometrie, Arithmetik und Algebra, der höheren Analysis und der analytischen Mechanik (vgl. S. 56 dieser Abhandlung) in lebendigster Entwicklung begriffen sind, da von Jahr zu Jahr ihr Umfang zunimmt und sich ihre Methoden verfeinern, so müssen an die Studierenden immer höhere Anforderungen gestellt werden, damit das Ziel des Universitätsunterrichtes erreicht werde, den künftigen Lehrern nicht bloß eine enzyklopädische Bildung zu geben, sondern sie soweit zu führen, daß sie einmal an der wissenschaftlichen Forschung teilgenommen haben. Eine weitere Erschwerung des Studiums der Mathematik liegt darin, daß mit Recht immer mehr Wert auf eine vertiefte Einsicht in die Elemente gelegt wird. Bei dieser Lage der Dinge hat die Unterrichtsverwaltung davon Abstand genommen, die angewandten Fächer zu der Mathematik hinzuzunehmen, und eine besondere Lehrbefähigung für angewandte Mathematik eingeführt.[1]

Auf der Göttinger Besprechung machte Haußner den Vorschlag, zwei Stufen für angewandte Mathematik einzuführen, und für die zweite Stufe sich zu begnügen mit darstellender Geometrie, niederer Geodäsie und Grundlehren der Astronomie.

Daß die Astronomie wieder wie früher von den Lehramtskandidaten der Mathematik getrieben werde, forderte folgender Leitsatz:

In der angewandten Mathematik sollen auch Astronomie und Geonomie (Geodäsie, Geophysik) unterrichtet werden als Vorbilder praktisch gewordener Wissenschaften, in denen die angewandte Mathematik ihrem Wesen nach zur Geltung kommt.

In der Tat ist denn auch seit 1907 in Göttingen wenigstens dem Rechnung getragen worden. Mit Genehmigung des Ministers ist auf Antrag der Göttinger Professoren der Mathematik auch der Ordinarius der Astronomie in die wissenschaftliche Prüfungskommission als Examinator für angewandte Mathematik eingetreten.[2]

1) a. a. O. S. 295.

2) Vgl. dazu K. Schwarzschild, Über die astronomische Ausbildung der Lehramtskandidaten. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung B. 16. 1907. S. 519ff.

Das ist aber nicht so zu verstehen, daß jeder Kandidat der angewandten Mathematik auch in Astronomie geprüft werden muß. Vielmehr ist es in Göttingen üblich, daß die Kandidaten bei der Meldung zur Prüfung angeben, bei welchen beiden von den vier Examinatoren in angewandter Mathematik sie ihre besonderen Studien gemacht haben. Jeder dieser vier vertritt einen besonderen Zweig der angewandten Mathematik, und zwar zur Zeit 1. Runge: Das Graphische und Numerische, 2. Prandtl: Mechanik, 3. Wiechert: Geodäsie, 4. Hartmann: Astronomie. Es sind aber nicht alle sechs möglichen Kombinationen zulässig, sondern der Kandidat hat die Wahl 1. mit 2. oder 3. oder 4. zu verbinden. Diese Prüfung in angewandter Mathematik durch zwei Examinatoren wird von den Studenten, wie ich höre, nicht als erschwerend empfunden, im Gegenteil vielmehr begrüßt, da diese Trennung eine individuelle Prüfung ermöglicht. Mit den letzten Ausführungen wurde schon die Frage der Zusammensetzung der Kommission gestreift, die im nächsten Abschnitte erörtert werden soll.

Diese Betonung der Astronomie finden wir auch in dem von Gutzmer im Jahre 1907 erstatteten Bericht der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte[1]).

Eine Hauptforderung dieses Berichtes ist die Trennung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Studiums in zwei „Gruppen": eine mathematisch-physikalische und eine chemisch-zoologische.

Für eine solche Trennung, die übrigens vielfach schon vorhanden war und nach der Prüfungsordnung von 1898 durchaus möglich ist, spricht aber nicht allein der äußere Grund der zu großen Belastung der Studenten; vielmehr noch der innere Grund, daß die mathematischen Wissenschaften eine wesentlich anders gerichtete Denkart und Begabung fordern als die biologischen Wissenschaften. Daß für den Studienplan namentlich in kleineren höheren Schulen die Trennung hinderlich ist, muß freilich Nath[2]) zugegeben werden. Aber es wird für solche Schulen schließlich immer Mathematiker noch geben, die auch Biologie getrieben haben.

Die Nützlichkeit und innere Notwendigkeit der Trennung betont auch Bastian Schmid in seinem Vortrag[3]) auf der 17. Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und natur-

1) Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. 1907. Leipzig. F. C. W. Vogel; und im Gesamtbericht, der erstattet wurde, nachdem sich die Unterrichtskommission aufgelöst hat, um dem Deutschen Ausschuß für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht Platz zu machen: Gutzmer, Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Leipzig. B. G. Teubner. 1908. S. 295.

2) M. Nath, Die Vorbildung für das höhere Lehramt im besonderen in der Mathematik und den Naturwissenschaften. Neue Jahrbücher für das klassische Altertum und für Pädagogik. Bd. 20. S. 246 ff. 1907.

3) B. Schmidt, Lehrerbildung und Persönlichkeit des Lehrers. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Jahrg. XIV. 1908. S. 70.

wissenschaftlichen Unterrichts, die 1908 zum zweiten Male in Göttingen tagte. Da B. Schmid der Unterrichtskommission angehörte, so muß dieser Vortrag als ein wesentlicher Kommentar zu dem Gutzmerschen Berichte angesehen werden.

Für eine Änderung der Lehramtsprüfung sind in diesem Berichte eine Reihe Wünsche aufgestellt, von denen die drei ersten hier auch mitgeteilt werden sollen, während der vierte und fünfte weiter unten ihren Platz finden:

1. Wir stellen hier zunächst diejenigen Wünsche auf Abänderung der Prüfungsordnung zusammen, die sich nach dem Früheren ergeben:

a) Mathematik und Physik. Wir befürworten, daß in das Examen der angewandten Mathematik sinngemäße Anforderungen betr. Astronomie (nebst Geophysik) mit aufgenommen werden. Beiläufig befürworten wir der Gleichförmigkeit wegen (indem die angewandte Mathematik neben reiner Mathematik und Physik als normaler Bestandteil des Examens gelten soll), daß für angewandte Mathematik im gegebenen Falle ebenso die zweite Stufe erteilt werden möge wie für andere Fächer.

b) Chemie und Biologie. Wir beantragen, die Mineralogie von der Chemie abzulösen und Geologie und Mineralogie als besonderes Fach neu einzusetzen.[1] Wir beantragen ferner, die Bestimmung aufzuheben, nach der für Zoologie und Botanik (die als ein Fach gelten) schon dann die erste Stufe erteilt werden kann, wenn nur für eins der beiden Gebiete die entsprechenden Kenntnisse erbracht sind.

2. Ferner erklären wir, daß wir, was die sogenannte allgemeine Prüfung angeht, uns dem vielfach geäußerten Wunsche anschließen, es mögen aus der allgemeinen Prüfung diejenigen Bestandteile entfernt werden, die nur eine Wiederholung gewisser Teile des Abiturientenexamens darstellen. Es ist nicht abzusehen, warum gerade beim Oberlehrer diese Gebiete noch einmal geprüft werden sollen, die doch in das Examen keiner anderen Beamtenkategorie, wo sie ebensowohl verlangt werden könnten, eingesetzt sind. Auf die Beibehaltung einer allgemeinen Prüfung in Philosophie und Pädagogik legen wir dagegen nach dem Früheren das größte Gewicht; beide Fächer haben für die spätere Berufstätigkeit des Kandidaten eine spezifische Bedeutung; wir wünschen bei der Ausführung des Examens selbstverständlich alles zurückgedrängt, was bloß gedächtnismäßige Aneignung voraussetzt.

3. Allgemein wünschen wir, daß das Oberlehrerexamen nach Möglichkeit der individuellen Leistung des einzelnen Kandidaten gerecht wird. Das Ergebnis etwaiger Spezialstudien wird sich, falls eine Dissertation noch nicht vorliegt, durch eine zweckmäßig gestellte schriftliche Arbeit feststellen lassen. Im übrigen empfehlen wir, daß der Kandidat Belege über seine Beteiligung an Übungen und Seminaren sowie Protokolle der von ihm besuchten Praktika, eventuell auch Zeugnisse über abgelegte Semestralprüfungen (Fleißzeugnisse u. dgl.) seiner Meldung zum Examen beilegt. Die Examinatoren sind dann in der Lage, sich ein sehr viel zutreffenderes Bild von der Arbeitsweise des Kandidaten zu machen als ohne dieses Hilfsmittel. — Für die Einrichtung eines eigentlichen Zwischenexamens, die bekanntlich von vielen Seiten empfohlen wird, hat sich die Kommission nicht entscheiden mögen; sie fürchtet allerlei minder erwünschte Nebenwirkungen.

---

1) Vgl. auch den auf Wunsch des Vorstandes der Mineralogischen Gesellschaft erstatteten Bericht von R. Brauns: Die Vorschriften der Prüfungsordnungen für Mineralogie mit Geologie, Chemie und verwandte Fächer und die Vorschläge der Unterrichtskommission. Fortschritte der Mineralogie, Kristallographie und Petrographie. Jena. Gustav Fischer. 1911.

9. Die wissenschaftlichen Prüfungskommissionen.

Nachdem wir die Prüfungsbestimmungen selbst kennen gelernt haben, erscheint es auch angebracht, über den amtlichen Charakter, die Geschichte und die Zusammensetzung der wissenschaftlichen Prüfungskommissionen zu berichten. Hervorgegangen sind sie aus den wissenschaftlichen Deputationen für den öffentlichen Unterricht, die durch Kabinettsordre vom 4. Dezember 1809 in Berlin, Königsberg und Breslau eingerichtet wurden. Nach der von Wilhelm v. Humboldt ausgearbeiteten Instruktion sollten die wissenschaftlichen Deputationen über alle inneren Angelegenheiten des Schulwesens Gutachten abgeben und die wissenschaftlichen Grundsätze, aus denen die einzelnen Verwaltungsmaximen hervorfließen, gegenwärtig erhalten.

2) „Sie soll[1]) überhaupt für den öffentlichen Untterricht leisten, was die technischen Deputationen für andere Zweige der Staatsverwaltung leisten sollen. Die vorzüglichsten Männer in allen Fächern, welche auf den öffentlichen Unterricht Einfluß haben, werden zu Mitgliedern der Deputation gewählt, selbst wenn sie abwesend sind. Sie ist die Examinationsbehörde für höhere Schulbediente."

Nachdem die Konsistorien und die davon später abgezweigten Provinzial-Schulkollegien auch die Interna des höheren Schulwesens zur Bearbeitung erhalten hatten, während die äußeren Angelegenheiten den Regierungen übertragen waren, war den wissenschaftlichen Deputationen ein großer Teil ihrer Aufgaben genommen, und so wurden sie denn durch Kabinettsorder vom 19. Dezember 1816 in die „wissenschaftlichen Prüfungskommissionen" umgewandelt.

Unter dem 23. Dezember 1816 erließ die zweite Abteilung des Ministeriums des Innern[2]) für diese Prüfungskommission eine Instruktion, nach der solche Kommissionen einzurichten sind „in Berlin, Breslau, Königsberg, Halle und dem Sitz der zu stiftenden Rheinischen Universität".

Von den damaligen preußischen Universitäten fehlte also noch Greifswald, wo erst 1838 eine Kommission ins Leben trat, ohne daß ein besonderer Etat für Greifswald festgesetzt wurde. Bis 1847 haben die dortigen Professoren unentgeltlich das Prüfungsamt verwaltet, allerdings auf ihr eigenes Anerbieten.

Für die übrigen Kommissionen war von Anfang an ein bestimmter Etat festgesetzt, und zwar für Berlin 800 Taler, für die fünf anderen 640 Taler. Im Lauf der Zeit ist die Summe natürlich erhöht worden. Sie betrug im Jahre 1864 im ganzen 7265 Taler = 21 795 M. Zehn Jahre darauf erscheinen im Staatshaushaltsetat die wissenschaftlichen

---

1) Gesetzsammlung 1806–1810, S. 366 und Wiese, Das höhere Schulwesen in Preußen. Hist. stat. Darstellung. Berlin, Wiegand u. Gruben. 1864. S. 6.

2) Das Kultusministerium, oder, wie es in der amtlichen Sprache heißt, „das Ministerium der geistlichen und Unterrichtsangelegenheiten", besteht erst seit 1817. Im März 1911 sind die Medizinalangelegenheiten vom Kultusministerium auf das Ministerium des Innern übergegangen.

Prüfungskommissionen mit 14 200 Taler = 42 600 M., Im Jahre 1910[1]) hat der Posten des Etats, der im Kapitel 118, Titel 1 des Staatshaushaltes aufgeführt wird, folgendes Aussehen:

Remunerierung der Mitglieder und Beamten der wissenschaftlichen Prüfungskommissionen, sowie sächliche Ausgaben bei denselben, einschließlich 63384 M. aus den eigenen Einnahmen an Prüfungsgebühren 104 184 M.

Vermerk: Der Fonds erhöht oder erniedrigt sich, je nachdem die Einnahmen an Prüfungsgebühren den vorgenannten Betrag übersteigen oder nicht erreichen.

Auf die einzelnen wissenschaftlichen Prüfungskommissionen verteilt sich die Summe folgendermaßen:

Berlin.	17 400	Kiel	5 734
Königsberg . .	7 175	Göttingen . . .	11 080
Greifswald . .	8 600	Münster. . . .	15 850
Breslau	8 259	Marburg . . .	10 086
Halle	10 500	Bonn	9 500

Gegenüber dem vorjährigen Etatsjahr ist eine Zunahme von 6970 M. eingetreten.

An Einnahmen fließen den Kommissionen von den Kandidaten die Prüfungsgebühren zu, die natürlich auch immer höher geworden sind.

In dem Edikt von 1810 ist von Prüfungsgebühren noch nicht die Rede. Die Prüfungsordnung von 1831 bestimmt in § 26: Die Königlichen wissenschaftlichen Prüfungskommissionen sind ermächtigt, für jedes Zeugnis „4 Thaler Preußisch Kourant" ohne die Gebühren für den gesetzlich vorgeschriebenen Stempel von den Kandidaten entrichten zu lassen.

Diese Gebühr ist aber schon vorher auf Grund des Ministerialerlasses von 1824 erhoben worden.

Eine Verfügung von 1832 bestimmt, daß die Gebühren nicht zurückgegeben werden, falls der Kandidat nicht besteht; auch ist dieselbe Gebühr noch einmal zu zahlen, „wenn ein Kandidat bei dem ersten Examen ein zwar nicht hinderliches, jedoch ihm selbst nicht genügendes Zeugnis erhalten hat und nach einiger Zeit um Zulassung zu einem zweiten Examen bittet".

Auch die Prüfungen pro ascensione und pro rectoratu kosteten 4 Taler.

Die Stempelgebühr betrug 15 Silbergroschen. Eine Verdoppelung der Gebühren für die Prüfung trat durch die Prüfungsordnung von 1866 ein, deren § 39 besagt:

An Gebühren werden für eine Prüfung 8 Taler, für eine Nachprüfung 4 Taler und für die zum Zeugnis zu verwendenden Stempel fünfzehn Silbergroschen entrichtet. Erfolgt die Zurückweisung der Kandidaten schon vor der mündlichen Prüfung, so werden die Prüfungsgebühren auf die Hälfte herabgesetzt.

Fiskalischer klingt es aus dem § 42 der Prüfungsordnung von 1887.

1. Die Prüfungsgebühren sind sofort nach erfolgter Annahme der Meldung an die von der Kommission bezeichnete Kasse zu zahlen. Wenn ein Kandidat durch gültige Zeugnisse nachweist, daß er durch Krankheit genötigt ist, eine begonnene Prüfung aufzugeben, so werden die eingezahlten Gebühren zurückgegeben. In allen

1) D. h. im Etatsjahr 1910, das ist die Zeit vom 1. April 1910 bis 31. März 1911.

übrigen Fällen bleiben dieselben der betreffenden Gebührenkasse verfallen; es macht n dieser Hinsicht keinen Unterschied, ob die Prüfung zu Ende geführt ist oder nicht.

2. Die Gebühren betragen mit Ausschluß der Kosten der für die Zeugnisse anzuwendenden Stempel für eine Prüfung 30 M., für eine Wiederholungsprüfung ebenfalls 30 M., für eine Ergänzungs- und Erweiterungsprüfung 15 M.

Fast den gleichen Wortlaut enthält der § 40 der Prüfungsordnung von 1898; nur sind die Gebühren wieder wesentlich erhöht: für die vollständige Prüfung 50 M., für die Ergänzungs- und Erweiterungsprüfung 25 M.

Im Jahre 1906 sind die Gebühren nochmals erhöht worden. Die vollständige Prüfung kostet jetzt 60 M., jede Erweiterungs- und Ergänzungsprüfung 30 M. Wird die vollständige Prüfung in zwei Teilen abgelegt (vgl. S. 57 dieser Abhandlung), dann kostet sie 30 M. mehr. Der Gesamtpreis von 90 M. für die philologische Staatsprüfung ist also nicht mehr sehr von den Gebühren in Höhe von 100 M. verschieden, die das juristische Assessorexamen erfordert.

Wie der Etat, so ist auch die Zahl der Mitglieder der Prüfungskommissionen stark gewachsen. Ursprünglich besaß jede Kommission vier Mitglieder für die Fächer: Philologie, Geschichte, Mathematik und Physik, Pädagogik. Erster Examinator für Mathematik war in Berlin Tralles, der später auch Direktor der Prüfungskommission war[1]). Über ihn urteilt Max Lenz in seiner Geschichte der Universität Berlin[2]): als Forscher zehrte Tralles vom alten Ruhm und als Lehrer besaß er geringe Anziehungskraft.

Wer 1810 in Breslau und Königsberg erster Examinator für Mathematik wurde, läßt sich aus den Akten der dortigen Prüfungskommissionen nicht mehr feststellen[3]). Professor der Mathematik wurde 1811 in Breslau Brandes und Rake[4]); in Königsberg wirkte seit 1805 Wrede, „der neben Bessel keine selbständige Bedeutung hatte“[5]). Im Jahre 1825 kam bei allen Kommissionen ein fünftes Mitglied für evangelische Theologie und Hebräisch hinzu, sechs Jahre später auch für katholische Theologie in Breslau und Bonn. Die Naturwissenschaften sind bei allen Kommissionen durch ein sechstes Mitglied erst auf Grund einer Kabinettsorder vom 16. März 1839 vertreten.

1) M. Lenz, Geschichte der Universitäten. Halle a. S., Buchhandlung des Waisenhauses 1910. Bd. I S. 243 f.

2) Bd. II S. 375. Vgl. über Tralles aber auch die auf S. 5 dieser Abhandlung in Anmerkung 1 angeführte Arbeit von P. Schwartz.

3) Herrn Geheimen Regierungsrat und Provinzialschulrat Holfeld in Breslau, wie Herrn Professor Schülke in Königsberg bin ich für ihre Bemühungen zu Dank verpflichtet.

4) B. Nadbyl, Chronik und Statistik der Universität Breslau zur fünfzigjährigen Jubelfeier 1861, S. 45 f.

5) Prutz, Die Kgl. Alberts-Universität zu Königsberg im 19. Jahrhundert. Königsberg 1894, S. 12. Vgl. auch Felix Müller, Der math. Sternhimmel des Jahres 1811, Rückblick auf die Mathematik vor hundert Jahren. Zeitschrift für math. u. nat. Unterricht. 1911. S. 115 ff.

Nach und nach erwies es sich bei einzelnen Kommissionen als notwendig, ein wissenschaftliches Fach unter mehrere Examinatoren zu teilen, was zuweilen zur Unterscheidung von ordentlichen und außerordentlichen Mitgliedern führte. So bestanden z. B. im Jahre 1870[1]) die zehn wissenschaftlichen Prüfungskommissionen aus 72 ordentlichen und 34 außerordentlichen Mitgliedern.

Examinatoren für Mathematik und Physik zusammen waren 1870 in:

Königsberg: Richelot.	Bonn: Lipschitz.
Berlin: Schellbach.	Kiel: Weyer.
Greifswald: Fuchs.	Göttingen: Schering.
Breslau: Schröter.	Marburg: Stegmann.
Halle: Heine.	

Für Mathematik allein in Münster Heis (während die Physik mit Chemie und Mineralogie zusammen von Hittorf geprüft wurde); in Göttingen Clebsch.

Göttingen besaß also damals als einzige Universität zwei Examinatoren in Mathematik, wie es auch allein einen besonderen Examinator für Geographie damals schon hatte.

Die Chemie war mit Ausnahme von Göttingen und Kiel überall mit Mineralogie verbunden und getrennt von Botanik und Zoologie; in Göttingen trifft man 1870 die Verbindung Zoologie, Botanik und Mineralogie; dagegen ist in Kiel jedes dieser Gebiete einem besonderen Examinator übertragen, also auch Botanik getrennt von Zoologie. Überall zählten die Examinatoren der vier naturwissenschaftlichen Fächer zu den außerordentlichen Mitgliedern. Zu diesen gehört auch der Vertreter der polnischen Sprache in Breslau und der dänischen Sprache in Kiel.

Seit 1870 hat sich die Zahl der Examinatoren nahezu verfünffacht. In dem Etatsjahr[2]) 1910 haben alle zehn Kommissionen zusammen 350 Mitglieder; zwischen ordentlichen und außerordentlichen wird nicht mehr unterschieden. Es kommen jetzt auf:

Königsberg	28	Kiel	30
Berlin	45	Göttingen	34
Greifswald	31	Münster	44
Breslau	37	Marburg	34
Halle	31	Bonn	36

Außerdem ist an der Akademie in Posen eine Prüfungskommission eingerichtet worden, aber nur für Deutsch, Englisch und Französisch.

Mathematik und Physik sind jetzt überall getrennt; es gibt in dem laufenden Jahre folgende 37 Examinatoren für Mathematik und 21 für Physik:

1) Wiese, Das höhere Schulwesen in Preußen II. Berlin, Wiegand u. Grieben. 1869. S. 46—49 u. S. 732f.

2) Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung Preußens. 1910. Heft 5.

Ort	Reine Mathematik	Angewandte Mathematik	Physik
1. Königsberg	Meyer (U) [1] Schoenflies (U)	–	Volkmann (U) Kaufmann (U)
2. Berlin	Lampe (H) Knoblauch (U) Färber (O.R)	Steinitz (H.) (zum 1. Oktober 1910 an die neue Technische Hochschule in Breslau berufen; ein Nachfolger ist bis jetzt nicht ernannt worden)	Rubens (U) Krigar-Menzel (H) Böttger (Rg)
3. Greifswald	Engel (U) Vahlen (U)	Vahlen (U)	Mie (U) Starke (U) Schünemann (G)
4. Breslau	Rosanes (U) Sturm (U) Kneser (U) Vogt (G)	Sturm (U)	Lummer (U)
5. Halle a. S.	Cantor (U) Wangerin (U) Gutzmer (U) Eberhard (U)	Gutzmer (U)	Dorn (U)
6. Kiel	Pochhammer (U) Heffter (U) Landsberg (U)	Heffter (U)	Weber (U) Dieterici (U)
7. Göttingen	Klein (U) Hilbert (U) Landau (U)	Runge (U) Wiechert (U) Prandtl (U) Hartmann (U)	Riecke (U) [im Jahreswechsel mit Voigt (U)]
8. Münster	Killing (U) v. Lilienthal (U) Blankenburg (G)	Dehn (U)	Schmidt (U) Konen (U) Püning (G)
9. Marburg	Hensel (U) Neumann (U)	v. Dalwigk (U)	Richarz (U) Feußner (U) Schulze (U)
10. Bonn	Study (U) London (U) Hausdorff (U)	Schwering (G)	Kayser (U) Pflüger (U)

Wenn wir überall jetzt für Mathematik und Physik mehrere Examinatoren finden, so ist das nicht so zu verstehen, daß ein Kandidat in Mathematik oder Physik von mehreren Examinatoren geprüft wird. Das ist geradezu durch § 33 Abs. 4 der Prüfungsordnung von 1898 verboten. Es heißt dort:

Die verschiedenen Gebiete eines Prüfungsfaches auf mehrere Prüfende zu verteilen, ist nicht gestattet.

1) Bedeutung der Abkürzungen: U = Professor an der Universität, H = Professor an der technischen Hochschule, G = Professor (oder wie bei 10. Direktor) an einem Gymnasium, Rg = Professor an einem Realgymnasium, O.R = Professor an einer Oberrealschule.

Eine Ausnahme hiervon findet, wie oben schon erwähnt, in Göttingen bei der Prüfung in angewandter Mathematik statt.

In Chemie und Mineralogie wird jetzt mit Ausnahme von Königsberg allgemein in Preußen wieder von zwei Mitgliedern der Prüfungskommission geprüft.[1]) Auch Botanik und Zoologie ist wieder vielfach getrennt.

Die große Zahl der Examinatoren bei allen Kommissionen hat ihre Ursache zum Teil in der großen Zahl der Kandidaten, worüber weiter unten berichtet wird. Dann kommt aber auch die breitere Entwicklung zur Geltung, die sämtliche Fächer nachgerade genommen haben; schließlich auch der demokratische Grundzug der Universitätsentwicklung, wonach alle Ordinarien äußerlich gleich stehen sollen. Eine bei der großen Zahl der Examinatoren sehr praktische Neuerung brachte die Prüfungsordnung von 1898 durch die Bildung von Prüfungsausschüssen, über die es im § 3 heißt:

Für die Prüfung der einzelnen Kandidaten beruft der Vorsitzende aus den Mitgliedern der Kommission einen Prüfungsausschuß, dessen Leitung er entweder selbst übernimmt oder einem andern Mitglied überträgt.

Die Entscheidungen des Ausschusses erfolgen durch Mehrheitsbeschluß; bei Stimmengleichheit gibt der Leiter den Ausschlag.

Bei der mündlichen Prüfung müssen nach § 33 Abs. 2 unbedingt zwei Mitglieder anwesend sein. In der Regel sollen mindestens drei Mitglieder des Prüfungsausschusses, einschließlich des Leiters zugegen sein. Etwaige unvermeidliche Ausnahmefälle sind im Protokoll besonders zu vermerken.

Im § 14 der Prüfungsordnung von 1831 findet sich schon eine ähnliche Bestimmung:

Die Wichtigkeit der Prüfung erfordert die fortdauernde Gegenwart des Direktors der Kgl. wissenschaftlichen Prüfungskommission, auch soll außer dem jedesmal examinierenden Mitgliede noch ein Mitglied der Kommission bei der Prüfung für die einzelnen Fächer zugegen sein.

In der Dienstanweisung für die wissenschaftlichen Prüfungskommissionen, die die zweite Abteilung des Ministeriums des Innern am 23. Dezember 1816 erlassen hatte, heißt es:

Die Prüfungen müssen immer in gemeinschaftlichen Zusammenkünften geschehen und dürfen nicht von den einzelnen Mitgliedern in ihren Wohnungen vorgenommen werden.

Daß man es mit diesem Verbot nicht sehr genau nahm, zeigt u. a. der Brief, in dem Eduard Kummer am 30. August 1831 von Halle aus seiner Mutter über das glücklich bestandene Examen berichtet. Er schreibt[2]):

---

1) Vgl. den oben S. 73 Anm. 4 angeführten Bericht von R. Brauns. S. 5.

2) Der Brief ist abgedruckt in der Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages Eduard Kummers, herausgegeben vom Vorstande der Berliner mathematischen Gesellschaft. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1910. S. 44ff. Diese Festschrift bildet Heft XXIX der von Moritz Cantor begründeten Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.

Nachmittag hatte ich nur noch 3 Stunden in der Philologie, Geschichte und Mathematik. Ich kam um 2 Uhr zuerst zu dem Philologen Prof. Bernhardi (denn alle drei, welche mich Nachmittag examinierten, hatten sichs bequem gemacht und ließen mich auf ihre Stuben kommen). Dieser kam zuerst mit seinen echt philologischen Fragen hervor, ich gestand ihm aber immer, wo ich nichts wußte, und so legte er mir denn ein griechisches Buch vor, was ich übersetzen sollte. Dies war nun grade meine stärkste Seite und ich übersetzte es ihm Deutsch und Lateinisch ganz gut. Er meinte, wenn ich ein Wort nicht wisse, so sollte ich ihn nur fragen, ich wußte sie aber alle außer einem, von dem er selbst sagte, daß es ein sehr seltenes Wort sei. Kurz, wir unterhielten uns recht gut, weil ihm, wie es mir schien, meine Offenherzigkeit gefiel, und er sah, daß ich mein Wissen gerade so gab, wie es war. Er meinte, er werde mir den Unterricht in den unteren Klassen geben, was ich auch bloß gewünscht hatte. In der Geschichte wurde ich sowohl in der ältesten als neuesten und mittleren examiniert, in den beiden ersten ging es recht gut, aber in den mittleren wußte ich leider nicht viel. Beim Professor Scherk sodann, zu dem ich ging, setzten wir uns etwas aufs Sopha und unterhielten uns, und er meinte, er brauche mich eigentlich gar nicht zu examinieren, wenn er nicht darüber Bericht erstatten müßte. Er hatte eben einen Brief von einem seiner ehemaligen Schüler erhalten, welcher ihn bei einer Aufgabe um Rat frug, er gab sie mir, und ich löste denn die Schwierigkeit sogleich; sodann frug er mich noch in der Mechanik und Physik und ich blieb ihm keine einzige Antwort schuldig. Ich dachte, Ende gut, alles gut! . . .

Daß auch später noch Prüfungen ohne die Gegenwart von anderen Kommissionsmitgliedern zur Zeit der Geltung der Prüfungsordnung von 1887 stattfanden, ist oben schon erwähnt worden. Da sie auch jetzt noch, trotz der schärferen Fassung der betreffenden Paragraphen, gelegentlich vorkamen, so ist erst kürzlich durch einen Ministerialerlaß an die genaue Beobachtung des obenerwähnten § 33 Abs. 1 errinnert worden.

Ein ernstlicher Widerspruch gegen diese sicher im Interesse der Kandidaten liegende Bestimmung ist wohl auch nie aus den Kreisen der Examinatoren heraus erfolgt, wenn ja auch manche die Verpflichtung, bei der Prüfung eines anderen Examinators anwesend zu sein, als unbequem empfinden mögen. Vielleicht könnte man zur Entlastung der Professoren jüngere Oberlehrer und Privatdozenten als Protokollführer bei der Prüfung heranziehen.

Dagegen hat die Zusammensetzung der Prüfungskommission aus Universitätskreisen heraus bald nach dem Erscheinen der neuen Prüfungsordnung Mißfallen und Einspruch erfahren. Als bei der Etatsberatung in der 42. Sitzung des Preußischen Abgeordnetenhauses am 9. März 1900 der Titel Nr. 118: Wissenschaftliche Prüfungskommissionen zur Beratung kam, sagte der Berichterstatter, der Abgeordnete Winkler[1]):

Bei diesem Titel erkundigte sich in der Kommission ein Mitglied nach den Resultaten, die mit der neuen Prüfungsordnung erzielt seien, und meinte, es schiene, als ob diese nicht überall mit Beifall aufgenommen werde. Von seiten der Regierung wurde erklärt, in den Kreisen der höheren Lehrer habe man sie, soweit bekannt geworden, sympathisch begrüßt und verspreche sich Gutes von ihr.

1) Stenographische Berichte über die Verhandlungen des Abgeordnetenhauses 1900.

Einen Tag vor dieser Sitzung war von Göttingen aus unter dem 8. März 1900 ein Schreiben der philosophischen Fakultät an den Minister gerichtet worden, in dem gegen verschiedene Punkte der neuen Prüfungsordnung starke Bedenken geäußert wurden.[1])

Diese Eingabe richtet sich in ihrem letzten Teile gegen § 2 Abs. 3 der Prüfungsordnung, in dem es heißt: Die Kommissionen werden vorwiegend zusammengesetzt aus Universitätslehrern und Schulmännern.

Das Verzeichnis der Kommissionsmitglieder für das Jahr 1910 zeigt, daß wenigstens in Berlin auch Dozenten der technischen Hochschule (in Charlottenburg) zur Prüfungskommission gehören. Es ist auffallend, daß in Königsberg, der Prüfungskommission für Ost- und Westpreußen, die angewandte Mathematik gar nicht vertreten ist. Es müßte doch in Danzig auf der technischen Hochschule ein geeigneter Examinator zu finden sein.

Schulmänner haben auch früher schon der Prüfungskommission gelegentlich angehört.

Aus Engels Gedächtnisrede[2]) auf Graßmann erfährt man z. B., daß Graßmann seinerzeit in Berlin im Staatsexamen von einem Gymnasialmathematiker geprüft wurde. Vor allen Dingen sei an Schellbach erinnert, der jahrelang der Berliner Kommission angehört hat, wie das oben abgedruckte Zeugnis, Seite 16, und die oben angeführte Liste der Kommissionsmitglieder aus dem Jahre 1870 zeigen. Schellbach selbst ist ohne Staatsexamen 1834 auf Dirichlets Empfehlung am Friedrich-Werderschen Gymnasium angestellt worden.[3]) Es kam also bei ihm § 15 des Kgl. Edikts von 1810 zur Anwendung, der die Befreiung von der Prüfung zuläßt „bei anderweitig bewährter Geschicklichkeit des Subjekts". (Vgl. S. 4 dieser Abhandlung.) Im ganzen aber bildeten früher die Schulmänner einen geringen Prozentsatz der Kommissionsmitglieder, während im Jahre 1910 56 Schulmänner = 16 v. H. aller Kommissionsmitglieder vorhanden sind; Mathematiker sind darunter 4, Physiker 3.

Mitgerechnet sind die Vorsitzenden, die nach § 2 Schulmänner sein müssen. Unter den 11 Direktoren der Prüfungskommissionen, wenn die neue Kommission in Posen mitgezählt wird, sind im Jahre 1910 3 Gymnasialdirektoren, darunter einer zugleich ordentlicher Honorarprofessor, die übrigen Provinzialschulräte, von denen einer die Tätigkeit als Provinzialschulrat ausübt in seiner Eigenschaft als Oberregierungsrat und Direktor des Provinzialschulkollegiums. (In vier Provinzen

1) Diese von einer Kommission der philosophischen Fakultät verfaßte Eingabe hat mir liebenswürdigerweise der derzeitige Dekan der Göttinger philosophischen Fakultät Geheimrat Peter in Abschrift zur Verfügung gestellt. Auch die Breslauer philosophische Fakultät hat in einer Eingabe ihre Bedenken vorgetragen.

2) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1909, S. 350.

3) Felix Müller, Karl Schellbach. Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften. Bd. XX. Leipzig, Teubner. 1905. S. 11.

gibt es in Preußen jetzt Fachmänner als Direktoren der Provinzialschulkollegien, während in den acht anderen dieses Amt leider noch von einem Juristen verwaltet wird).

Unter den Vorsitzenden der Prüfungskommissionen, die außer in Posen auch als Examinatoren für die allgemeinen Fächer wirken, finden wir Vertreter der Mathematik oder der Naturwissenschaften im Jahre 1910 in Berlin Dr. Vogel, Geheimer Regierungsrat, Provinzialschulrat, in Posen Kummerow, Professor, Provinzialschulrat, in Münster Schickhelm, Professor, Provinzialschulrat.

Früher haben auch manchmal Universitätsprofessoren der Mathematik den Vorsitz geführt, so z. B. Schröter in Breslau, Pochhammer in Kiel.

Daß jetzt grundsätzlich Schulmänner Direktoren der Prüfungskommission sind, hat wohl in allen beteiligten Kreisen Beifall gefunden; auch daß sie in den allgemeinen Fächern prüfen, wird gebilligt.

Dagegen ist die starke Heranziehung von Schulmännern als Examinatoren für die besonderen Fächer auf Widerstand gestoßen, dem gerade auch die oben erwähnte Eingabe der Göttinger Philosophischen Fakultät Ausdruck gibt in folgenden Worten:

Wir möchten hier als ein unerläßliches Moment betonen, daß die Mitglieder der Kommission Fachmänner seien, wirkliche Fachmänner, die in der Wissenschaft, um die es sich handelt, im eigentlichen Sinne zu Hause sind und ihr Feld bebauen, nicht solche, die in noch so achtungswerter Weise eine wissenschaftliche Spezialität treiben, noch solche, die ohne in die Tiefe zu kommen, den Schein umfassender Kenntnis anzunehmen wissen. Solche Examinatoren erschweren dem Kandidaten seine Aufgabe und geben dem Staate niemals eine sichere Garantie für ein dem Sachverhalt entsprechendes Ergebnis der Prüfung. Wir wissen wohl, daß Fachmänner der bezeichneten Art auch außerhalb der Universitäten zu finden sind; es stünde schlimm um die Wissenschaft, wenn dem nicht so wäre, und wir könnten Ew. Exzellenz Männer, die für die Göttinger Kommission in Betracht kommen würden, als wohlgeeignete Kommissionsmitglieder namhaft machen. Aber über die wissenschaftliche Qualität solcher Fachmänner ein richtiges Urteil abzugeben, bedarf es vielfacher Voraussetzungen, die sich unseres Wissens nur an den philosophischen Fakultäten zusammenfinden. Es würde sich demnach, wie uns scheint, empfehlen, daß beim Eintreten von Umständen, welche die Teilnahme nicht einer Universität angehöriger Fachleute wünschenswert machen, irgend einer philosophischen Fakultät Gelegenheit gegeben würde, sich vorher zur Sache zu äußern.

Ebenso scharf spricht sich Study in dem oben genannten Artikel gegen die Heranziehung von Schulmännern als Examinatoren aus. Wenn er aber unter seinen vielen Bedenken auch bemerkt, daß in Berlin, „wo lange Jahre hindurch ein übrigens wissenschaftlich nicht unverdienter Schulmann als Examinator tätig war“[1]) der mathematische Verein alte Hefte besaß, nach denen die Vorbereitung auf die Prüfung zu erfolgen pflegte, so ist diese Tatsache durchaus nicht charakteristisch bedingt durch die Amtseigenschaft der Examinatoren. An einer anderen preußischen Universität, an der viele Jahre hindurch zwei ordentliche Professoren der Mathematik abwechselnd prüften, besaß der

1) Zeitschrift für math. u. naturwiss. Unterricht. Jahrgang XXXII. 1902. S. 75.

mathematische Verein ein ganz ausführliches Heft mit den üblichen Fragen. Das Gleiche gilt von einer außerpreußischen Universität.

Und wenn es weiter „unter dem neuen Reglement schon vorgekommen ist, daß ein Schulmann eine Prüfung nach einem sogar in das Examen selbst mitgebrachten Fragezettel abgehalten hat"[1]), so ist das unter dem alten Reglement, wie ich ganz bestimmt weiß, bei Universitätsprofessoren auch vorgekommen.

Man wird ein Fragen nach einem mitgebrachten Zettel garnicht einmal so verurteilen können, vorausgesetzt, daß die aufgeschriebenen Fragen gerade der Invidualität der Kandidaten Rechnung tragen, wie sie sich aus dem Bericht über seine Studien ergeben soll. Ein solcher Fragezettel wird auch dazu beitragen, daß innerhalb einer gewissen Zeit, die auf die Prüfung verwandt wird — für das Hauptfach meistens wohl eine Stunde — die wesentlichsten Gebiete wirklich geprüft werden.

Daß auf seiten der Universitätsprofessoren nicht alles ideal war, gibt Study auch zu, indem er sagt:[2])

Ein einfaches Mittel zur Abhilfe wäre jedenfalls eine rücksichtslose Absetzung solcher Examinatoren, die durch übertriebene oder sonst unverständige Anforderungen sich hervortun, oder die ihre Macht mißbrauchen, um ihre Hörsäle zu füllen. Dazu wäre allerdings nötig, daß die Beamten, denen die Leitung des Prüfungswesens obliegt, sich zu den Mitgliedern der Prüfungskommission und womöglich auch zu zahlreichen jüngern Lehrern in persönliche Beziehung setzten. Wir wollen auch hier daran erinnern, daß ein unbeliebter Examinator stets ein schlechter Examinator ist, wie wohl das Umgekehrte nicht behauptet werden kann.

Daß die Beteiligung von Schulmännern bei der Staatsprüfung nicht als eine allgemeine Standesfrage angesehen wird, darin hat Study Recht. Die berufene Standesvertretung des preußischen Philologenstandes, die Delegiertenkonferenz, die aus den von den zwölf Provinzialvereinen der Oberlehrer gewählten Vertretern besteht[3]), hat nie einen Leitsatz aufgestellt, der eine derartige Forderung ausspricht. Im Abgeordnetenhause hat sogar im Jahre 1902 der Abgeordnete Realgymnasialdirektor Wetekamp in der 44. Sitzung beim Etat der Wissenschaftlichen Prüfungskommission gegen die zu starke Heranziehung von Schulmännern als Examinatoren im Interesse der zu prüfenden Kandidaten Einspruch erhoben. Der Regierungskommissar Köpcke, jetzt Dirigent der Abteilung U 2 des Ministeriums, der die Prüfungskommissionen unterstehen, erklärte darauf unter Heiterkeit des Hauses[4]):

Es war vorgekommen, daß durch übertriebenes Spezialisieren die Gesamtforderung der Prüfung derart gesteigert wurde, daß die Kandidaten mehr wissen sollten, als die Examinatoren.

---

1) Zeitschrift für math. u. naturwiss. Unterricht. Jahrgang XXXII. 1902. S. 75.

2) ebenda S. 77.

3) Vgl. Schimmack, Die Entwicklung der math. Unterrichtsreform in Deutschland. Diese Abhandlungen Bd. III, Heft 1, S. 57.

4) Stenographische Berichte der Verhandlungen des Abgeordnetenhauses. 1902. 44. Sitzung. Diese Sitzung, wie die oben erwähnte aus dem Jahre 1890 sind seit 25 Jahren bis jetzt die einzigen, in denen beim Etat der Prüfungskommissionen das Wort genommen wurde.

Eine ähnliche Auffassung klingt aus einem Ministerialerlaß vom 5. April 1890, der an die Direktoren der Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen gerichtet ist:

Von den Gründen, welche dagegen geltend gemacht worden sind, daß die Prüfung in der Botanik und Zoologie und in der Chemie nebst Mineralogie durch nur je einen Examinator abgehalten werden solle, kann – soweit dabei die Vorbereitung der Prüflinge in das Auge gefaßt worden ist – der als beachtenswert nicht anerkannt werden, der aus der mit dieser Bestimmung angeblich verbundenen Beeinträchtigung des wissenschaftlichen Charakters der Prüfung hergeleitet wird. Durch § 7, 2 ist die ordnungsmäßige Vorbereitung der Prüflinge für das Fachstudium durch akademische Vorlesungen und Übungen an sich hinlänglich gewährleistet.

Wenn aber von einzelnen Mitgliedern der Königlichen Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen erklärt wird, daß sie nicht imstande seien, zugleich in Botanik und Zoologie und in Chemie und Mineralogie wissenschaftlich zu prüfen, so lassen solche Äußerungen klar erkennen, wie die Trennung der Prüfungsgegenstände innerhalb eines Prüfungsfaches unter Umständen gleichbedeutend sein würde mit der Zumutung zu schwierigen Forderungen an junge Leute, die soeben erst ihr akademisches Studium vollendet haben. Davor sollten diese aber gerade bewahrt werden, indem eine Handhabung der Prüfung in Zoologie und Botanik sowie in Chemie nebst Mineralogie vorgesehen wurde, bei der von ihnen nur der Nachweis verlangt wird, daß sie in dem einen zu einem Prüfungsfache verbundenen Gegenstände eingehendere wissenschaftliche Studien gemacht, in dem anderen aber sich auf der Universität ausreichend orientiert haben.

Mit Rücksicht auf die obwaltenden Verhältnisse will ich aber für die Zeit des Überganges gestatten, daß besonders verdienten älteren Mitgliedern der Königlichen Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen für die unter 14 und 15 in § 3, 1 B der Prüfungsordnung aufgeführten Prüfungsfächer auf Wunsch für einen Teil der Prüfung des betreffenden Faches die Zuziehung eines von ihnen selbst zu wählenden Helfers erlaubt werde, mit dem sie sich betreffs einer etwaigen Entschädigung persönlich abzufinden haben; die Auswahl bedarf der Zustimmung des Vorsitzenden. Eine eigene Stimme kann jedoch diesem Helfer bei den Beschlußfassungen der Prüfungskommission nicht zugestanden werden; seine gutachtliche Äußerung zu verwerten, wird Sache des eigentlichen Examinators sein.

Tatsächlich ist ein solcher Helfer fast nie herangezogen worden. Für „Chemie nebst Mineralogie" findet man bei allen Kommissionen jetzt Universitätsprofessoren als Examinatoren und auch einige Schulmänner. Im Jahre 1909 hatte ein Schulmann noch alle vier naturwissenschaftlichen Fächer zu prüfen; in Jahre 1910 ist eine derartige Häufung nirgends mehr vorhanden.

Auch die (S. 72) schon erwähnte Unterrichtskommission der Deutschen Naturforschergesellschaft hat sich mit dieser Frage der Auswahl der Examinatoren beschäftigt und hat in ihrem oben angeführten Berichte von 1907 die Wünsche der Unterrichtskommission, der doch auch die Schulmänner Bastian Schmid, Fricke, Pietzker, Poske und Schotten angehörten, in folgender Form zusammengefaßt:

4. Als Examinatoren sollten nach unserer Meinung im Prinzip nur die Fachvertreter an der Hochschule, und diese in größerer Zahl nebeneinander wirken. Nicht nur, weil sie allein in der Lage sind, den Kandidaten aus persönlichem Verkehr wissenschaftlich zu kennen, sondern namentlich auch, weil sie allein die wechselnden und immer fortschreitenden Bedingungen des Hochschulbetriebes lebendig vor Augen haben. Ein richtig gehandhabtes Examen seitens der Fachvertreter dürfte

in der Tat nicht nur im Resultat zutreffender sein als dasjenige fremder Examinatoren, sondern auch – weil die Fachvertreter weniger in bestimmten Formulierungen befangen sein werden als fremde Examinatoren – für den Kandidaten leichter und angenehmer.

5. Freilich muß die Gefahr vermieden werden, daß die Fachexaminatoren Spezialkenntnisse in ihrem Fache auch dann verlangen, wenn nach Lage der Sache beim Kandidaten von Spezialisierung nicht die Rede sein kann. Dem mag das Zusammenwirken verschiedener Examinatoren entgegentreten. Im übrigen geben wir der Hoffnung Ausdruck, daß Auseinandersetzungen wie die gegenwärtige zur Abstellung etwa hier und da vorhandener Übelstände einiges beitragen möchten.

Gegenüber der sehr entschiedenen Ablehnung von Schulmännern als Examinatoren, wie wir es bei Study und in dem Schreiben der Göttinger Philosophischen Fakultät fanden, muß doch darauf hingewiesen werden, daß ein sehr berühmtes ehemaliges Mitglied der Göttinger Philosophischen Fakultät eine ganz andere Ansicht ausgesprochen hat. Der Orientalist Paul de Lagarde, der zwölf Jahre selbst an Gymnasien, Real- und Mädchenschulen gewirkt hat, ehe er an die Universität berufen wurde, behandelte in einem seiner auch heute noch sehr bemerkenswerten politischen Aufsätze, die unter dem Titel „Deutsche Schriften“[1]) erschienen sind, Fragen des Unterrichts und der Erziehung. Dabei kommt er auch auf die Beteiligung der Universitätsprofessoren an Staatsprüfungen zu sprechen. Da dieser 1878 mit Rücksicht auf das damals zu erwartende Unterrichtsgesetz erschienene Aufsatz in den Kreisen der Mathematiker kaum bekannt ist, so seien folgende Stellen hier mitgeteilt:

Vorab spreche ich ausdrücklich aus, daß die Kommissionen dieser Kategorie von der Regierung stets sorgfältig ausgewählt werden, und daß mit Ausnahme der Zeit, in welcher E. W. Hengstenberg[2]) in Berlin in einer solchen saß, meines Wissens nie ein Vorwurf irgendwelcher Art gegen die Männer erhoben worden ist, aus welchen diese Kommissionen bestanden: daß ich eine Reihe von jetzt beschäftigten Beisitzern dieser Behörden persönlich kenne, und weiß, daß sie ihr Amt mit großer Sachkenntnis und Aufopferung verwalten, und daß ich von allen, welche ich nicht kenne, überzeugt bin, daß sie denen, welche ich kenne, völlig gleichwertig sind.

Nichtsdestoweniger trage ich auf Abschaffung der Einrichtung an.

Schon oben habe ich auf die ungeheuere Arbeitslast verwiesen, welche einen Universitätsprofessor drückt. Wer diese in Abrede stellt, dem bestreite ich das Recht mitzusprechen, und wenn ein Universitätsprofessor sie in Abrede stellen sollte, so bestreite ich ihm sein Recht auf eine Professur.

Nun nimmt die Mitgliedschaft einer solchen Kommission meines Wissens den vollbeschäftigten Beisitzern nur für die Abhaltungen der Prüfungen selbst mindestens einen halben Tag in jeder Woche des Semesters fort: dem Vorsitzenden außer diesem mindestens noch zwei andere halbe Tage. Dazu kommt die Zensur der schriftlichen Arbeiten der Prüflinge. Diese Zensur mag jeder sich so unbequem denken wie er will, ich vermute, sie wird immer noch unbequemer sein. Jedenfalls raubt sie Zeit, und Zeit kann ein Professor nicht missen. Er kann die Zeit, welche er einer solchen Kommission opfert, höchstens darangeben, wenn er mit einem ungewöhnlich gesunden Leibe ausgestattet ist, und auf vieles verzichten will, auf das zu verzichten er meines Erachtens kein Recht hat.

Vor allem aber, die Studierenden mißverstehn den Auftrag jener Kommission

---

1) Paul de Lagarde, Deutsche Schriften. Gesamtausgabe letzter Hand. Dritter Abdruck. Göttingen, Dieterichsche Verlagsbuchhandlung. S. 198 ff.

2) Vgl. S. 16 Anm. 1 dieser Abhandlung.

in dem Maße mehr, in welchem es die Signatur der Zeit ist, rasch zu Brote zu streben. Tatsächlich werden nur Professoren gehört, welche in dem Prüfungsausschusse sitzen: die Tüchtigsten, welche aus ihm austreten, nehmen ohne weiteres einen kleineren Hörsaal. Alles bleibt unberührt, was nicht in den Studienkreis, besser gesagt in den Vortragskreis der Examinatoren fällt. Auch der bedeutendste Gelehrte vermag nicht sein ganzes Fach zu umspannen.

Man wird fragen, wer denn prüfen solle, wenn es Universitätsprofessoren nicht sollen. Ich denke, besonders ausgewählte Lehrer der Gymnasien.... Es bleibt mir dunkel, warum die Philologen Keil, Jordan und Martin, die Mathematiker L. Fuchs und Paul Dubois-Reymond, der Historiker Schirrmacher, der Physiker Clausius, der Philosoph Schuppe, welche als Universitätsprofessoren sofort die Fähigkeit besessen haben, Mitglieder einer Prüfungskommission zu sein, diese Fähigkeit nicht auch einige Wochen und Monate vor ihrer Ernennung zu Hochlehrern (wie die Holländer uns nennen) besessen haben sollten, als sie nur Oberlehrer oder Kollaboratoren oder Schulamtskandidaten hießen. Das Ministerium wird in der Lage sein, eine stattliche Reihe von Männern zusammenzubringen, welche an Gymnasien unterrichten, und ganz gut verstehn, Themen für die Prüfung ihrer künftigen Kollegen zu finden, die eingegangenen Arbeiten der Kandidaten zu beurteilen und das mündliche Examen abzuhalten. Schon jetzt sind hier und da die Kommissionen nicht bloß aus Angehörigen der Universitäten zusammengesetzt. Man beurlaube solche Lehrer auf ein Jahr, indem man sie durch Kandidaten vertreten läßt, und man wird verschiedenes Gutes erreichen. Man wird einmal die Universitätsprofessoren entlasten, sodann die geradezu unsittliche Manier der Studenten, nur Examinatoren zu hören, beseitigen, jene Lehrer zum ernstesten Studium ermuntern, erkunden lernen, wo sich geeignetes Material für die Besetzung akademischer Stellen findet, das innerlich reifer ist als so viele Dozenten, welche jetzt aus Not rasch zu Professoren gemacht werden, man wird endlich die Kandidaten verpflichten, antreiben und erkennen, welche auf diesem Wege, als zeitweilige Vertreter von Hauptlehrern, schon im Anfange ihrer Laufbahn zu einem wirklich verantwortlichen Unterrichten kämen ...

Man wird — und darauf kommt es in dem einer ganz ungesunden Zentralisation entgegensteuernden Deutschland wahrlich an — neue und stets wechselnde Mittelpunkte geistigen Strebens und Lebens schaffen, ohne die alten, die Universitäten im mindesten zu beeinträchtigen. ... Auch diese Schullehrer werden, wie die Professoren, nur einen Ausschnitt der Wissenschaft beherrschen, und ihr Examen wird individuell gefärbt sein: aber die Unzulänglichkeiten, welche nach Brot streben, werden den Ausschnitt der Wissenschaft und die Individualität nicht vorher kennen, denen sie gegenüber zu stehen haben, und darum ihre Berechnungen nicht auf eine bestimmte Schwäche des Prüfenden richten können, sie werden sich weiter umsehen, und infolge der weiteren Umschau sich mit Ideen, nicht bloß mit dem Mäusedreck der Notizen bekannt machen, oder ihr Vorhaben, Lehrer zu werden, aufgeben müssen. Die Kosten des Verfahrens würden sich auf die Diäten beschränken, welche die Examinatoren achtmal im Jahre erhielten, um in der Hauptstadt der Provinz zusammenzukommen, und auf die geringen Summen, welche den sie vertretenden Schulamtskandidaten zuzubilligen wären.

Das allgemeine Unterrichtsgesetz, das vor dreißig Jahren in Preußen erwartet wurde, ist noch nicht zustande gekommen. Das von Lagarde Geforderte ist auch noch nicht ins Leben getreten. Wenn man nun auch gewiß nicht Lagarde darin zustimmen kann, daß alles, was „er forderte, ins Leben gerufen werden muß, weil sonst Deutschland zu Grunde geht“[1]): eine Annäherung an das ideale Endziel der Lagardeschen Forderungen stellt jedenfalls der heutige Zustand dar.

1) Deutsche Schriften S. 198.

Gegen Schulmänner als Examinatoren spielt Study noch folgenden Trumpf aus[1]:

Eine allgemeine Entrüstung würde sich ohne Zweifel in Lehrerkreisen bemerklich machen, wollten Universitätsprofessoren, Archivbeamte oder Pastoren eine Mitwirkung beim Abiturientenexamen verlangen.

Tatsächlich besteht nun aber die Möglichkeit einer Mitwirkung, wenigstens der Universitätsprofessoren, soweit sie Mitglieder der Wissenschaftlichen Prüfungskommission sind.

Nach der schon oben erwähnten Dienstanweisung vom 23. Dezember 1816 gehörte zu den Aufgaben der Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen, auch die Verhandlungen der Abiturientenprüfungen zu revidieren. Bis 1885[2]) wurden regelmäßig die Prüfungsverhandlungen zur Revision eingereicht und kamen dann häufig mit Bemerkungen zurück, die in den Kreisen der Schulmänner als unangebracht angesehen werden mußten, weil das Material ersichtlich ohne Kenntnis der tatsächlichen Verhältnisse der höheren Schule, lediglich durch die akademische Brille betrachtet worden war. Der Ministerialerlaß vom 15. Juli 1885, der die Regelmäßigkeit der Revision beseitigte, wurde daher sehr begrüßt. Da er diese Seite der Tätigkeit der Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen gut beleuchtet, so sei er im Wortlaut hier mitgeteilt[3]):

Die wissenschaftlichen Prüfungskommissionen haben durch die mühevolle Ausführung der ihnen überwiesenen Revision wesentlich dazu beigetragen, daß in den Reifeprüfungen der höheren Schulen eine bestimmte und eine in den einzelnen Anstalten derselben Kategorie möglichst gleichmäßige Höhe der Schulbildung erfordert und nachgewiesen wird; dieselben haben sich hierdurch um die Befestigung der Einrichtigungen unseres höheren Schulwesens ein hoch zu schätzendes Verdienst erworben. Nachdem aber durch die fast siebzigjährige Tätigkeit der Wissenschaftlichen Kommissionen in Prüfung der Kandidaten des höheren Schulamtes erreicht ist, daß die Lehrer dieser Anstalten, diejenigen wenigstens, welche mit dem Unterrichte in der obersten Klasse betraut und Mitglieder der Reifeprüfungs-Kommissionen sind, eine wissenschaftliche Ausrüstung von annähernd gleichem Maße besitzen; nachdem ferner durch die vereinte Wirksamkeit der Provinzial-Schulräte als Königlicher Kommissar bei den Reifeprüfungen und der revidierenden Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen das Verfahren in den Reifeprüfungen eine feste Tradition zu annähernder Gleichmäßigkeit gewonnen hat: läßt sich die Frage nicht abweisen, ob die regelmäßige Revision der Prüfungsverhandlungen von den gesamten höheren Lehranstalten oder einem bestimmten Teile derselben durch die Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen noch jetzt als ein Erfordernis im Interesse unserer höheren Schulen zu betrachten ist. Ohne die Bedeutung zu unterschätzen, welche Revisions-

---

1) Zeitschrift für math. u. naturwiss. Unterricht. Jahrgang XXXII. 1890. S. 76.

2) Die Ausführungen bei Klein-Schimmack, der Mathematische Unterricht an den höheren Schulen, S. 90, sind nicht ganz zutreffend. Tatsächlich wurden auch in der Provinz Hannover die mathematischen Reifeprüfungsarbeiten bis Ostern 1885 regelmäßig zur Revision nach Göttingen geschickt, wie mir von Professor Laumann bestätigt wird, der seit 1884 am Realgymnasium in Quakenbrück den mathematischen Unterricht in Prima erteilt. Auch Professor H. A. Schwarz schreibt mir, daß „er noch viele Jahre nach 1875 in Göttingen an der Revision der Abiturientenarbeiten beteiligt war“.

3) Zentralblatt der Preußischen Unterrichtsverwaltung 1885. S. 626.

bemerkungen fachmännischer Autoritäten bezüglich der Wahl der gestellten Aufgaben, der Strenge und Genauigkeit der Korrekturen auch jetzt noch für den Unterrichtsbetrieb zu gewinnen vermögen, muß ich es doch für mehr als zweifelhaft erachten, ob dieser Ertrag in richtigem Verhältnisse zu der Arbeit stehe, welche hierdurch den ohnehin stark in Anspruch genommenen Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen zugewiesen sind.

Aus diesen Erwägungen habe ich mich dahin entschieden, daß von der regelmäßigen Vorlage der gesamten oder eines bestimmten Teiles der Verhandlungen von den Reifeprüfungen der höheren Schulen an die Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen bis auf weiteres Abstand genommen wird.

Unverändert bleibt hierdurch die den Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen für die Revision der Verhandlungen der Reifeprüfungen an den höheren Schulen bisher zugewiesenen Stellung. Einerseits ist Wert darauf zu legen, daß in den Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen ein von der eigentlichen Schulverwaltung unabhängiges Organ zu fachmännischer Beurteilung des in den Reifeprüfungen an den höheren Schulen tatsächlich eingeschlagenen Verfahrens und der in demselben nachgewiesenen Zielleistungen ein für allemal besteht. Anderseits können diejenigen Mitglieder der Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen, welche als Professoren an der Universität die wissenschaftliche Ausbildung der zukünftigen Lehrer der höheren Schulen als einen wesentlichen Teil ihres Berufes zu betrachten haben, in der Kenntnisnahme von den tatsächlichen Schlußleistungen der Schulen auf den von ihnen vertretenen wissenschaftlichen Gebieten einen Anlaß finden zu erneuter Erwägung der Gesichtspunkte, welche für die wissenschaftliche Bildung von Lehrern entscheidende Bedeutung haben.

Indem ich hiernach unter Abstandnahme von der regelmäßigen Vorlage der Reifeprüfungs-Verhandlungen an die Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen die prinzipielle Stellung dieser Kommissionen zu den Reifeprüfungen an den höheren Schulen unverändert bestehen lasse, behalte ich mir vor, so oft ich dazu Anlaß finde, über das Verfahren oder die tatsächlichen Leistungen in einzelnen oder in allen Gegenständen der Reifeprüfungen, für den Bereich einer einzelnen Provinz oder der gesamten Monarchie das fachmännische Gutachten der Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen einzuziehen und darf voraussetzen, daß dieselben diese Arbeiten einer ausdrücklich zugewiesenen Revision mit derselben Hingebung ausführen werden, durch welche dieselben in der bisherigen regelmäßigen Ausführung der Revision mich zu Danke verpflichtet haben.

Der Minister der geistlichen usw. Angelegenheiten.
In Vertretung: Lucanus.

Die Verpflichtung, eine Revision der Verhandlungen vorzunehmen, wenn der Minister es anordnet, bleibt also für die Wissenschaftliche Prüfungskommission bestehen.

So sind denn auch kürzlich die lateinischen Prüfungsarbeiten des Ostertermins 1908 sämtlicher Gymnasien und Realgymnasien — ungefähr 6000 Arbeiten — von 19 Universitätsprofessoren, die Mitglieder einer Wissenschaftlichen Prüfungskommission sind, revidiert worden. Über das Ergebnis dieser Revision ist ein eingehender allgemeiner Bericht ergangen, der im Zentralblatt abgedruckt wurde.[1])

In diesem Jahre (1910) sind die naturwissenschaftlichen Prüfungsarbeiten der Realgymnasien und Oberrealschulen eingefordert worden.

Eine derartige gelegentliche Revision wird in den Kreisen der Schulmänner sicher allgemein begrüßt. Es wäre auch ganz angebracht,

1) Zentralblatt der Preußischen Unterrichtsverwaltung 1909. S. 360 ff.

wenn gelegentlich Professoren der Hochschulen an den höheren Schulen hospitierten, wie das Klein in den Jahren 1893/94 in der Stadt Hannover, v. Wilamowitz-Möllendorf ungefähr acht Jahre später in Frankfurt und Hamburg, Slaby[1]) 1900 in der Provinz Brandenburg getan hat.

In Braunschweig, Sachsen und in Bayern finden übrigens die Reifeprüfungen häufig unter Vorsitz von Hochschulprofessoren der Mathematik statt, ohne daß sich deswegen ein Sturm der Entrüstung erhebt.

Die Aufsicht über die Wissenschaftliche Prüfungskommission führt nach der Dienstanweisung von 1816 der Oberpräsident der Provinz. Der amtliche Verkehr geht aber unmittelbar vom Minister an den Direktor, nicht über den Oberpräsidenten, der tatsächlich heute mit der Kommission seiner Provinz nichts mehr zu tun hat. Die Mitglieder der Prüfungskommission werden vom Minister immer für ein Geschäftsjahr, das am 1 April beginnt, neu ernannt. Auf Grund einer Verfügung vom 24. Oktober 1900 haben sie auch über das Geschäftsjahr hinaus so lange zu fungieren, bis die Zusammensetzung für das folgende Jahr erfolgt ist. Nach § 2 Absatz 2 bestimmt der Minister auch Sitz und Prüfungsbezirk der Kommissionen. Es ist also nicht ausgeschlossen, daß die Kommission einmal entsprechend den Lagardeschen Forderungen in der Hauptstadt der Provinz zusammentritt, die nicht immer Universitätsstadt ist. Die Festsetzung der Prüfungsbezirke kommt wesentlich für die schon im Amte befindlichen Kandidaten in Betracht, die einer Erweiterungsprüfung sich unterziehen wollen. Über die Zuständigkeit der Kommission besagt § 4:

1. Zuständig für die Prüfung ist jede Kommission, in deren Prüfungsbezirk

a) die Universität liegt, an welcher der Kandidat das letzte und mindestens noch ein früheres Halbjahr seiner Studienzeit zugebracht hat, oder

b) die Verwendung der Kandidaten im öffentlichen Schuldienst in Aussicht genommen ist oder bereits stattfindet.

2. Dem Minister bleibt es vorbehalten, die Erledigung von Meldungen, welche bei einer Kommission eingegangen sind, im Falle zeitweiliger Überlastung oder aus sonstigen Gründen einer anderen Kommission zu überweisen.

3. Zur Meldung bei einem nicht zuständigen Kommissar hat der Kandidat die Genehmigung des Ministers mit darlegenden Gründen nachzusuchen.

4. Dem Deutschen Reiche nicht angehörige Kandidaten haben in jedem Falle zu ihrer Meldung die Genehmigung des Ministers einzuholen.

Der Geburtsort oder der Ort der Reifeprüfung hat aber keinen gesetzlichen Einfluß auf die Wahl der Prüfungskommission. Ein Rheinländer kann seine Prüfung z. B. in Königsberg machen. Drei Halbjahre müssen aber auf Grund der noch gültigen Kabinettsorder vom 30. Juni 1841 auf einer preußischen Universität zugebracht sein. Für das Studium Mathematik, Physik und Chemie wird, wie oben (S. 57) erwähnt, bis zu drei Halbjahren an Stelle der Universität der Besuch einer deutschen Hochschule angerechnet auf die vorgeschriebenen drei Studienjahre. Über die Dauer des Studiums wird in Band III dieser

1) Verhandlungen der Schulkonferenz 1900. S. 159 f.

Abhandlungen gesprochen werden; hier sei nur von vornherein bemerkt, daß drei Jahre nie ausreichen. Auch in dem oben genannten Gutzmerschen Berichte der Unterrichtskommission werden vier Jahre gefordert.

Schließlich ist hier noch zu erwähnen, daß die Staats-Prüfungszeugnisse von Leipzig, Karlsruhe, Gießen, Rostock, Jena, Braunschweig und Straßburg auch in Preußen gültig sind, wie umgekehrt die preußischen Zeugnisse in Sachsen, Baden, Hessen, Mecklenburg, den Thüringischen Staaten, Braunschweig und dem Reichsland Elsaß-Lothringen anerkannt werden, ebenso natürlich in den deutschen Bundesstaaten, die keine wissenschaftliche Prüfungskommission besitzen. Von diesen sei hier nur das Großherzogtum Oldenburg erwähnt, wo freilich noch eine Ministerialbekanntmachung vom 4. Mai 1859 zu Recht besteht, betreffend „das Regulativ über die Leitung der Prüfung der Kandidaten des höheren Schulamts und der Privatlehrer der höheren Schulfächer". Vor ungefähr dreißig bis vierzig Jahren ist dort auch wohl einmal ein Kandidat geprüft worden. Es liegt hier der Vergleich mit den auf Seite 21 dieser Abhaudlungen erwähnten früheren Prüfungskommissionen in Corbach, Frankfurt und Wiesbaden nahe.

Zwischen den beiden süddeutschen Königreichen Bayern und Württemberg besteht kein Gegenseitigkeitsvertrag mit Preußen, da die Prüfungen in diesen beiden Staaten einen ganz anderen Charakter tragen, wie die Berichte der Herren Geck[1]) und Wieleitner[2]) zeigen, während in den anderen deutschen Staaten große Übereinstimmung mit den preußischen Prüfungsarten besteht. Man vergleiche für Sachsen die Abhandlung von Witting[3]), für Baden den Cramerschen[4]) Bericht und für Hessen die Arbeit von Schnell.[5]) Die Unterschiede bestehen, wie oben (S. 65) erwähnt, besonders in der allgemeinen Prüfung. In Sachsen und Hessen ist außerdem die mündliche Prüfung öffentlich.

10. Statistik der Prüfungen.

Einige statistische Angaben über die Prüfungsergebnisse in Preußen mögen hier noch folgen.

Vollständige statistische Nachrichten liegen erst seit 1839 vor, nachdem die Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen durch einen Er-

---

1) Geck, Der mathematische Unterricht im Königreich Württemberg. Diese Abhandlungen Bd. II. Heft 3. S. 86 ff.

2) Wieleitner, Der mathematische Unterricht in Bayern. Diese Abhandlungen Bd. II. Heft 1. S. 67 ff.

3) Witting, Der mathematische Unterricht in Sachsen. Diese Abhandlungen Bd. II. Heft 2. S. 38 ff.

4) Cramer, Der mathematische Unterricht in Baden. Diese Abhandlungen Bd. II. Heft 4. S. 41 ff.

5) Schnell, Der mathematische Unterricht in Hessen. Diese Abhandlungen Bd. II. Heft 5. S. 47 ff.

laß vom 16. August 1838 zur Einreichung einheitlicher jährlicher Listen aufgefordert worden waren.

Bis zum Jahre 1873 finden sich die betreffenden Zahlen in Wieses Historisch-Statistischen Darstellungen des höheren Schulwesens Preußens[1]). Dann wurden die Zahlen jährlich im Zentralblatt der Preußischen Unterrichtsverwaltung veröffentlicht. Bis 1876 begann das der Statistik zu Grunde liegende Geschäftsjahr am 1. Januar; seit 1877 aber beginnt es mit dem 1. April, so daß also das Jahr 1876 vom 1. Januar 1876 bis 31. März 1877 dauert. Seit 1881 erscheinen die Tabellen in einem besonderen Beihefte des Zentralblattes.

Auf Grund dieses Materiales ist die nebenstehende Kurve gezeichnet.

Da für die Zeit der Gültigkeit der Prüfungsordnung von 1887 in der amtlichen Statistik leider die Mathematiker nicht von den Naturwissenschaftlern getrennt sind, diese Trennung auch für die Zeit von 1839 bis 1868 nicht durchgeführt ist, so wurden bei der Konstruktion der Kurve für die ganze Zeit Mathematiker und Naturwissenschaftler zusammengefaßt.

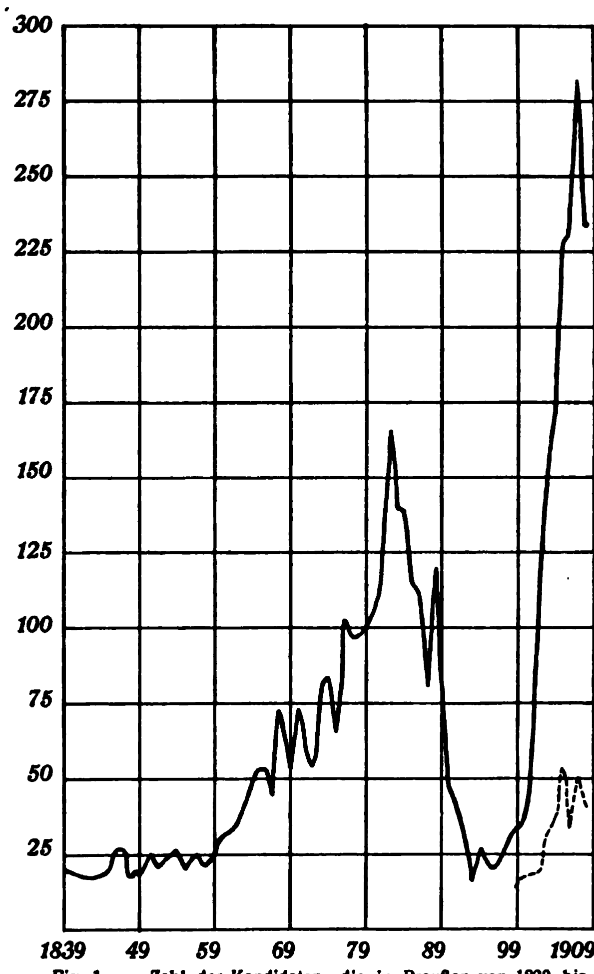


Fig. 1. — Zahl der Kandidaten, die in Preußen von 1839 bis 1908 das Staatsexamen mit Mathematik und Naturwissenschaften als Hauptfach bestanden haben.
-- Zahl der Kandidaten mit Chemie oder Biologie als Hauptfach.

Für die Zeit der Gültigkeit der Prüfungsordnung von 1898 gibt die gestrichelte Kurve die Naturwissenschaftler an, d. h. die Kandidaten, die Chemie oder Biologie als Hauptfach haben.

1) L. Wiese, Das Höhere Schulwesen in Preußen. Hist.-statistische Darstellung. Bd. I 1864. Bd. II 1869. Bd. III 1873. Berlin. Wiegand u. Grieben.

Die angewandte Mathematik wird in der amtlichen Statistik nicht erwähnt. R. Schimmack[1]) hat aus dem „Kunze-Kalender für das höhere Schulwesen Preußens und einiger anderer deutschen Staaten", der den Stand vom 1. Mai jedes Jahres angibt, die „angewandte Mathematik" unter den Direktoren, Oberlehrern, anstellungsfähigen Kandidaten für die Jahre 1907–1910 ausgezählt und stellt sein Ergebnis in folgender Übersicht dar:

Stand vom 1. Mai des Jahres	1907	1908	1909	1910
Gesamtzahl der „angewandten Mathematiker" Preußens	107	138	144	178
Darunter sind ohne volle Befähigung für reine Mathematik	19	23	29	32
Das sind von der Gesamtzahl	17,8 %	16,7 %	20,1 %	18,0 %
Unter diesen wiederum haben angewandte Mathematik als einzige volle wissenschaftliche Befähigung....	11	9	11	11
Das sind von der Gesamtzahl	10,3 %	6,5 %	7,6 %	6,2 %

Der Kalender gibt übrigens nicht die Stufen der Lehrbefähigung an; daß man trotzdem herausfinden kann, ob die „angewandte Mathematik" mit keinem anderen Fache für die erste Stufe erworben wurde, ist bei genauerer Prüfung des Kalenders bald zu merken.

Bei der Hauptkurve in Figur 1 fällt das mit den sechziger Jahren einsetzende langsame Ansteigen auf, das von geringen Schwankungen unterbrochen wird, die eine Folge der kriegerischen Ereignisse von 1866 und 1870 sind. Mitte der achtziger Jahre ist ein Maximum erreicht; es kamen die traurigen Jahre, da man „mit den Köpfen der mathematischen Kandidaten des höheren Lehramts die Landstraße von Ostfriesland bis Hannover pflastern konnte", wie ein verstorbener Provinzialschulrat sich ausgedrückt hat. Die Zahl der Studenten der Mathematik läßt daher nach. Nur im ersten Jahre der Gültigkeit der Prüfungsordnung von 1887 schwillt die Zahl der Prüfungen noch einmal an; dann sinkt sie aber, bis sie Mitte der neunziger Jahre den Tiefstand der vierziger Jahre erreicht. Es kommen die günstigen Jahre für die Mathematiker; infolgedessen nimmt aber auch bald die Zahl der Studenten bedeutend zu; die Anzahl abgelegter Prüfungen erklimmt jetzt wieder eine bedenkliche Höhe.

Diese Schwankungen kann man ähnlich auch bei den anderen Fächern des höheren Lehramts beobachten. Sie haben im Zusammenhang mit dem heißen notwendigen Kampfe, den der Oberlehrerstand um seine äußere Berufsehre und Stellung in dem ganzen Beamtenkörper des Staates führen mußte, eine stattliche Reihe statistischer Talente in diesem Stande hervorkommen lassen. Ein wichtiges stati-

1) R. Schimmack, Die Entwicklung der math. Unterrichtsreform in Deutschland. Diese Abhandlungen Bd. III, Heft 1, S. 62.

stisches Problem ist da besonders von dem Görlitzer Gymnasialprofessor Richard Bünger[1]) formuliert worden, nämlich das Problem die Zukunft zu extrapolieren, d. h. zu Ostern eines jeden Jahres, wenn die Abiturienten, die „Muli", die Schule verlassen, annähernd vorauszusagen, wie nach ungefähr sieben bis neun Jahren, d. h. nach Beendigung der Vorbereitungszeit, in den einzelnen höheren Berufsarten die Aussichten für Anstellung sich gestalten, um so rechtzeitig vor einem Berufe zu warnen, dem Überfüllung droht, andererseits aber auch rechtzeitig einen voraussichtlichen Mangel an Anwärtern anzukündigen. Daß die Lösung dieses Problems nicht unmöglich ist, haben die Berechnungen Büngers und anderer für das Oberlehrerfach gezeigt.

Besonders für die Mathematiker verfolgt die von der Mathematikervereinigung 1902 auf Stäckels Antrag[2]) eingesetzte Statistische Kommission die Frage. Im Jahre 1905 hatte der Vorstand der Deutschen Mathematikervereinigung auf Veranlassung der Statistischen Kommission den preußischen Kultusminister in einer Eingabe gebeten, dem Vorstande jedesmal das nötige Material zu geben, besonders auch die Anzahl der Kandidaten mitzuteilen, die eine Lehrbefähigung in angewandter Mathematik erworben haben. Der Minister hat darauf zugesagt, daß ein Vertreter der Deutschen Mathematikervereinigung vertraulich Einsicht nehmen könne in die bis zum 1. Mai eines jeden Jahres von den Wissenschaftlichen Prüfungskommissionen einzuliefernden Übersichten; das Material könne aber nicht herausgegeben werden.

Seit dieser Zeit veröffentlicht die Deutsche Mathematikervereinigung alljährlich eine „Statistik des Mathematischen Studiums", die A. Schoenflies bearbeitet, der schon in den neunziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts sich mit derartigen statistischen Fragen beschäftigt hat. Von bekannten Mathematikern, die über solche statistische Fragen gearbeitet haben, ist noch F. Lindemann zu nennen. Seine Arbeit ist aber nicht veröffentlicht worden. Sie war, wie er mir schreibt, „nur für das Preußische Kultusministerium bestimmt und hatte nur den Zweck nachzuweisen, daß die Methoden einer aus dem Ministerium hervorgegangenen und den Fakultäten zur Begutachtung vorgelegten Arbeit nicht haltbar seien. Es handelte sich dabei nicht nur um Mathematik, sondern um alle Berufe." Von Nationalökonomen hat besonders Lexis, der schon oben bei Gelegenheit der Junikonferenz 1900 zu erwähnen war, über solche statistische Fragen gearbeitet. Man vergleiche besonders die von Schoenflies im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung erschienene Arbeit aus dem Jahre 1908 (Bd. 17. S. 35), aus der folgende Stelle hier mitgeteilt werde[3]):

Ich möchte daher in erster Linie die schon 1904 ausgesprochene Mahnung wiederholen, daß sich niemand dem Studium der mathematischen Wissenschaften zuwende, den nicht innere Neigung und Befähigung dazu antreiben. Aber auch außerdem ist vor dem übermäßigen Zudrang im Augenblick zu warnen. –

1) R. Bünger, Die Zukunft unserer Abiturienten. Preußische Jahrb. Bd. 139, Heft 3.
2) Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung. Bd. 12. 1903. S. 18.

Dagegen würde ich es kaum für wünschenswert halten, daß die Zahl der Neuimmatrikulierten, die sich zuletzt auf 190 gestellt hat, wesentlich unter diese Ziffer sinke, und noch weniger wünschenswert ist es, daß die für Mathematik besonders Prädestinierten sich Befürchtungen für ihr späteres Fortkommen überlassen.

Leider hat die Warnung wenig Erfolg gehabt, wie die letzte Mitteilung von Schoenflies im Januarheft 1911 der Deutschen Mathematikervereinigung zeigt.

Vor allen Dingen haben sich eine ganze Reihe dem Studium der Mathematik zugewandt, die nicht dazu besonders veranlagt waren, wie der Ausfall der Staatsprüfungen in den letzten Jahren beweist. Die Zahl derer, die die Prüfung nicht bestanden haben, ist sehr groß; das gilt aber nicht allein für die Mathematik. Leider trennt die amtliche Statistik bei den „Durchgefallenen" nicht nach Fächern.

Im ganzen haben in Prozente der abgelegten Prüfungen umgerechnet im Jahre 1908 an den einzelnen Universitäten nicht bestanden:

	%		%
Königsberg	36	Kiel	25
Berlin	41	Göttingen	20
Greifswald	38	Münster	47
Breslau	43	Marburg	36
Halle	34	Bonn	33

Das Ergebnis der Prüfung bei den Mathematikern seit der Gültigkeit der Prüfungsordnung von 1898 erläutern folgende Kurven:

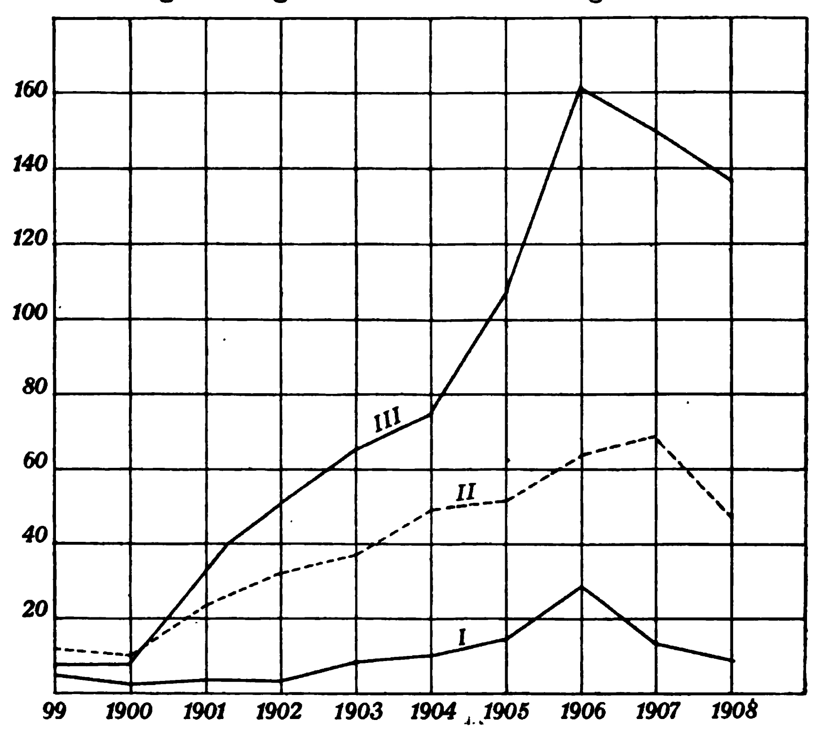


Fig. 2. *I* = mit Auszeichnung bestanden. *II* = gut bestanden. *III* = genügend bestanden.

Für das Jahr 1908 gibt folgende Tabelle die Ergebnisse in der Prüfung der Mathematiker bei den einzelnen Universitäten. Die eingeklammerten Zahlen geben die Naturwissenschaftler an.

	genügend	gut	mit Auszeichnung		genügend	gut	mit Auszeichnung
Königsberg	7 (1)	4 (2)	2 (1)	Kiel	4 (2)	2 (0)	0 (0)
Berlin	28 (12)	6 (4)	5 (3)	Göttingen	18 (6)	14 (9)	2 (0)
Greifswald	9 (2)	0 (0)	0 (0)	Münster	13 (7)	6 (2)	0 (0)
Breslau	3 (2)	2 (1)	0 (0)	Marburg	23 (7)	0 (0)	0 (0)
Halle	16 (7)	5 (3)	1 (0)	Bonn	17 (2)	8 (2)	0 (0)

Zum Vergleich dieses die Übersicht aus dem Minimumjahre 1895, die die Zahl der Kandidaten angibt, die im mathematisch-naturwissenschaftlichen Fach a ein Oberlehrerzeugnis, b ein Lehrerzeugnis, c ein bedingtes Zeugnis erworben haben. Vgl. S. 37 dieser Abhandlung.

	a	b	c		a	b	c
Königsberg	1	–	–	Kiel	2	–	1
Berlin	2	–	6	Göttingen	1	–	–
Greifswald	2	–	–	Münster	–	–	–
Breslau	2	–	–	Marburg	–	–	–
Halle	2	–	–	Bonn	2	2	–

Und schließlich werde aus der Zeit der Gültigkeit der Prüfungsordnung von 1866 eine Sonderübersicht gegeben. Die folgende Tabelle bringt die Anzahl der Kandidaten, die im Jahre 1877 ein Zeugnis ersten (1), zweiten (2) oder dritten (3) Grades mit Mathematik und Physik als Hauptfach erhalten haben.

	1. Grad	2. Grad	3. Grad		1. Grad	2. Grad	3. Grad
Königsberg	0	1	0	Kiel	0	0	1
Berlin	0	6	5	Götttingen	12	4	4
Greifswald	0	0	3	Münster	1	0	3
Breslau	2	2	0	Marburg	4	1	3
Halle	1	8	1	Bonn	3	2	2

Auffallend ist es, daß in den letzten Jahren die Zahl der Doktordissertationen bedeutend gewachsen ist, die als Ersatz einer der beiden schriftlichen Arbeiten nicht angenommen werden. So sind im Jahre 1908 323 Dissertationen angenommen, aber 173 nicht angenommen worden!

In früherer Zeit ist eine derartige Zurückweisung selten gewesen; in Marburg wurden freilich im Jahre 1889 49 Dissertationen nicht angenommen und nur 2 als Ersatz angenommen.

Ob und wieweit die mathematischen Fächer hiervon berührt werden, ist aus der Statistik leider nicht zu ersehen.

11. Die Prüfungsordnungen von Braunschweig und Mecklenburg.

In Braunschweig ist die erste Prüfungsordnung für das höhere Lehramt 1839 erschienen. Anläufe zu einer solchen Prüfung fanden aber schon vierzig Jahre vorher dort statt, während des vierjährigen Bestandes des Braunschweiger „Schuldirektoriums.“ Diese 1786 durch

die lebhaften Bemühungen der Philantropischen Kommission ins Leben getretene Behörde hatte als Hauptzweck eine Trennung der Schulaufsicht von der kirchlichen Behörde herbeizuführen.[1]) Zu ihren Obliegenheiten gehörte nach einem ausführlichen Entwurf Campes auch die „Auswahl und Prüfung derjenigen Subjekte, welche als Schullehrer künftig angestellt oder zu höheren Schulstellen befördert werden sollen".

In Mathematik ist keine Prüfung abgehalten worden. Stech[2]) teilt aus den Akten des Landesarchivs in Wolfenbüttel die Protokolle mit über zwei Prüfungen, die am 14. November 1786 und am 17. April 1787 mit zwei Kandidaten über altsprachliche, geographische, philosophische und bei dem einen auch über theologische Dinge veranstaltet wurden.

Dieses Direktorium ist 1790 offenbar durch den Widerspruch des Konsistoriums, d. h. der Theologen, eingegangen.

So besteht denn ein selbständiger Philologenstand in Braunschweig erst seit dem Gesetz[3]) vom 20. Dezember 1837, die Einrichtung einer Examinations-Kommission zur Prüfung der Kandidaten des höheren Schulamts betreffend.

Diesem Gesetze folgte am 10. Januar 1839 ein vom Staatsministerium herausgegebenes Reglement für die Prüfungen, dessen 18. Paragraph hier besonders in Betracht kommt:

c) Mathematik, Physik und Naturgeschichte.

A. Mathematik.

1. Für den Unterricht in der Mathematik auf der unteren Lehrstufe ist die vollständige und genaue Bekanntschaft mit der Elementar-Mathematik – der Arithmetik, bis einschließlich der Lehre von den Potenzen, den Logarithmen und den arithmetischen und geometrischen Reihen, der Algebra bis einschließlich der Lehre von der Auflösung von den Gleichungen des zweiten, auch des dritten und vierten Grades, der ebenen Geometrie, der Stereometrie, sowie der ebenen und sphärischen Trigonometrie – neben gründlicher Kenntnis und Geläufigkeit in der Behandlung aller Arten von Aufgaben des gemeinen bürgerlichen Rechnens zu verlangen. Der Examinandus muß zugleich die Fähigkeit darlegen, die Grundbegriffe klar und anschaulich zu erörtern, das Wesen der Zahlenbildung, der verschiedenen arithmetischen Operationen und Rechnenmethoden mit dem erforderlichen Grade von Allgemeinheit und doch leicht faßlich zu erläutern, durch zweckmäßig gewählte Beispiele den Unterricht lebendig zu machen und das Nachdenken der Schüler anzuregen. Er muß namentlich auch die Gewandtheit besitzen, indirekte Aufgaben, welche algebraisch durch Gleichungen des ersten Grades aufgelöset zu werden pflegen, auch ohne Hilfe derselben, durch einfache Schlüsse auf mannigfaltige Weise zu lösen und die Schüler zur Auffindung der verschiedenen Rechnungswege hinzuleiten, sowie endlich über eine zweckmäßige Behandlung der geometrischen Formen oder Anschauungslehre klare und begründete Ansichten sich zu eigen gemacht haben.

2. Von dem künftigen Lehrer der Mathematik auf der oberen Lehrstufe ist, außer den ad 1 angegebenen Kenntnissen, auch die Bekanntschaft mit den allgemeinsten und wichtigsten Lehren der höheren Mathematik, vorzugsweise derjenigen

1) Stech, Das Braunschweiger Schuldirektorium. Pädagogisches Magazin Heft 355. Langensalza, Beyer & Sohn. 1909.

2) a. a. O. S. 104 ff.

3) Gesetz u. Verordnungssammlung Nr. 45. Braunschweig d. 26. Dezember 1837.

zu fordern, von welchen die Elementar-Mathematik nur die ersten Grundzüge oder einzelne besondere Fälle enthält. Der künftige Lehrer auf dieser Stufe muß den Zusammenhang dieser Lehren mit denen der Elementar-Mathematik deutlich einsehen, ihr Verhältnis zu denselben richtig zu würdigen wissen und die letzteren klar und einfach in lebendigem und geordnetem Vortrage zu entwickeln imstande sein.

Außerdem hat der Examinandus soviel Kenntnis der mathematischen Geographie und der Astronomie darzulegen, als zum Vortrage der einfacheren bloß mit Hilfe der Elementar-Mathematik verständlich zu machenden Lehren dieser Wissenschaften gehört.

Der Statik und Mechanik muß er hinreichend mächtig sein, um die Grundlehren derselben, soweit diese gewöhnlich in der mechanischen Naturlehre (Physik) abgehandelt werden, wenn auch nur mit Hilfe der Elementar-Mathematik, doch mit derjenigen Bündigkeit und Klarheit entwickeln zu können, welche wesentlich durch tiefer begründete und umfassende Kenntnis des Gegenstandes bedingt wird.

Endlich ist auch, zumal von solchen Kandidaten, welche an einer höheren Bürgerschule angestellt zu werden wünschen, Kenntnis der praktischen Geometrie, sowohl der Einrichtung und des Gebrauchs der wichtigsten Meßinstrumente, als auch der vorzüglichsten Methoden des Feldmessens, nebst einiger Übung im Plan- und Chartenzeichnen und Kenntnis der darstellenden Geometrie, nebst der nötigen Gewandtheit in den Konstruktionen derselben, zu verlangen.

B. Physik.

1. Für den Unterricht in der Naturlehre genügt eine übersichtliche Kenntnis ihres ganzen Gebiets, verbunden mit der klaren Einsicht in das Wesen der wichtigsten, zum Leben in näherer Beziehung stehenden Naturerscheinungen und Gesetze, und die genauere Kenntnis der Einrichtung und des Gebrauchs der einfacheren und gewöhnlicheren physikalischen Werkzeuge. Besonderes Augenmerk ist auf die Fähigkeit des Examinanden zu richten, die zu erläuternde Lehre an bekannte Tatsachen anzuknüpfen, und durch Anwendungen auf alltägliche Erscheinungen und Verrichtungen, sowie auf nützliche Gerätschaften und Maschinen fruchtbar zu machen, dem Verständnis durch leicht entworfene Zeichnungen an der Tafel zu Hilfe zu kommen, überhaupt den Unterricht stets anschaulich und lebendig zu erhalten, und die Schüler zu richtiger Beobachtung und Kombination der Erscheinungen der Außenwelt anzuleiten.

2. Zur Befähigung für den physikalischen Unterricht auf der oberen Lehrstufe ist neben diesen Kenntnissen und Fähigkeiten eine umfassendere und tiefer eindringende Bekanntschaft mit allen Teilen der Naturlehre, auch den neueren Entdeckungen und Hilfsmitteln, sowie mit den wichtigsten Lehren der Chemie und die Fertigkeit, geeignete Lehren mathematisch zu begründen, zu verlangen.

Auf den besonderen Wunsch des Kandidaten ist diese Prüfung auch auf technologische Gegenstände auszudehnen, und soll eine genügende (in dem auszustellenden Zeugnisse ausdrücklich zu erwähnende) Bekanntschaft mit denselben besonders solchen Kandidaten, welche sich um Anstellung an einer höheren Bürgerschule bewerben, zur Empfehlung gereichen.

Man beachte, wie hier vielmehr als in der preußischen Prüfungsordnung von 1831, die angewandte Mathematik betont wird. Die Physik dagegen hat hier ganz den Charakter der „Kreide- und Schwammphysik".

Auch sonst finden sich charakteristische Unterschiede gegenüber Preußen. In der allgemeinen Prüfung werden die Mathematiker und Naturwissenschaftler nicht in Religion geprüft. Die Prüfung hat bei sämtlichen Examinanden Rücksicht zu nehmen:

1. Auf ihre Kenntnisse der Deutschen Sprache, ihre Fertigkeit im mündlichen und schriftlichen Vortrag in derselben und ihre Fertigkeit, erforderlichenfalls in derselben zu unterrichten;

2. auf den Grad ihrer philosophischen Bildung, einschließlich der Bekanntschaft mit der Pädagogik.

Außerdem erstreckt sich die Prüfung auf ein von dem Kandidaten gewähltes Hauptfach, „jedoch ist auch darüber zu erforschen, bis zu welchem Grade er sich auch mit den übrigen Fächern bekannt gemacht habe".

Es gibt vier Hauptfächer:

1. Die beiden alten Sprachen nebst den Hilfswissenschaften, das klassische Altertum und Hebräisch,
2. Geschichte und Geographie,
3. Mathematik, Physik und Naturgeschichte,
4. Neuere Sprachen.

Hinsichtlich der sub 3 genannten Fächer ist es indessen gestattet, bloß entweder Mathematik und Physik oder Mathematik und Naturgeschichte zusammen genommen als **ein** Hanptfach zu betrachten, oder nur diese Fächer mit denen sub 2 so zu verbinden, daß Mathematik und Geographie, oder Mathematik und Geschichte, oder Naturgeschichte und Geographie für **ein** Hauptfach gelten.

Man beachte diese ganz neuzeitlich anmutende Verbindung Naturgeschichte-Geographie!

Bei der Prüfung pro loco, die den gleichen Zweck hatte, wie in Preußen, mußte nach § 37 der Lehrer für Mathematik nachweisen, daß er den Unterricht für Physik in den oberen Klassen und womöglich auch den Unterricht in der Naturgeschichte zu übernehmen imstande sei.

Wie in Preußen gab es eine Prüfung pro ascensione; dagegen ist von einer Prüfung pro rectoratu nicht die Rede.

Die Zahl der schriftlichen Arbeiten ist unbestimmt gelassen; „sie sollen sich, ebenso wie die Auswahl, nach dem Umfang und der Beschaffenheit dessen richten, wozu der Kandidat in seinem Anmeldungsgesuch sich anheischig gemacht hat".

Das Ergebnis der Prüfung wurde wie in Preußen durch „bedingte" oder „unbedingte Facultas" ausgedrückt. Die erteilte Fakultas bezog sich aber vernünftigerweise lediglich auf das Hauptfach. Wenn in Braunschweig ein Kandidat ein so gutes Zeugnis erworben hätte, wie das oben (S. 16) abgedruckte Berliner Zeugnis von 1856, so hätte er damit die „unbedingte Facultas" erworben.

Diese Prüfungsordnung ist in Kraft geblieben, bis sie durch das Reglement vom 9. März 1872 abgelöst wurde.[1])

Dieses „in tunlichst genauem Anschlusse an das königl. preußische Reglement entworfene Reglement" verlangt nach § 25 in Mathematik:

F ü r d e n m a t h e m a t i s c h e n U n t e r r i c h t i n d e n o b e r e n K l a s s e n s i n d n u r d i e K a n d i d a t e n b e f ä h i g t z u e r a c h t e n, d i e s i c h i n d e r P r ü f u n g s o w e i t a l s a u s g e b i l d e t e M a t h e m a t i k e r z e i g e n u n d i n d i e h ö h e r e G e o m e t r i e, d i e h ö h e r e A n a l y s i s u n d a n a l y t i s c h e M e c h a n i k s o t i e f e i n g e d r u n g e n s i n d, d a ß s i e d i e F o r t s c h r i t t e d i e s e r W i s s e n s c h a f t e n z u v e r f o l g e n u n d s i c h a n z u e i g n e n v e r m ö g e n.

---

1) Gesetz- und Verordnungssammlung Nr. 11. Braunschweig, 30. März 1872.

In der Anforderung für die oberen Klassen haben wir also gegenüber der preußischen Ordnung von 1866 einen wesentlichen Unterschied: Preußen verlangt (S. 23) ausgebildete Mathematiker, die mit Erfolg eigne Untersuchungen anstellen können, d. h. wörtlich genommen produktive Mathematiker; Braunschweig forderte ausgebildete rezeptive Mathematiker.

Daß die Braunschweiger Prüfungsordnung hierin sachgemäßer war, als die sechs Jahre ältere preußische, die als Vorbild gedient hat, ist zweifellos.

In Physik und in Mathematik für untere und mittlere Klassen besteht wörtliche Übereinstimmung mit Preußen, ebenso auch darin, daß die Mathematiker und Physiker im allgemeinen naturwissenschaftliche Bildung besitzen müssen (vgl. S. 24).

Ein Zeugnis aus der Zeit der Gültigkeit dieser Prüfungsordnung von 1872 soll auch hier zur Erläuterung dienen:

Prüfungszeugnis.

Herr N. N., geboren zu ... am ... 1855, lutherischer Konfession, Sohn des verstorbenen Herrn N. zu ..., hat sich an unterzeichnete Kommission mit einem Gesuche, vom 14. Oktober 1878, gewandt, ihn zu einer Prüfung pro facultate docendi für die Mathematik und Physik in allen Klassen und für die Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften in den mittleren Klassen der Gymnasien und Realschulen zuzulassen. Den beigelegten Zeugnissen zufolge hat derselbe auf dem Gymnasium zu B. die Maturitätsprüfung Ostern 1875 bestanden, und in den sieben Semestern von Ostern 1875 bis Michaelis 1878 die Universitäten Heidelberg und Berlin besucht.

Es wurden demselben folgende Aufgaben zu schriftlicher Bearbeitung erteilt:

1. Es soll die Bewegung eines Systems von materiellen Punkten im Raum untersucht werden, von denen je zwei eine Anziehungskraft aufeinander ausüben, deren Intensität das Produkt aus ihren Massen und aus ihrer augenblicklichen Entfernung ist. Diese Punkte sind aber nicht frei beweglich, sondern jedem derselben ist eine besondere gerade Linie angewiesen, auf welcher er unter allen Umständen zu verbleiben gezwungen ist.

Es sollen die Koordinaten dieser Punkte (sowie diejenigen ihres Schwerpunkts) als Funktionen der Zeit dargestellt werden.

2. Seit etwa 30 Jahren hat sich eine neue Anschauung über das Wesen der Wärme Bahn gebrochen, welche in der mechanischen Wärmetheorie ihren Ausdruck findet. Es sollen die Gründe, welche zur Aufgabe der älteren Anschauung geführt haben, erörtert und zugleich die Grundlagen der neuen Theorie kritisch untersucht werden.

3. Ist die Lehre von den Kegelschnitten unter die Unterrichtsgegenstände der Gymnasien und Realschulen aufzunehmen, und wie müßte sie dann behandelt werden?

Die von den Examinanden gelieferten Abhandlungen wurden folgendermaßen beurteilt:

1. Die mathematische Aufgabe: Bei der vom Verfasser getroffenen Wahl der Ortsbestimmung ist zwar ein besonders günstiger Umstand, aus welchem sich eine viel einfachere Lösung ergeben haben würde, demselben ganz verborgen geblieben, allein die Schwierigkeiten, welche er demzufolge zu überwinden hat, geben ihm Gelegenheit, in der mit großer Sorgfalt und ansprechender Klarheit abgefaßten Arbeit seine vorzügliche mathematische Durchbildung und auch seine Begabung für selbstständige Forschung deutlich zu offenbaren. Es verdient daher diese Leistung, trotz des erwähnten Mangels, als eine „sehr gute“ bezeichnet zu werden.

2. Der Verfasser behandelt das ihm gestellte Thema mit vielem Fleiße und Sachkenntnis. Er trifft unter dem vorhandenen großen Materiale eine geschickte Auswahl, durch welche dem Lehrer ein klarer Einblick in die früheren und jetzigen Ansichten über das Wesen der Wärme gegeben wird. Die Darstellung zeichnet sich durch ihr wissenschaftliches Gepräge aus und läßt ein selbständiges Urteil durchblicken. Demnach kann auch diese Leistung als eine „sehr gute" angesehen werden.

3. Die pädagogische Aufgabe: Wenn auch der Verfasser die Schwierigkeiten, welche der von ihm vorgeschlagenen Methode, die Lehre von den Kegelschnitten in den genannten Lehranstalten zu behandeln, entgegenstehen, etwas unterschätzt, so sind doch die Ansichten desselben über den Zweck der höheren Schulen und die demselben anzupassende Wahl und Methode der einzelnen Lehrgegenstände sehr wohl überlegt und zeugen von einem selbständigen Urteile. Der zur Durchführung der Aufgabe notwendige Stoff ist meistenteils vollständig herangezogen, gut geordnet und in fast durchgängig streng logischem Gedankengange vorgetragen. Es kann daher diese Leistung mit dem Prädikate „gut" bezeichnet werden.

Auf Grund dieser Resultate der schriftlichen Prüfungsaufgaben wurde Examinandus auf den 27. Mai d. J. zur mündlichen Prüfung zitiert. Da derselbe ebensowohl durch ein sehr günstiges Abiturientenzeugnis, wie durch seine schriftlichen Prüfungsarbeiten eine ausreichende allgemeine Bildung nachgewiesen hatte, so wurde die mündliche Prüfung auf die Mathematik, Physik, Chemie und die beschreibenden Naturwissenschaften beschränkt.

Bei der Prüfung in der Mathematik wurden einzelne Punkte sowohl aus den niederen wie den höheren Gebieten der Wissenschaft eingehender besprochen. Die Kenntnisse des Examinanden erweisen sich so umfassend und die Auffassung so sicher und klar, daß diese Leistung desselben als „sehr gut" anerkannt werden konnte.

Ebenso zeigte Examinandus in der Physik bei der gründlichen Erörterung einzelner Fragen, die sich auf Optik, Mechanik, Akustik und Elektrizität bezogen, sich so gut auf allen diesen Gebieten orientiert, daß auch diese Leistung als eine „sehr gute" bezeichnet wurde.

In den beschreibenden Naturwissenschaften, bei welchen die Prüfung von der Diagnose vorgelegter Naturkörper ausging, wie in der Chemie bewies Examinandus durch die von ihm gezeigten gründlichen Kenntnisse und die klare Auffassung der wissenschaftlichen Fragen, daß er nicht allein für den Unterricht in den mittleren Klassen in diesen Fächern vollkommen jetzt befähigt ist, sondern auch auf Grundlage derselben sich mit Leichtigkeit die für den Unterricht in den höheren Klassen erforderliche wissenschaftliche Bildung wird erwerben können.

Examinandus hatte außerdem als Probelektion in der Untersekunda des Gymnasiums die Bedeutung und Auflösung eines Systems von Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten zu behandeln. Er löste diese Aufgabe, indem er den Stoff in einer angemessenen und anregenden Weise darstellte, so daß auch diese Leistung als eine durchaus befriedigende gelten konnte.

Auf Grund der Ergebnisse dieser Leistungen wird somit dem Examinandus Herrn N. N. von unterzeichneter Kommission die facultas docendi für die Mathematik und Physik in allen Klassen und für die Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften in den mittleren Klassen der Gymnasien und Realschulen zuerkannt und ihm somit ein Zeugnis ersten Grades nach Maßgabe des § 17. 1. B. des Prüfungsreglements erteilt.

Braunschweig, den 31. Mai 1879.

Herzogliche Kommission zur Prüfung der Kandidaten des höheren Schulamts.

gez. B. Hille. Gravenhorst. Sy. R. Dedekind. v. Heinemann. K. Koch.

Seitdem hat Braunschweig die Änderungen, die in Preußen in der Oberlehrerprüfung getroffen wurden, stets mitgemacht, zuletzt durch die Prüfungsordnung vom 9. Dezember 1898.

Mathematische Mitglieder der Braunschweiger Prüfungskommission sind zurzeit: Der Professor an der technischen Hochschule R. Fricke und der Direktor der Oberrealschule und außerordentliche Professor an der technischen Hochschule Wernicke.

Im **Großherzogtum Mecklenburg-Schwerin** ist erst 1870 eine Prüfungsordnung für die Kandidaten des höheren Schulamts eingeführt worden durch die Großherzogliche Verordnung vom 28. Mai 1870[1], aus der folgender Paragraph hier in Betracht kommt:

§ 6. A. Bedingungen der Facultas für die unteren und mittleren Klassen (für Untersekunda).

e) Mathematik. Sicherheit in der Elementar-Mathematik, einschließlich der sphärischen Trigonometrie und der analytischen Geometrie in der Ebene, besonders ihre Anwendung auf die gerade Linie und die Kegelschnitte.

f) Physik, Chemie und beschreibende Naturwissenschaften. Übersicht über alle Teile der Physik, Bekanntschaft mit den wichtigsten physikalischen Erscheinungen und Gesetzen, sowie mit den gewöhnlichen Apparaten. Bekanntschaft mit den Grundlehren der Chemie und besonders derjenigen Einzelheiten, die für das Verständnis der Physik von Wichtigkeit sind. Bekanntschaft mit den vorzüglichsten Naturprodukten, soweit möglich auf eigene Anschauung gegründet, den charakteristischen Merkmalen und den hauptsächlichsten naturhistorischen Systemen. Einige Übung im Bestimmen besonders der Pflanzen.

B. Für die oberen Klassen.

e) Mathematik. Bekanntschaft mit der höheren Mathematik und der analytischen Mechanik und Fähigkeit, diese Kenntnisse zur Anstellung selbständiger Untersuchungen zu verwenden.

f) Physik, Chemie, beschreibende Naturwissenschaften. Kenntnis der physikalischen Theorien und ihrer wissenschaftlichen Begründung. Elemente der Astronomie. Bekanntschaft mit der wissenschaftlichen Behandlung und dem gegenwärtigen Standpunkte der Chemie, Übung in der qualitativen, auch einige Übung in der quantitativen Analyse. Chemische Technologie.

In Botanik und Zoologie, Bekanntschaft mit der Physiologie, den gebräuchlichsten und natürlichen Systemen, der sog. Tier- und Pflanzengeographie. In der Mineralogie ebenfalls Kenntnis der Systematik, Bekanntschaft mit der Krystallographie, der chemischen Zusammensetzung und dem physikalischen Verhalten einiger vorzüglich wichtiger Mineralien, Bekanntschaft mit den Hauptpunkten der Geologie.

Chemie und Mineralogie sind auf dieser Stufe nie voneinander zu trennen.

Während also die Anforderung in Mathematik für die mittleren Klassen sehr gering ist und kaum soviel verlangt wird, wie jetzt von einem Realgymnasialabiturienten, begegnet uns auch hier bei den für die oberen Klassen gestellten Ansprüchen das Verlangen, daß der Kandidat selbständig Untersuchungen anstellen kann. Gegenüber Braunschweig und Preußen bleiben aber die Anforderungen, die man in Rostock auf Grund dieser Prüfungsordnung von 1870 an die Mathematiker stellen mußte, erheblich zurück. Hervorzuheben ist noch, daß bei der Prüfung der allgemeinen Bildung Religion nicht als Prüfungsfach genannt wird.

1) Regierungsblatt für das Großherzogtum Mecklenburg-Schwerin vom 2. Junius 1870. Man beachte, daß in Mecklenburg anders als in Preußen und Braunschweig, das erste Prüfungsreglement mit den einzelnen Bestimmungen vom Landesherrn unterzeichnet ist. (Vgl. oben S. 9.)

Durch die Verordnungen vom 26. „Junius“ 1888 und vom 15. August 1899[1]) ist eine ziemlich genaue Übereinstimmung mit den entsprechenden preußischen Prüfungsordnungen herbeigeführt worden. Nur hat die mecklenburgische Ordnung von 1888 nicht, wie die preußische Ordnung von 1887, die Bezeichnung „Oberlehrerzeugnis“ und „Lehrerzeugnis“, sondern Zeugnis „ersten“ oder „zweiten Grades“, das außerdem auch noch „bedingt“ sein konnte. Wichtig ist aber, daß die Prüfungsordnung von 1899 keine Lehrbefähigung in „angewandter Mathematik“ anführt. Daß aber trotzdem für angewandte Mathematik in Rostock Interesse vorhanden ist, beweist die Teilnahme des dortigen einzigen Professors der Mathematik, O. Staude, an den oben genannten Göttinger Verhandlungen von 1907. Dieser ist seit 1888 allein Examinator für Mathematik in Rostock.

12. Die praktische Ausbildung der mathematischen Kandidaten.

Schon vor dem Kgl. Edikte von 1810, durch das eine Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen eingeführt wurde, gab es Einrichtungen, die dazu dienten, Lehrer für die gelehrten Schulen auszubilden.

Hier ist besonders das am 9. Oktober 1787 von F. Gedike, dem Direktor des Friedrich-Werderschen Gymnasiums in Berlin, im Auftrage des damaligen Oberschulkollegiums gegründete pädagogische Seminar zu nennen, das den Namen einer „Pépinière von Lehrern für gelehrte Schulen“ führte[2]). In der Instruktion, die es 1807 erhielt, heißt es in § 21:

Die Mitglieder vereinigen sich monatlich einmal unter Leitung des Direktors zu einer philologischen Sozietät.

Eine derartige Bestimmung erscheint charakteristisch für die älteren pädagogischen Seminare zur Ausbildung von Lehrern für höhere Schulen. Es sind die alten Sprachen, die in jenen Seminaren pädagogisch verarbeitet werden. Die Mitglieder z. B. des 1804 in Stettin gegründeten „Seminarium“ mußten lateinische Ausarbeitungen einliefern.

Eine Ausnahme macht nur das von Herbart in Königsberg 1810 errichtete Didaktische Institut, das bis 1833 bestanden hat. Die Mathematik spielte darin eine große Rolle. Ursprünglich vier, später acht Studenten unterrichteten als Seminaristen einige Knaben, bis höchstens 15, die als Zöglinge des Instituts im Alter von acht bis zehn Jahren aufgenommen, einen Lehrgang durchmachen sollten, der die Reife für Gymnasialprima als Ziel hatte, dieses Ziel aber selten erreichte; in zwei Fällen wurde freilich auch die Reife für die Uni-

1) Regierungsblatt für das Großherzogtum Mecklenburg-Schwerin. 14. Julius 1888 u. 28. August 1899.

2) Wiese-Kübler, Das höhere Schulwesen in Preußen. 1864. S. 533.

versität erreicht. Den mathematischen Unterricht, der charakteristischerweise neben Differential- und Integralrechnung die Kegelschnitte, die Elemente der Astronomie und einige Probleme aus der Statik und höheren Mechanik brachte, erteilte Herbart meist selbst; im übrigen begnügte er sich mit gelegentlichen Winken an die Seminaristen, mit denen er außerdem in der Regel wöchentliche Konferenzen abhielt.[1])

Als durch den Weggang Herbarts nach Göttingen im Jahre 1833 das pädagogische Seminar aufgelöst wurde, gab die Frage nach der Verwendung der dadurch frei gewordenen Mittel den äußeren Anstoß zur Gründung des Königsberger mathematisch-physikalischen Seminars, das freilich zunächst doch noch ohne Geldmittel blieb.[2])

Für die praktische Ausbildung der Naturwissenschaftler wurde zuerst in Bonn 1825 an der Universität ein naturwissenschaftliches Seminar gegründet, dessen Hauptzweck nach dem Reglement vom 3. Mai 1825 die Bildung von Lehrern für die Naturwissenschaften an höheren Unterrichtsanstalten war. Auf Grund einer Ministerialverfügung vom 18. März 1830 waren die Mitglieder dieses Seminars von einer besonderen naturwissenschaftlichen Lehramtsprüfung befreit. Eine weitere Aufgabe dieses Seminars war erst die allgemeine Förderung der naturwissenschaftlichen Studien. Daß aber diese zweite Aufgabe auch hier bald an die erste Stelle trat, erhellt aus dem erneuerten Reglement vom 29. August 1845, wonach den „ordentlichen Mitgliedern des Seminars auch Gelegenheit gegeben werden soll, sich im Unterrichten zu üben“. Es ist das ganz typisch für die Entwicklung der Seminare der philosophischen Fakultäten, wie für die mathematischen in Band III dieser Abhandlungen gezeigt werden soll. Dieses Zurücktreten des ursprünglichen Zweckes „der Heranbildung tüchtiger Gymnasiallehrer“, wie es in so vielen alten Satzungen heißt, wurde auch nicht durch eine Trennung in zwei Teile aufgehalten, die man z. B. beim philologischen Seminare in Göttingen vor Jahrzehnten findet. Eine Abteilung dieses Seminars war die pädagogische, der u. a. auch Bernhard Riemann als Student angehört hat. Als Mitglied dieses Seminars hat er im November 1850 einen Aufsatz verfaßt: „Über Umfang, Anordnung und Methode des naturwissenschaftlichen Unterrichts auf Gymnasien“.[3])

In Norddeutschland sah man in den Universitätskreisen wie bei den Männern der Praxis eben doch bald ein, daß eine wirklich praktische Ausbildung für den Klassenunterricht nur an einer höheren Schule selbst möglich ist. Das ist also ein bestimmter Gegensatz gegen Leipzig, wo seit 1894 für die Studenten der Mathematik ein praktisch-pädago-

1) Wiese-Kübler, Das höhere Schulwesen in Preußen. 1864. S. 532.

2) P. Volkmann, Franz Neumann. Ein Beitrag zur Geschichte deutscher Naturwissenschaft. Leipzig, B. G. Teubner. 1896. S. 49.

3) Vgl. die von Dedekind verfaßte Biographie Riemanns in seinen von H. Weber herausgegebenen „Gesammelten Mathem. Werken“. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 1892. S. 545.

gisches Seminar eingerichtet ist.[1]) Als z. B. Herbarts Nachfolger, der Privatdozent Runge in Königsberg, um Bewilligung von Mitteln zur Errichtung einer gleichen Anstalt, wie es die Herbartsche gewesen war, einkam, wurde sein Gesuch von der Fakultät und vom Senat auf Grund eines Gutachtens des Philosophen Rosenkranz abgelehnt. „Derartige praktische pädagogische Bestrebungen gehörten nicht auf die Universität und seien nur geeignet die Studierenden vom rechten Studium abzuziehen."[2]) Auch erkannte man, daß man die praktische Befähigung eines Kandidaten nicht aus einzelnen Probelektionen bei Gelegenheit der Prüfung erkennen könne. Erwägungen dieser Art veranlaßten die Einführung des Probejahrs durch die Verfügung vom 24. September 1826, wonach sämtliche geprüfte Kandidaten fortan wenigstens ein Jahr lang bei einer höheren Schule sich praktisch im Unterrichten üben und hierin ihre Fähigkeit ausweisen sollten, bevor sie sich zu einer Anstellung im gelehrten Schulfach melden durften.

Durch einen vom Minister v. Eichhorn am 3. April 1842 herausgegebenen Erlaß wurden über das Probejahr Bestimmungen getroffen, die theoretisch sehr gut waren, in der Praxis aber meistens wohl nicht zur Ausführung gekommen sind, zumal der Anfang der fünfziger Jahre wiederkehrende Mangel an geprüften Kandidaten ähnlich wie in den ersten Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts und auch den ersten Jahren dieses Jahrhunderts dazu nötigte, Kandidaten sogleich voll zu beschäftigen, ohne gehörige Rücksicht auf ihre Ausbildung.

Die offen erkennbare Tatsache, daß das Probejahr nicht den gewünschten Erfolg hatte, brachte Wiese, der als Nachfolger von Johannes Schulze im Ministerium, ähnlich seinem Vorgänger, auf Jahrzehnte dem höheren Schulwesen Preußens seinen Stempel aufgedrückt hat, auf einen Gedanken, der sich für die praktische Ausbildung der Mathematiker und die Gestaltung des mathematischen Unterrichtes in Preußen als sehr bedeutungsvoll erwies.

Als er am 14. Februar 1854 mit dem damaligen Kultusminister v. Raumer zusammen das Friedrich-Wilhelm-Gymnasium in Berlin besuchte, wurden beide Herren auf die eigentümliche Unterrichtsmethode Schellbachs aufmerksam und vom lebhaften Interesse dafür erfüllt.[3])

Wiese sprach es sofort aus, daß es sehr wünschenswert wäre, wenn angehende Mathematiker und Physiker Gelegenheit hätten, einem solchen Unterricht beizuwohnen. Schellbach selbst begrüßte diesen

1) Witting, Der math. Unterricht im Königreich Sachsen und die Ausbildung der Lehramtskandidaten. Diese Abhandlungen Bd. II, Heft 2, S. 46.

2) Prutz, Die Kgl. Alberts-Universität zu Königsberg im 19. Jahrhundert. Königsberg 1894. S. 15.

3) Felix Müller, Chronik des von Schellbach geleiteten mathematisch-pädagogischen Seminars. Berlin 1880. Vgl. auch F. Müller, Karl Schellbach. Abhandlungen zur Geschichte d. math. Wissenschaften. Bd. XX. 1905. Darin ist der wohldurchdachte Entwurf Schellbachs zur Gründung eines mathematischen Instituts abgedruckt.

Gedanken sehr freudig, und so wurde Ostern 1855 am Friedrich-Wilhelm-Gymnasium ein „Institut zur Ausbildung der Lehrer der Mathematik und Physik für Gymnasien und Realschulen" eingerichtet, das Schellbachsche mathematisch-pädagogische Seminar, dessen erstes Mitglied Alfred Clebsch wurde, und dem in der Folgezeit Mathematiker als Kandidaten des höheren Schulamts angehört haben wie Carl Neumann, Lazarus Fuchs, Leo Königsberger, Hermann Amandus Schwarz, Georg Cantor, Eugen Netto, Arthur Schönflies, die alle nach kürzerer oder längerer praktischer Schultätigkeit an eine Universität berufen wurden. Von den Schulmännern, die aus dem Schellbachschen Seminar hervorgegangen sind, seien Ohrtmann und Felix Müller genannt, die Begründer des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik, Mehler, der Ehrendoktor der Breslauer Philosophischen Fakultät und Verfasser des bekannten Leitfadens für den Mathematischen Unterricht, des Buches, das unmittelbar ein Ergebnis des Schellbachschen Seminars ist, ebenso, wie die von Bode und Fischer herausgegebenen Schellbachschen „Mathematischen Lehrstunden". Durch ausgezeichneten Lehrerfolg wurden in weiteren Kreisen die Schellbachschen Kandidaten Adolf Quapp, später Direktor in Leer, und Adolf Putzler[1]), Oberlehrer in Görlitz, bekannt. Auch der leider früh verstorbene Kretschmer sei erwähnt, der in der Provinz Posen im Sinne der praktischen Mathematik den heutigen Reformgedanken vorgearbeitet hat.[2]) Von den jetzt noch im Amt befindlichen Schulmännern, die dem Seminar angehört haben, seien Friedrich Poske und der eine Herausgeber des Kunzekalenders Toeplitz genannt.

Die Ausbildung der Kandidaten erfolgte nach den Grundsätzen des Ministerialerlasses vom 8. Januar 1855, der die neue Einrichtung eingeleitet hatte:

„Die Wahrnehmung, daß der Zirkularverfügung vom 24. September 1826, durch welche ein Probejahr der Kandidaten des höheren Schulamts angeordnet ist, in vielen Fällen nur sehr unvollkommen entsprochen wird, indem die Probekandidaten meist zu wenig Gelegenheit haben, sich das Beispiel und den Rat der älteren und erfahrenen Lehrer zu Nutze zu machen, hat auf den Gedanken geführt, zunächst versuchsweise eine Einrichtung zu treffen, bei welcher die der erwähnten Zirkularverfügung zu grunde liegende Intention sich sicherer verwirklichen zu lassen scheint. Der Plan ist, unter Beteiligung und Kontrolle der Provinzialkollegien einzelnen durch ihre didaktische und pädagogische Wirksamkeit besonders bewährten Direktoren oder Lehrern an Gymnasien und Realschulen, Schulamtskandidaten, deren Zahl in jedem einzelnen Falle drei nicht übersteigen dürfte, und die bei der Prüfung pro facultate docendi eine genügende Befähigung gezeigt haben, in der Art zuzuweisen, daß sie zuerst mehrere Wochen dem Unterricht der betreffenden Lehrer hospitierend beiwohnen, um dadurch die Anschauung einer zweckmäßigen Methode und geordneten Disziplin zu gewinnen. Später würden sie selber im Beisein der Lehrer Versuche im Unterrichten in verschiedenen Klassen zu machen haben, außer der Klassen-

1) Vgl. Lorey, Zum Gedächtnis an Professor Dr. Putzler. Görlitz. H. Tzschaschel. 1906.

2) Vgl. Lietzmann, Stoff und Methode im Math. Unterricht. Diese Abhandlungen Bd. I, Heft 1, S. 27, 50, 96 u. 101.

zeit aber hätte der Lehrer resp. Direktor mehrmals in der Woche Gelegenheit zu nehmen, durch freie oder an die Lehrstunden anknüpfende Besprechungen über methodische und andere praktische Gegenstände die Kandidaten zu üben und anzuleiten."

Diese „versuchsweise" angeordnete Einrichtung, die auch später für die alten und neueren Sprachen in Berlin getroffen wurde, hat für die Mathematiker bis zu Schellbachs Eintritt in den Ruhestand segensreich gewirkt, d. h. bis zum Jahre 1889.

Aber freilich, die Zahl der mathematischen Kandidaten, die das Glück hatten, als „Atome"[1]) aufgenommen zu werden, war klein gegenüber der großen Anzahl mathematischer Kandidaten in Preußen. Die weitaus meisten blieben auf das gewöhnliche Probejahr angewiesen, dessen Wirkung man durch eine Verfügung vom 30. März 1867 zu verbessern suchte. In die wenigen Königlichen pädagogischen Seminare, die für Kandidaten mit gut bestandenem Examen nach und nach am Sitz der Provinzialschulkollegien eingerichtet waren, sind kaum Mathematiker eingetreten, zumal die Leitung dieser Seminare bis auf ganz geringe Ausnahme altphilologischen Provinzialschulräten zustand.

Die Klagen über den geringen Erfolg des Probejahres wollten nicht verstummen. Darum versuchte die Unterrichtsverwaltung im Jahre 1883 eine einschneidende Änderung herbeizuführen, deren leitende Gedanken hauptsächlich von Schrader stammen, dem späteren Kurator der Universität Halle, der bis dahin noch Provinzialschulrat in Königsberg war: Eine zweite und zwar praktische Prüfung der Kandidaten des höheren Lehramts[2]). Die für diese neue Prüfung in den Staatshaushaltsentwurf eingestellte Summe in der Höhe von 10832 Mk. wurde aber im Landtage nicht bewilligt, trotz der ausführlichen auch heute noch beachtenswerten Denkschrift, die die Regierung über diese geplante Maßregel veröffentlicht hatte[3]); trotzdem auch der Regierungskommissar, der schon S. 36 erwähnte Nachfolger Wieses, der bekannte altsprachliche Gelehrte Bonitz, daran erinnerte, daß im ehemaligen Kurfürstentum Hessen eine derartige Prüfung bestanden habe, und daß „man dort die Überzeugung vertreten höre, daß die Tüchtigkeit des Lehrstandes, dessen das Großherzogtum Hessen in hohem Maße sich zu erfreuen hat, gar sehr der zweiten Prüfung zu verdanken ist."[4])

In der ausführlichen Debatte wurde auf die Einrichtungen hinge-

---

1) Atome hießen im Schülermund die Schellbachschen Kandidaten.

2) Vgl. Schrader, Verfassung der höheren Schulen. 2. Auflage. Leipzig, Hempel. 1879. S. 143.

3) Anlage zu den stenographischen Berichten über die Verhandlungen des Abgeordnetenhauses. 1882/83. Erster Band. S. 132 ff.

4) Verhandlungen des Preußischen Abgeordnetenhauses. 24. Februar 1883. Wie mir Herr Thaer schreibt, hat übrigens Bonitz damals behauptet, im Großherzogtum Hessen bestände eine zweite Prüfung. „Ob Bonitz nachträglich das Stenogramm korrigiert hat, weiß ich nicht, wohl aber, daß dies starke Versehen mit dazu beigetragen hat, die ganze Vorlage zu diskreditieren. Es lag bei Bonitz tatsächlich eine Verwechslung oder eine ungenügende Information vor."

wiesen, wie sie seit einigen Jahren an den Franckeschen Stiftungen durch Direktor Frick wieder ins Leben gerufen waren im Anschluß an das alte „Seminarium praeceptorum". Und diese Anregungen, die von Halle ausgingen, haben schließlich im Jahre 1890 zu dem geführt, was wir heute in Preußen finden: die zweijährige Probezeit, d. h. das Seminarjahr, dem das eigentliche Probejahr folgt. Die „Anstellungsfähigkeit an höheren Schulen" wird erst nach Ableistung dieser beiden Jahre erworben und durch ein Zeugnis des Provinzialschulkollegiums bescheinigt. Dieses Zeugnis ist aber ganz schematisch; es spricht nur die Tatsache der Anstellungsfähigkeit aus. Während früher die Kandidaten nach abgelegtem Probejahre ein ausführliches Zeugnis über ihre pädagogischen Leistungen von dem Direktor der Schule erhielten, ist es jetzt den Direktoren nicht mehr gestattet dem Kandidaten ein derartiges Zeugnis zu geben; es kommt vielmehr der Bericht, den der Direktor auf Grund eigener Beobachtungen und der Urteile der einzelnen Oberlehrer über die ihnen überwiesenen Kandidaten liefert, in die beim Provinzalschulkollegium aufbewahrten nur der Behörde zugänglichen Personalakten. Es ist das eine natürliche Folge der schärferen Betonung des Beamtencharakters des Oberlehrerstandes, die selbst wieder durch den jahrzehntelangen notwendigen Kampf um die Standesehre und die Stellung in der Beamtenhierarchie verursacht ist. Diese schärfere Betonung des Beamtencharakters zeigt sich äußerlich in der Aufnahme in eine sorgfältig geführte Liste der Kandidaten bei den einzelnen Provinzialschulkollegien und im Ministerium. Nach dem Datum der Staatsprüfung geordnet durch die ganze Monarchie findet man auch die Seminar- und Probekandidaten alljährlich in Kunzes Kalender für das höhere Schulwesen Preußens, der jetzt im 17. Jahrgange vorliegt. Seit 1908 müssen die Kandidaten auch, wenn sie sich zum Antritt des Seminarjahres bei einem Provinzialschulkollegium[1]) melden, außer dem Zeugnis über die bestandene Staatsprüfung ein Gesundheitszeugnis einreichen, ferner einen Ausweis über die Militärverhältnisse und „eine Äußerung über die Vermögenslage und die Aufbringung der für den Unterhalt während der Zeit der praktischen Ausbildung erforderlichen Mittel".

Während aber alle anderen höheren Beamten sofort beim Eintritt in den Vorbereitungsdienst den Staatsbeamteneid ablegen, findet im höheren Schulamte die Vereidigung sonderbarerweise erst nach erlangter „Anstellungsfähigkeit", d. h. also nach Beendigung des Seminar- und Probejahres statt. In der Provinz Westpreußen wurden früher die Kandidaten gleich beim Eintritt vereidigt, was der Finanzminister v. Miquel leider beseitigt hat. Wie man erfährt, dürfte diese in keiner

1) Auch hier besteht die Freizügigkeit wie in der Wahl der Universität; nur bleibt dem Minister vorbehalten, z. B. Kandidaten wegen Überfüllung einer anderen Provinz zu überweisen.

Weise haltbare Ausnahmestellung des Philologenstandes aber bald aufhören, und der Teil der Thesen der Delegiertenkonferenz des Preußischen Philologenvereins bald in Erfüllung gehen:

Die Kandidaten des höheren Schulamts sind beim Antritt des Seminarjahres zu vereidigen.

Die Fortsetzung dieses Leitsatzes heißt:

Es ist wünschenswert, daß die Kandidaten nicht bloß am 1. Oktober und am 1. April ihr Seminarjahr antreten können, sondern auch an Terminen, die dem Tage der abgelegten Staatsprüfung möglichst nahe liegen.

Die Prüfungen finden nämlich nicht, wie z. B. in Bayern, an einem Termine statt, sondern während der ganzen Zeit außerhalb der Universitätsferien, im allgemeinen also von Ende April bis Anfang August und von Ende Oktober bis Anfang März. Ein Kandidat, der also vielleicht am 27. Oktober die mündliche Prüfung besteht, wird bei der jetzigen Ordnung der Dinge fast ein halbes Jahr verlieren, da er erst am 1. April das Seminarjahr antreten kann. Auch darin sind die Philologen gegenüber den anderen höheren Beamten im Nachteil.

Bei den vielen neuen Seminaren, die jetzt infolge des großen Andranges eingerichtet werden müssen, würde es sich leicht ermöglichen lassen Seminarkurse etwa auch am 1. Januar oder 1. Juli zu beginnen. Und schließlich sei hier auch noch auf eine Frage hingewiesen, die für Fernstehende vielleicht höchst gleichgültig erscheint: Die Titulatur oder Amtsbezeichnung der Kandidaten. Alle anderen höheren Beamten führen auch im Vorbereitungsdienst eine in doppelter Weise charakteristische Amtsbezeichnung, die den Rang angibt und durch einen Zusatz das besondere Fach, d. h. Referendar und Assessor mit dem Zusatz: Gerichts-, Regierungs-, Forst-, Gewerbe-. Etwas anders ist es im Baufach, aber auch da führen die anstellungsfähigen, d. h. die das zweite Examen bestanden haben, eine andere klare Amtsbezeichnung, die in der Verkehrssprache wirklich gebraucht werden kann. Im höheren Lehrfach gibt es in Preußen amtlich nur „Kandidaten des höheren Lehramts“ und für die anstellungsfähigen, aber noch nicht endgültig angestellten die schwerfällige für die Verkehrssprache unbrauchbare Bezeichnung „Wissenschaftlicher Hilfslehrer“. Tatsächlich wird nun aber im amtlichen Verkehr von Eltern und Schülern meistens die Anrede „Herr Doktor“ gebraucht, auch wenn der betreffende Kandidat den Doktortitel gar nicht besitzt. Der Zwang, den Titel in einem solchen Falle als unberechtigt zurückzuweisen, ist, namentlich, wenn sich diese Anrede trotzdem wiederholt, sehr peinlich; auch wird dadurch leicht bei Schülern und Eltern der nicht promovierte Kandidat gegenüber anderen, die promoviert haben, heruntergesetzt. Es ist ferner auch nicht ausgeschlossen, daß der nur bei einem Teil der Kandidaten eines Seminarjahrganges erworbene Doktortitel hindernd dem in den Weg tritt, was das Seminarjahr in erster Linie bei allen Kandidaten erwecken soll: das lebendige Gefühl nun einem geschlossenen Stande anzugehören, eine Aufgabe des Vorberei-

tungsdienstes, für die der frühere Kultusminister und spätere Oberpräsident von Hessen-Nassau und Schlesien, Graf Zedlitz, wiederholt in Ansprachen bei Philologenversammlungen ein feines Verständnis gezeigt hat.

Näher kann hier auf diese Titelfragen nicht eingegangen werden, ebensowenig auch auf ähnliche damit zusammenhängende Standesfragen, die namentlich in norddeutschen Kleinstaaten in der letzten Zeit eine Rolle gespielt haben, wie z. B. die Forderung, daß die Oberlehrer bei festlichen Gelegenheiten gleich den anderen höheren Beamten eine Staatsbeamten-Uniform tragen dürfen, was im Großherzogtum Oldenburg jetzt eingeführt ist, in Braunschweig dagegen von der Regierung abgelehnt wurde.

Die vorhergehenden kurzen Ausführungen lassen doch vielleicht auch dem Fernerstehenden erkennen, daß allen diesen zunächst äußerlichen Fragen des Titels und Rangs ein tieferer Sinn zu grunde liegt, und daß mit vollem Rechte die Preußische Delegiertenkonferenz auch den Leitsatz aufgestellt hat, dessen Forderung in entsprechender Weise im Großherzogtum Hessen schon erfüllt ist:

Den vereidigten Kandidaten sind die Amtsbezeichnungen Assessor und Referendar zu verleihen; als Zusatz erscheint das Wort Studien wünschenswert.

Die erwähnten Bestimmungen für die Annahme als Seminarkandidat finden sich in der Ordnung der praktischen Ausbildung der Kandidaten für das Lehramt an höheren Schulen in Preußen vom 15. März 1908, die an Stelle der genau achtzehn Jahre früher erlassenen Ordnung getreten ist. Für diese neue Ordnung sind die vielen Erfahrungen benutzt worden, die man seit 1890 gemacht hat, und daher soll hier auch nur an der Hand der jetzt gültigen Ordnung der Charakter des Seminar- und Probejahres dargelegt werden. Es heißt in § 2:

Im Seminarjahr sollen die Kandidaten mit der Erziehungs- und Unterrichtslehre in ihrer Anwendung auf höhere Schulen und mit der Methodik der einzelnen Unterrichtsgegenstände vertraut gemacht, sowie zur praktischen Tätigkeit als Lehrer und Erzieher angeleitet werden.

Das Probejahr dient vorzugsweise der selbständigen Bewährung des im Seminarjahre erworbenen Lehrgeschicks.

Dieser Zweck des Seminarjahres wird zunächst durch wöchentliche Sitzungen von mindestens zwei Stunden erstrebt, die unter dem Vorsitz des Direktors oder eines der vom Provinzialschulkollegium beauftragten Oberlehrer stattfinden. Wenn auch möglichst auf die Fächer der Kandidaten bei der Verteilung auf die Seminare, die bei einzelnen höheren Schulen der Provinz eingerichtet sind, Rücksicht genommen wird, so kommt es doch vor, daß Mathematiker z. B. einem Seminar überwiesen werden, in dem weder der Direktor noch einer der beiden zur Mitwirkung im Seminar bestimmten Oberlehrer Mathematiker sind.

Der unteren Grenze von zwei Stunden eine obere gegenüberzustellen, wäre wohl angebracht, wenn man hört, daß bei einigen Se-

minaren diese Sitzungen vier und mehr Stunden dauern. Dieses Übermaß bringt doch leicht die Gefahr mit sich, daß die Kandidaten sich ihres Seminarjahres nicht mit besonderer Freude erinnern, zumal wenn auch die Behandlung der Kandidaten, wie mitunter geklagt wird, etwas „schulmeisterlich" ist. Daß der Verfasser hier nicht etwa in Erinnerung an das eigene Seminarjahr so schreibt, erhellt aus seinem Vortrag auf der Görlitzer Versammlung des Schlesischen Philologenvereines im Jahre 1906[1]), wo er ausdrücklich hervorhebt, wie dankbar er sich mit vielen anderen Berufsgenossen des Seminarjahres erinnert, das er an dem Kgl. Realgymnasium in Leer (Ostfriesland) zugebracht hat, dessen damaliger Direktor Quapp als Schellbachscher Kandidat oben (S. 105) schon genannt wurde.

Was in den Sitzungen behandelt werden soll, ergibt sich aus § 5:

Erziehungs- und Unterrichtslehre in ihrer Anwendung auf die höheren Schulen, insbesondere auf das Lehrverfahren in den einzelnen Fächern unter Berücksichtigung der Lehrbefähigung der Kandidaten;

geschichtliche Rückblicke auf die Entwicklung des höheren Schulwesens und auf bedeutende Vertreter der Pädagogik sowie Besprechungen wichtiger Erscheinungen auf dem Gebiete der Erziehung und des Unterrichts in der Gegenwart;

Verfassung und Organisation der höheren Schulen, die amtlichen Lehrpläne und Prüfungsordnungen, die Vorschriften über Zeugnisse und Versetzungen;

Grundsätze der Schulzucht, möglichst im Anschluß an bestimmte Vorkommnisse, auch an Konferenzverhandlungen über solche aus früherer Zeit, die Schulordnung, das Verhältnis von Schule und Haus;

Grundzüge der Schulgesundheitspflege mit besonderer Rücksicht auf Einrichtungen innerhalb der Schulräume und auf Anordnungen im Schulbetriebe;

die Aufsichtsbehörden; die Dienstanweisungen für Lehrer und Ordinarien[2]), die Form amtlicher Eingaben und Berichte;

Anweisungen für den Besuch von Unterrichtstunden anderer sowie für die Vorbereitung auf die eigenen Lehrversuche und für die Durchsicht und Rückgabe von Schülerarbeiten, Besprechungen und Lehrproben in persönlicher und sachlicher Beziehung.

Auch die Art, wie diese Gegenstände zu treiben sind, wird in demselben Paragraphen erläutert:

Nach der Bestimmung des Vorsitzenden haben die Kandidaten über einzelne in ihrem Gesichtskreise liegende Gegenstände aus den im Vorstehenden bezeichneten Gebieten kurzgefaßte Berichte zu liefern, auch mündliche Vorträge zu halten, bei denen besonderes Gewicht auf die Gewöhnung an freies Sprechen zu legen ist.

Über die Seminarsitzungen sind durch die Kandidaten Protokolle auszuarbeiten, die der Vorsitzende nach Feststellung in der nächsten Sitzung zu vollziehen hat. Die Provinzialschulkollegien haben dafür zu sorgen, daß von Zeit zu Zeit eine Auswahl dieser Protokolle sowie der den Kandidaten für ihre Berichte und Arbeiten gestellten

---

1) Lorey, Die Fortbildung der Philologen in ihrer Bedeutung für die Schule und das Leben. Blätter für höheres Schulwesen. 23. Jahrgang. Nr. 8. 1906.

2) Dafür tritt jetzt selbstverständlich die am 12. Dezember 1910 ergangene „Dienstanweisung für die Direktoren und Lehrer an den höheren Lehranstalten für die männliche Jugend in Preußen" ein, die gegenüber den gänzlich veralteten Dienstinstruktionen der einzelnen Provinzen einen großen Fortschritt bedeutet. Über diese alten Instruktionen vergleiche Lietzmann, Organisation des math. Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preußen. Diese Abhandlungen Bd. I, Heft 2, S. 33.

Aufgaben zwischen den Seminaranstalten ihres Aufsichtsbezirkes zu gegenseitiger Anregung der Leiter und Lehrer ausgetauscht wird.

In den ersten Jahren gab es neben den allgemeinen Sitzungen Fachsitzungen, in denen Lehrplan und Methodik der einzelnen Fächer besprochen wurden; an diesen Fachsitzungen nahmen nur die Kandidaten der betreffenden Fächer teil.

Jetzt scheint überall verlangt zu werden, daß die Kandidaten an allen Sitzungen teilnehmen, auch wenn über Fächer verhandelt wird, die ihnen ferner liegen.

Gewiß hat das für die Kandidaten, die frisch von der Universität kommend, sich noch lediglich als Vertreter ihres besonderen Faches fühlen, das Gute, den Blick für das Gemeinsame der Erziehungs- und Unterrichtsarbeit an unseren höheren Schulen zu schärfen. Auf der anderen Seite liegt freilich die Gefahr vor, daß je nach der Art und den Fächern der Leiter der Sitzungen ein Fach zu kurz behandelt wird.

Diesen Bedenken ist auch in dem schon mehrfach genannten Berichte der Unterrichtskommission vom Jahre 1907 Ausdruck gegeben, der fast ausschließlich von K. Fricke und F. Klein ausgearbeitet ist und dessen Abschnitt IX von den Pädagogischen Seminaren an den höheren Schulen handelt. Besonders wird darin betont, daß die „sehr bemerkenswerten Vorschläge, die von physikalischer Seite gemacht werden, in sinngemäßer Übertragung auch für die Mathematik unmittelbare Bedeutung haben". Diese von physikalischer Seite gemachten Vorschläge betreffen die Ausbildung im Gebrauch der physikalischen Apparate, in der Leitung von physikalischen Schülerübungen usw.; sie haben eine ausführliche Darstellung in einer Schrift des physikalischen Kommissionsmitgliedes F. Poske gefunden, auf die hier ausdrücklich hingewiesen wird.[1]) Man vergleiche aber auch den oben (S. 104) erwähnten Schellbachschen Plan zur Gründung eines mathematischen Instituts.

Zu den Sitzungen kommt als wesentliche Ergänzung die praktische Tätigkeit hinzu, bestehend im Besuch der Unterrichtsstunden anderer und in eigenen unterrichtlichen Versuchen. Erfreulicherweise setzen diese eigenen unterrichtlichen Versuche jetzt schon ziemlich früh ein, „sobald der Kandidat in der Anstalt einigermaßen heimisch geworden ist".

Auch sollen nicht nur einzelne Probelektionen gegeben werden, sondern es werden dem Kandidaten nach und nach zu erweiterende Lehraufgaben gestellt, die eine Reihe von Stunden erfordern. Probelektionen in Gegenwart sämtlicher Kandidaten sollen auch einmal stattfinden und zwar alle vier Wochen. Ich meine aber, daß man ihnen nicht mehr die Bedeutung beilegt wie in früheren Zeiten, wo unter

1) F. Poske, Über die Notwendigkeit der Errichtung einer Zentralanstalt für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Schriften des Deutschen Ausschusses für den math. und naturwiss. Unterricht. Heft 5. Auch abgedruckt in den Monatsheften für den naturwissenschaftlichen Unterricht 1910 und in der Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht 1910.

dem Einfluß der Anhänger von Herbart-Ziller-Stoy die Formalstufen eine große Rolle spielten, wo wohl den Kandidaten gelehrt wurde, daß „jede Stunde ein Kunstwerk sein sollte", eine Auffassung, die man in den von Frick begründeten „Lehrproben und Lehrgängen" finden kann, in denen sich aber doch manche für den Anfänger sehr nützliche Darstellungen von mathematischen Lehrstunden finden, zerlegt in Frage und Antwort, freilich nach Formalstufen konstruierte Stunden. Es ist notwendig und gut, daß die Kandidaten auch einmal bewußt solche Formalstufenstunden selbst geben; es muß ihnen aber im Seminarjahr auch schon zum Bewußtsein gebracht werden, daß solche Stufen schließlich nur äußere Krücken sind, daß das Schema sich nicht kalt zwischen Lehrer und Schüler schieben darf.[1]) Hoffentlich werden künftig alle mathematischen Kandidaten im Seminarjahr die von Lietzmann stenographisch aufgenommenen zwei mathematischen Stunden durcharbeiten[2]), die Schwering in Cöln gegeben hat, wie überhaupt sehr zu wünschen ist, daß die Abhandlungen der IMUK in den Seminaren von den Mathematikern eifrig benutzt werden.

Am Ende des Seminarjahres hat der Kandidat eine Arbeit abzuliefern, die „theoretische Erwägung und praktische Anwendung" umfaßt. So sind als mathematische Themen an dem mit dem Realgymnasium in Remscheid verbundenen Seminar in den letzten Jahren gestellt worden:

Über den planimetrischen Anfangsunterricht.
Einführung in die Algebra auf Grund von einfachen Gleichungen in Untertertia.
Die Behandlung der Trigonometrie in Untersekunda.
Differential- und Integralrechnung im Mathematikunterricht der Realanstalten.

Dabei ist darauf gehalten worden, wie mir der Remscheider Direktor von Staa schreibt, „daß die Kandidaten über das von ihnen gewählte Thema, sowohl durch gründliches Hospitieren als auch durch eigene unterrichtliche Tätigkeit genau informiert waren".

An dem Seminar, das mit der Klinger-Oberrealschule in Frankfurt a./M. verbunden ist, bearbeiten die Kandidaten nach eigner Wahl ein Thema, das nur der Genehmigung des Direktors P. Bode bedarf. Folgende Themen wurden dort seit 1901 behandelt:

1901: Drei Lektionen in Unterprima der Oberrealschule zur Einführung in die synthetische Geometrie der Kegelschnitte.

1902: Die Ausmessung des Kreises. Drei Lektionen in der Obertertia.

1903: Die Zurückwerfung des Lichts, behandelt in vier Stunden in Untersekunda einer Oberrealschule.

---

1) Eine ähnliche Auffassung kann man zwischen den Zeilen auch bei F. Alys eben erschienener „Geschichte des preußischen höheren Schulwesens" (Marburg. Elwertsche Verlagsbuchhandlung. 1911. S. 73) herauslesen. Auch für diese Geschichte, die der Verfasser veranlaßt durch seine zehnjährige Erfahrung als Direktor der Wissenschaftlichen Prüfungskommission in Marburg und Examinator für Pädagogik geschrieben hat, gilt, was im Vorwort und auf S. 64 dieser Abhandlung über geschichtliche Darstellungen der Entwicklung des höheren Schulwesens gesagt ist.

2) Lietzmann, Organisation des math. Unterrichts. Diese Abhandl. Bd. 1, Heft 2, S. 64 ff.

1904: Allgemeine Methode zur Darstellung von Körpern in beliebiger Lage, erläutert am Würfel. Drei Stunden Linearzeichnen in Untersekunda.

1905: Proportionen am Kreis. Vier Stunden in Obertertia. Pol und Polare beim Kreis und bei den übrigen Kegelschnitten. Vier Lektionen in Unterprima einer Oberrealschule.

1906: Die Lösung der numerischen Gleichungen 2., 3. und höheren Grades durch Näherungsmethoden (Graphische Darstellung, Regula falsi, Newtonsche Annäherungsmethode). Vier Lektionen in Prima.

Die Gesetze der Lichtbrechung. Vier Stunden in Untersekunda.

1907: Das Dreieck im propädeutischen Geometrieunterricht (Quinta).

Die Behandlung der elektrischen Schwingungen in der Oberprima einer Oberrealschule.

Das vollständige Vierseit und Viereck, in der Unterprima. Der Begriff der Dualität drei Lektionen.

Drei Lektionen über Maxima und Minima.

1908: Die Auflösung der quadratischen Gleichungen. Drei Stunden in Untersekunda.

Die Behandlung der Dispersion auf der Oberstufe.

Zur Repetition der geometrischen Analysis in Obertertia.

1910: Die Behandlung der Regula falsi und der Newtonschen Methode zur Erhöhung der Genauigkeit angenäherter Wurzelwerte. Drei Lektionen.

1911: Angewandte Mathematik auf den höheren Schulen, erläutert durch Lektionen „Pol und Polare" (Konjugierte Durchmesser in bezug auf Kreis und Ellipse). Vier Lektionen in Unterprima.

Ob neben dem Seminarjahr auch noch ein Probejahr erforderlich ist, hat man in der Literatur oft erörtert, und es haben sich viele Stimmen gegen ein zweites Jahr ausgesprochen.

Ein Nutzen des Probejahres, in dem nach den Bestimmungen der Kandidat mit wöchentlich acht bis zehn Stunden zu beschäftigen[1]) ist, liegt m. E. darin, daß er jetzt nach dem im ersten Jahre gewonnenen Überblick sich gründlicher auch theoretisch mit seinem Fach beschäftigen kann. Des alten Reidt Anleitung zum mathematischen Unterricht, Simons Didaktik und das neue Handbuch des mathematischen Unterrichts von Höfler sollten jetzt die mathematischen Kandidaten kritisch benutzen lernen; ebenso natürlich die Handbücher und Encyklopädien der Elementarmathematik von Killing-Hovestadt, Thieme-Färber, Schwering, Weber-Wellstein; durcharbeiten sollten sie F. Kleins Vorlesungen „über Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus". Auch die Geschichte der Mathematik ist jetzt wohl ihrem Studium besonders zu empfehlen, wenn sie auch hoffentlich schon vorher einige geschichtlich-mathematische Studien getrieben haben.

Ein mathematisches Kolloquium, in dem klassische Arbeiten der Schulmathematik behandelt werden, wie z. B. die verschiedenen Abhandlungen zur Kreismessung, würde mir für die Probekandidaten, die noch nicht durch die Höchstzahl der Stunden angespannt sind, sehr empfehlenswert scheinen. Freilich läßt sich ein solches Kolloquium

1) In den letzten Jahren ist freilich „ausnahmsweise" meistens eine Beschäftigung mit 20 bis 24 Stunden eingetreten, wofür die Kandidaten bezahlt werden.

nur in einer größeren Stadt einrichten, wo mehrere mathematische Probekandidaten vorhanden sind.

Es ist mit Absicht nur von den Mathematikern gesprochen. Was die beiden Vorbereitungsjahre an physikalischen und weiterhin überhaupt naturwissenschaftlicher Ausbildung zu erstreben haben, kann hier nicht erörtert werden. Es muß in dieser Hinsicht auf die reichhaltige Literatur verwiesen werden, vor allem auf die oben (S. 111) genannte Arbeite von Poske.

Ganz allgemein sei aber auch hier das schon S. 47 angeführte Buch von Fries genannt: Die wissenschaftliche und praktische Vorbildung für das höhere Lehramt, in dem eingehend über die zur Zeit bestehenden Einrichtungen in Deutschland und auch im Auslande berichtet wird.

Auch Oskar Jäger sei hier erwähnt, der zwar nach eigenem Geständnis von Mathematik gar nichts verstand, dessen „Lehrkunst und Lehrhandwerk"[1]) aber trotzdem auch jedem mathematischen Kandidaten empfohlen werden kann.

Und wenn nun auch die beiden Vorbereitungsjahre nicht alle Kandidaten zu hervorragenden Pädagogen machen können, so bleibt neben dem Seminarjahr auch sicher das Probejahr notwendig und von gutem Einfluß. Zum guten Erfolg des Seminar- und Probejahrs ist natürlich vor allen Dingen das eigene Bemühen der Kandidaten und überhaupt auch eine gewisse pädagogische Anlage bei ihnen erforderlich. Wenn Beides fehlt, werden auch die Vorbereitungsjahre keinen brauchbaren Oberlehrer ausbilden. In einem solchen Falle muß der Paragraph 15 unerbittlich angewandt werden, in dem es heißt:

Bestehen Zweifel darüber, ob der Kandidat bereits für anstellungsfähig zu erachten ist, so hat das Provinzialschulkollegium eine Verlängerung des Probejahrs zunächst auf ein halbes Jahr anzuordnen und die Entscheidung über die Zuerkennung der Anstellungsfähigkeit auszusetzen. Überhaupt zu versagen ist die Anstellungsfähigkeit, wenn sich inzwischen herausgestellt haben sollte, daß der Kandidat wegen körperlicher Gebrechen oder wegen unverbesserlichen pädagogischen Ungeschicks zur Erfüllung der Amtspflichten eines Lehrers und Erziehers der Jugend dauernd unfähig ist, oder wenn der Kandidat nach seiner amtlichen oder außeramtlichen Führung zur Bekleidung des Amtes eines Jugendlehrers ungeeignet erscheint. Der betreffende Beschluß des Provinzialschulkollegiums ist dem Kandidaten samt den Entscheidungsgründen schriftlich mitzuteilen.

Man findet wohl gelegentlich die Auffassung, daß in dieser Versagung der „Anstellungsfähigkeit" eine Härte liege. Wer so urteilt, bedenkt nicht, welchen Schaden ein für das höhere Lehramt so als ganz unfähig erwiesener Kandidat anrichten würde, wenn man ihn trotzdem zulassen wollte. Dieses Versagen der „Anstellungsfähigkeit" entspricht durchaus dem wiederholten Nichtbestehen der Assessorprüfung der Juristen.

---

1) O. Jäger, Lehrkunst und Lehrhandwerk. Wiesbaden, Kunzes Nachfolger. 1897. Es ist der zweite Teil seines 1885 im gleichen Verlage erschienenen „pädagogischen Testaments".

Da die pädagogische Unfähigkeit schon im Seminarjahr hervortreten wird, so heißt es in S. 9 der Ordnung:

Das Provinzialschulkollegium hat solche Kandidaten, gegen deren Zulassung zum Probejahr wegen dienstlicher oder außerdienstlicher Mängel noch Bedenken bestehen, zur Verlängerung der Seminarzeit um ein halbes oder ganzes Jahr einer anderen Seminaranstalt zu überweisen. Solchen Kandidaten, welche nach dem übereinstimmenden Urteil des Provinzialschulkollegiums und des Direktors für den Lehrerberuf ungeeignet erscheinen, ist zu eröffnen, daß sie zum Probejahr nicht zugelassen werden können.

Tatsächlich ist bis jetzt das Zeugnis der „Anstellungsfähigkeit" nur in sehr wenig Fällen versagt worden.

Einen weiteren wesentlichen Nutzen des Probejahres bringt der in der Regel eintretende Wechsel der Schule mit sich, was zweifellos bei den Kandidaten zur Erweiterung des Blickes dient. In dieser Hinsicht erscheint auch folgende Bestimmung über das Seminarjahr wichtig:

Soweit es die örtlichen Schuleinrichtungen gestatten, ist den Kandidaten Gelegenheit zu geben, zeitweise dem Unterricht in Lehrerseminaren und in Elementarschulen aller Art beizuwohnen.

Am Schlusse des Probejahres haben die Kandidaten „zum Erweise des erreichten Maßes pädagogischer Einsicht" einen Bericht über ihre eigene unterrichtliche Tätigkeit zu liefern, der von dem Direktor, ebenso wie die Seminararbeit, mit einer kurzen Begutachtung dem Provinzialschulkollegium eingereicht wird. Wichtig ist schließlich folgende Bestimmung aus § 8, von der auch Mathematiker Vorteil haben können:

Kandidaten, die nach Eintritt in das Probejahr zu eigener Weiterbildung für den Schuldienst oder zur lehramtlichen Tätigkeit bei deutschen Schulen in das Ausland gehen, darf die dort zugebrachte Zeit von dem Provinzialschulkollegium, dessen Bezirk sie bis dahin angliederten, auf das Probejahr angerechnet werden, wenn sie ausreichenden Nachweis darüber vorlegen, daß sie nach ihrer Wirksamkeit und Führung einer solchen Vergünstigung in jeder Hinsicht würdig sind.

Es ist zu wünschen, daß diese Bestimmung auch sinngemäß bei denen angewandt wird, die nach Eintritt in das Probejahr eine Stelle als wissenschaftlicher Assistent etwa bei einer Sternwarte bekleiden, was doch sicher eine Weiterbildung für den Schuldienst mit sich bringen kann, besonders wenn dort wie an den meisten naturwissenschaftlichen Instituten ein Praktikum für Lehramtskandidaten eingerichtet ist. Bis jetzt wird nur diese Assistentenzeit *nach* erlangter „Anstellungsfähigkeit" bis zu *einem* Jahr auf das pensionsfähige Dienstalter angerechnet auf Grund der *Ordnung, betreffend die Verhältnisse der anstellungsfähigen Kandidaten für das Lehramt an höheren Schulen in Preußen* vom 15. Mai 1905. Nur ausnahmsweise und nach vielen Schreibereien ist in den letzten Jahren einigen Kandidaten die Zeit z. B. als Assistent für darstellende Geometrie an einer technischen Hochschule als Probejahr angerechnet worden.

Die Hauptsache bleibt aber, daß die mehr als im Seminarjahr sich selbst überlassenen Probekandidaten immer wieder von Mitgliedern des Kollegiums darauf hingewiesen werden, das Band zu befestigen zwi-

schen der hohen Wissenschaft, die sie – und eine große Zahl jedenfalls und die besten – in idealer Begeisterung auf der Universität gepflegt haben, und dem, was der Beruf erfordert; zu erkennen, daß sie nicht tief herabgestiegen sind von dem weitschauenden Berggipfel der Wissenschaft auf die staubige Landstraße der Praxis, sondern daß sie hinübergegangen sind aus dem Garten der Wissenschaft auf die fruchtbaren Felder praktischer Tätigkeit, die eines Mannes ganze Kraft erfordern, daß es aber gut ist die Gartentür aufzulassen, um auch, wenn man in Amt und Würden ist, zur Erholung in den Garten der Wissenschaft zurückkehren zu können, wo man Kraft für die weitere Berufsarbeit sammelt.

Wie diese notwendige Fortbildung der Mathematiker im höheren Schulamte geschieht durch Kurse an den Universitäten, durch Versammlungen und Zeitschriften, soll im dritten Bande dieser Abhandlungen gezeigt werden.

In diesem letzten Abschnitte sind nur die preußischen Verhältnisse dargestellt worden. In den anderen norddeutschen Staaten geschieht die praktische Ausbildung wesentlich nach preußischem Muster. Soweit davon Abweichungen vorkommen, werden sie in dem von Thaer, Geuther und Böttger verfaßten Berichte, Band I Heft 4 dieser Abhandlungen besprochen werden.

Es ist ein Zeitraum von hundert Jahren, den die vorliegende Arbeit überspannt. Wie sich das Staatsexamen und die praktische Ausbildung des vor hundert Jahren geschaffenen Standes der Oberlehrer darstellen wird, wenn wieder ein Jahrhundert vergangen ist, kann natürlich heute nicht gesagt werden. Was insbesondere künftig von denen, die Mathematik an den höheren Schulen lehren wollen, an mathematischen und physikalischen Studien und Kenntnissen zu fordern ist bei der ständig wachsenden Wissenschaft und der fortwährenden Arbeitsteilung, das ist ein wichtiges Zukunftsproblem, bei dessen Lösung hoffentlich diese Abhandlung helfen kann, wenn sie vielleicht mit dazu beiträgt, daß in Zukunft solche Verstiegenheiten gemieden werden, die im abgelaufenen Jahrhundert zu der scharfen Trennung zwischen der Mathematik der Universität und der Mathematik der Schule geführt haben. In erfreulicher Weise wird jetzt schon seit einigen Jahren an verschiedenen Stellen wieder an einer Brücke zwischen Hochschule und höherer Schule gebaut. Möge die vorliegende Arbeit einen Baustein dazu liefern.

Namenverzeichnis.[1])

1) Für die Herstellung dieses Verzeichnisses bin ich meinem Schüler, dem Oberprimaner R. Westmeyer, zu Dank verpflichtet. Die mit * versehenen Namen kommen nur als Unterschriften bei den abgedruckten Zeugnissen vor.

Zeitschrift für mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht. Organ für Inhalt, Methode und Organisation des Unterrichtes in den exakten Wissenschaften an allen Schulgattungen. Begründet 1869 durch J. C. V. Hoffmann. Herausgegeben von H. Schotten, Halle a. S. 42. Jahrgang. 1911. Jährlich 12 Hefte. gr. 8. Preis für den Jahrgang M. 12.—. Einzelne Hefte je M. 1.60.

Monatshefte für den naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen herausgegeben von Bastian Schmid in Zwickau i. S. IV. Band. 1911. Jährlich 12 Hefte. gr. 8. Halbjährlich M. 6.—

Abhandlungen und Berichte über technisches Schulwesen. Veranlaßt und herausg. vom Deutschen Ausschuß für techn. Schulwesen.

I. Band: Arbeiten auf dem Gebiete des technischen Mittelschulwesens. [IV u. 167 S.] gr. 8. 1910. Geh. M. 6.—
II. — Arbeiten auf dem Gebiete des technischen Mittelschulwesens. [IV u. 159 S.] gr. 8. 1911. Geh. M. 6.—

Behrendsen, O., und **Dr. E. Götting**, Professoren am Kgl. Gymnasium zu Göttingen, Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. A: Unterstufe. 2. Auflage. Mit 295 Figuren. [VII u. 277 S.] gr. 8. 1911. In Leinwand geb. M. 2.80.

Die Oberstufe befindet sich unter der Presse.

——— ——— Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. Ausgabe für höhere Mädchenlehranstalten, zugleich Unterstufe für Lyzeen und Studienanstalten. 2. Aufl. Mit vollständiger Aufgabensammlung und 306 Figuren. [VIII u. 348 S.] gr. 8. 1911. In Leinwand geb. M. 3.—

Bibliothek, Mathematische. Gemeinverständliche Darstellungen aus der Elementar-Mathematik für Schule und Leben. Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting. In Heften zu je 64 Seiten. Kart. ca. M. —.85.

Unter der Presse befinden sich:

Löffler, E., Ziffern und Ziffernsystem bei den wichtigsten Kulturvölkern der Erde.

Lietzmann, W., der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem.

Wieleitner, H., der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung.

Borel, Dr. E., Professor an der Sorbonne zu Paris, die Elemente der Mathematik. In 2 Bänden. Deutsche Ausgabe besorgt von P. Stäckel, Prof. an der Technischen Hochschule in Karlsruhe i. B.

I. Band: Arithmetik und Algebra. Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. [XVI u. 431 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. M. 8.60.
II. — Geometrie. Mit 403 Fig. [XII u. 324 S.] gr. 8. 1909. In Leinw. geb. n. M. 6.40.

Grimsehl, Dr. E., Direktor der Oberrealschule auf der Uhlenhorst zu Hamburg, Lehrbuch der Physik. Große Ausgabe. Zum Gebrauch beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. Mit 1091 Figuren, 2 farbigen Tafeln und einem Anhange, enthaltend Tabellen physikalischer Konstanten und Zahlentabellen. [XII u. 1052 S.] gr. 8. 1909. Geh. M. 15.—, in Leinwand geb. M. 16.— [2. Auflage 1911 unter der Presse.]

——— Lehrbuch der Physik für Realschulen. Mit 389 Figuren und 1 farbigen Tafel. [VII u. 269 S.] gr. 8. 1911. In Leinwand geb. M. 2.60.

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND I HEFT 4

DER MATHEMATISCHE UNTERRICHT IN DEN GYMNASIEN UND REALANSTALTEN DER HANSESTÄDTE MECKLENBURGS UND OLDENBURGS

VON

A. THAER
HAMBURG

N. GEUTHER
GÜSTROW

A. BÖTTGER
OLDENBURG

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND I HEFT 4

DER MATHEMATISCHE UNTERRICHT

IN DEN GYMNASIEN UND REALANSTALTEN DER HANSESTÄDTE MECKLENBURGS UND OLDENBURGS

VON

A. THAER
HAMBURG

N. GEUTHER
GÜSTROW

A. BÖTTGER
OLDENBURG

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

Vorwort.

Die Anregung, dem mathematischen Unterricht in den norddeutschen Küstenstaaten außer Preußen ein besonderes Heft in den Veröffentlichungen der Internationalen mathematischen Unterrichtskommission zu widmen, fand bei dieser zwar ein freundliches Entgegenkommen, es wurden aber doch Bedenken laut, ob sich in diesen Gebieten, die von der Landseite rings von Preußen umgeben sind, ein hinreichend eigentümliches Schulleben entwickelt habe. Diese Bedenken stützten sich nicht nur darauf, daß die Lehrpläne neuerdings eine große Ähnlichkeit mit den preußischen zeigten, sondern fast noch mehr auf den Umstand, daß auch die Lehrer, zu einem erheblichen Teile aus Preußen stammen. Hoffentlich ist es gelungen, in dem hier vorliegenden Heft diese Bedenken auch in den Augen der Leser zu entkräften, obgleich Fernerstehende immer leichter Ähnlichkeiten herausfinden als die nächsten Verwandten.

Neben der stark betonten Selbständigkeit, kommt in den folgenden Seiten aber auch das Gefühl zum Ausdruck, sich im engsten Anschluß an das zu wissen, was an fortschrittlicher Entwicklung im übrigen Deutschland ersehnt wird und seinen wesentlichen Ausdruck in den Meraner Lehrplänen der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte gefunden hat. Für den Optimismus, der in dieser Beziehung die Abhandlung durchzieht, sind die Verfasser nicht allein verantwortlich. Haben sie doch im wesentlichen nur das Ergebnis aus einer Umfrage gezogen, die genau nach dem für die süddeutschen Staaten bewährten Verfahren vorgenommen ist. Da die Beantwortung der versandten Fragebogen ein nicht ganz kleines Maß von Zeit und Nachdenken erforderte, war es erfreulich, daß im Durchschnitt 50 % wirklich eingehend und sorgfältig abgefaßter Berichte einliefen. Es ist natürlich, daß diese Selbstbildnisse etwas geschmeichelt sind, wenn es auch an kleinen Zügen von Selbstironie und gelegentlich recht kräftigen Seitenhieben nicht fehlt. Diese erfrischenden Bemerkungen

zu unterdrücken, hatten die Verfasser keinen Anlaß, müssen sich aber dagegen verwahren, für jede einzelne haftbar gemacht zu werden.

Da die Berichte über die übrigen Staaten Deutschlands, trotz der Übereinstimmung der Fragebogen, recht verschieden nach Form und Inhalt ausgefallen sind, darf es nicht wundernehmen, daß die hier doch mehr zufällig nach der geographischen Lage in ein Heft zusammengefaßten drei Abhandlungen recht wesentliche Abweichungen auch in der äußeren Behandlung der Materie zeigen. Galt es doch den subjektiv empfundenen Eigentümlichkeiten des mathematischen Unterrichts in der engeren Heimat einen lebhaften Ausdruck zu geben. So ist in den Hansestädten der Nachdruck darauf gelegt worden zu zeigen, daß weitgehende Freiheit der Schulen und der einzelnen Mathematiker geeignet ist, vielseitiges und lebhaftes Streben zu erzeugen. In der Behandlung Mecklenburgs tritt außer dem eigentümlichen Unterschied zwischen den großherzoglichen und den städtischen Schulen besonders die prächtige Persönlichkeit Seegers in den Vordergrund, des Idealisten, der nicht nur mit halb verborgener Tat, sondern mit energischem Wort schon vor einem Menschenalter auf Grund seiner eigenen praktischen Lebenserfahrung eine Umwälzung des gesamten mathematischen Unterrichts ganz im Sinne der heutigen Reform verlangte, ein Vorkämpfer, um nur eins zu nennen, für die Einführung der Differential- und Integralrechnung in die Schulen. In Oldenburg finden wir ein sehr viel schärfer einheitlich organisiertes Schulwesen, das aber Männern wie Harms und Schuster Gelegenheit bot, einen weit über die Grenzen ihres Vaterlandes hinausgehenden Einfluß auf die Entwicklung des mathematischen Unterrichts auszuüben.

Hamburg im April 1911.

A. Thaer.

Inhalt.

1. Die Hansestädte von A. Thaer.

2. Das Großherzogtum Mecklenburg-Schwerin von N. Geuther.

3. Das Großherzogtum Oldenburg von A. Böttger.

DIE HANSESTÄDTE

VON

A. THAER.

Einleitung.

Libertatem quam peperere majores
digne servare studeat posteritas.

Die folgende Abhandlung will ein Bild des mathematischen Unterrichts in den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte geben. Ausgeschlossen und anderen Heften dieses Bandes der Veröffentlichungen zugewiesen wurde dabei von dem Deutschen Unterausschusse der Internationalen Mathematischen Unterrichts-Kommission die Darstellung des mathematischen Unterrichts in den höheren Mädchenschulen und den Lehrerseminarien. Auf die geschichtliche Entwicklung ist nur gelegentlich, wo es sich um bedeutende Erscheinungen handelt, hingewiesen, und ebenso ist auf eine zusammenhängende Darstellung des Lehrverfahrens verzichtet worden. Bei der großen Freiheit des Unterrichtsbetriebs und dem leicht zu bewerkstelligenden und lebhaften Gedankenaustausch zwischen den Mathematikern innerhalb der drei Städte, bei der Herkunft der Mathematiker aus allen Teilen Deutschlands, da die Hansestädte ihren Bedarf erst in neuester Zeit einigermaßen zu decken imstande sind, haben alle Verbesserungen der Methodik rasch Eingang und Verbreitung gefunden, manches mag auch autochthon parallel mit dem übrigen Deutschland sich entwickelt haben. Eine Zusammenstellung der Lehrverfahren in den Hansestädten wäre deshalb nur eine Wiederholung dessen, was in anderen Abhandlungen, besonders in denen über Preußen und Hessen schon enthalten ist. Auf Einzelheiten näher einzugehen, ergab sich genügend Veranlassung und Gelegenheit.

Die Unterlage boten die amtlichen Lehrpläne, die Jahresberichte der einzelnen Anstalten und die Antworten, die auf die versandten Fragebogen (vgl. Bd. II Heft 1 S. VII) eingingen. Für diese ist der Verfasser zunächst den Oberschulbehörden der Hansestädte zu Dank verpflichtet, da sie nicht nur Versendung und Beantwortung gestatteten,

sondern lebhaft förderten. Herzlicher Dank sei auch den Herren Kollegen an dieser Stelle ausgesprochen, die eine solche Fülle wertvollen Materials herbeibrachten, daß der Bearbeiter nur bedauerte, im Interesse der Übersicht nicht mehr wörtlich zitieren zu können. Wenn er auf die Wiedergabe der Namen verzichtete, so geschah es aus dem Wunsch, ein trotz seiner Mannigfaltigkeit möglichst einheitliches Gesamtbild zu bieten. Sind es auch die Äußerungen einzelner Persönlichkeiten, so ist doch fast jede mehrfach vorhanden, wieder aber mit kleinen Abweichungen, die es nicht gestatteten, mehrere Namen unter eine zu setzen. So bittet der Bearbeiter, die folgende Abhandlung als eine gemeinsame Arbeit der hanseatischen Mathematiker anzusehen; denn die Ideen auch der sozusagen redaktionellen Teile finden sich ohne Ausnahme in den Einzelberichten.

Als besonders stark beteiligte Mitarbeiter sind zu nennen:

Aus Lübeck die Herren Bender, J. Müller (Dir.), Sack. Aus Bremen (einschließlich Bremerhaven und Vegesack) die Herren Bock, Fricke (Dir.), Grosse, Hansel, Kegel, Knothe, Konow, Nagel (Dir.), Nölke, Peter, M. Schmidt. Aus Hamburg (bez. Bergedorf) die Herren H. Ahlborn, Berkhan, Bertheau, Böger, Boehm, Bohnert (Dir.), Büchel, Busche, Dörge, Grimsehl (Dir.), Groebel, Hillers, E. Hoppe, Järisch, Jung, Körner, Lony, Siegmeyer, J. Schröder (Dir.), Thorade, Uetzmann, H. A. Wagner (Dir.), Zwingenberger sowie die Fachkonferenzen der Gelehrtenschule des Johanneums und der Oberrealschule St. Georg.

Folgende Anstalten kamen in Betracht.

Lübeck: Katharineum (G. u. Rg.), Johanneum (Rg. u. R.) Realschule zum Dom.
Bremen: Altes Gymnasium, Neues Gymnasium (Ref. G.), Realgymnasium, Oberrealschule; Realschulen: 1. in der Altstadt, 2. beim Doventor, 3. in der Neustadt.
Bremerhaven: Gymnasium und Realschule.
Vegesack: Reform-Realgymnasium.
Hamburg: Gelehrtenschule des Johanneums, Wilhelm-Gymnasium; Realgymnasium des Johanneums, Heinrich-Hertz-Realgymnasium; Oberrealschulen: 1. vor dem Holstentore, 2. auf der Uhlenhorst, 3. in Eimsbüttel, 4. in St. Georg.
Realschulen: 1. vor dem Lübecker Tor, 2. in Eilbeck, 3. in St. Pauli, 4. in Eppendorf, 5. in Hamm, 6. an der Bismarckstraße, 7. in Barmbeck.
Cuxhaven: Höhere Staatsschule (G. u. R.).
Bergedorf: Hansaschule (G. u. R.).

Gemeinsame amtliche Lehrpläne für die gleichartigen Lehranstalten existieren nur in Hamburg. Aber auch hier lassen sie weiten Spielraum, so sind z. B. die Pensen für die Oberklassen der Oberrealschulen nicht für die einzelnen Klassen differenziert oder es wird einzelnen Anstalten „versuchsweise“ — bei Einführung von Lehrbüchern wird dies Verfahren grundsätzlich angewendet — gestattet, einen abweichenden Lehrplan zu befolgen. Auch an den einzelnen Anstalten lassen Konferenzbeschlüsse dem Lehrer möglichste Freiheit. Diese ist ohne Schädigung des Betriebes möglich, weil überall das System des Aufrückens des Lehrers mit der Klasse durchgeführt ist, d. h. der

Mathematiker behält seine Schüler von Quarta bis Untersekunda manchmal auch darüber hinaus, jedenfalls aber immer von Obersekunda bis Oberprima. Die Verschiedenheit, sogar in der Stundenzahl, die die Anstalten in Lübeck und im Bremer Staatsgebiet zeigen, weisen auf eine noch größere Selbständigkeit der einzelnen Lehrerkollegien hin.

Deshalb ist den Anschauungen, die in den Antworten auf die versandten Fragebogen zutage treten, vielfach ein besonderer Wert beizulegen: Es sind eben nicht Wünsche sondern Schilderungen, wie es der einzelne Lehrer macht. Neuerungen werden von den obersten Schulbehörden nicht nur geduldet, sondern als ein Zeichen geistigen Lebens gern gesehen und gefördert. Wenn aus den folgenden Blättern hervorgehen sollte, daß der mathematische Unterricht in den Hansestädten auf der wünschenswerten Höhe steht, mag diese auch einzelne eigenartige Zacken aufweisen, so ist dies in erster Linie der Freiheit zu danken, die dem Mathematiker in seinem Unterrichtsbetrieb gelassen wird, und deshalb durfte dieser Einleitung der Wahlspruch voranstehen, der das Hamburger Rathaus ziert und das Wesen des hanseatischen Charakters ausdrücken soll.

1. Lehrpläne für den mathematischen Unterricht.

I. Gymnasium.

1. Anzahl der Stunden.

Rechnen.

		VI	V	IV	Sa
Lübeck	Katharineum (K.)	4	4	2	10
Bremen	Altes Gymnasium (A. G.). . . .	4	3	3	10
"	Reform-Gymnasium (Ref. G.)	5	5	2	12
Bremerhaven	Gymnasium (G.)	4	4	2	10
Hamburg	Gelehrtenschule (G.)	4	4	2	10
"	Wilhelmgymnasium (W. G.) .	4	4	2	10
Bergedorf	Hansaschule (Hs.)	5	4	2	11
Cuxhaven	Höh. Staatsschule (H. S.) . . .	4	4	–	8

Mathematik.

		IV	UIII	OIII	UII	OII	UI	OI	Sa
Lübeck	K.	2	3	3	4	4	4	4	24
Bremen	A. G. . .	2	3	3	4	4	4	4	24
"	Ref. G. .	3	4	4	4	3	3	3	24
Bremerhaven	G.	2	4	4	4	4	4	3	25
Hamburg	G.	2	3	3	3	4	4	4	23
"	W. G. .	2	3	3	3	4	4	4	23
Bergedorf	Hs. . . .	2	3	3	3	4	4	4	23
Cuxhaven	H. S. . .	4	3	3	3	4	4	4	25

2. Unterrichtsstoff.

A. Rechnen.

Sexta.

a) Wiederholung der 4 Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen, unbenannten und benannten.
b) Die deutschen Maße, Gewichte und Münzen.
c) Übung in der dezimalen Schreibweise.
d) Übung in den einfachsten dezimalen Rechnungen.
e) Einführung in die Bruchrechnung.
f) Kopfrechnen.
g) Besondere Berücksichtigung des großen Einmaleins im Kopfrechnen.

Nicht erwähnt wird:

c) und d) in Lübeck, Bremen Ref. G. (wohl selbstverständlich bei b).
e) in Bremen A. G., Bremerhaven.
f) und g) in Bremen (f wohl als methodisch selbstverständlich fortgelassen).

Quinta.

a) Teilbarkeit der Zahlen.
b) Gemeine Brüche.
c) Dezimalbrüche.
d) Verwandelung der Dezimalbrüche.
e) Einfache Aufgaben aus der Regeldetri.
f) Mehrfach benannte Zahlen, deren Währungszahl keine Potenz von 10 ist.

Nicht erwähnt wird:

c) in Bremen A. G. (nach IV verlegt).
d) in Lübeck und Bremen (wohl unter c mit einbegriffen).
e) in Bremen Ref. G.
f) Überall außer in Bremerhaven.

Quarta.

a) Wiederholung und Erweiterung der Rechnung mit gemeinen und Dezimalbrüchen.
b) Einführung in die arithmetische Sprache.
c) Einfache und zusammengesetzte Regeldetri mit ganzen Zahlen und Brüchen.
d) Prozentrechnung.
e) Gewinn- und Verlustrechnung.
f) Zinsrechnung.
g) Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben.

Nicht erwähnt wird:

d) in Hamburg (unter f mit einbegriffen).
e) in Hamburg und Bremen (unter f mit einbegriffen).
f) in Lübeck (unter d mit einbegriffen).
g) in Hamburg.

B. Arithmetik und Algebra.

Unter-Tertia.

a) Addition und Subtraktion.
b) Negative ganze Zahlen.
c) Multiplikation.
d) Division und Brüche.
e) Potenzen.
f) Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

Nicht erwähnt wird:

e) in Lübeck, Bremen A. G., Bremerhaven, Hamburg (nach O III verschoben).
f) in Bremen A. G. (nach O III verschoben).

Ober-Tertia.

a) *) Dezimalbrüche.
b) *) Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.
c) Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.
d) Arithmetische Umformungen.
e) Proportionen.
f) Zahleneigenschaften.
g) Potenzen mit ganzen positiven Exponenten.
h) *) Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten.
i) *) Wurzeln.

*) Da bei jeder Klasse das Gesamtpensum aufgeführt ist, das überhaupt an irgendeinem Gymnasium in dieser Klasse gelehrt wird, treten verschiedene Unterrichtskapitel mehrfach auf. Sie sind mit einem *) gekennzeichnet, wenn sie in der Mehrzahl der Anstalten einer anderen Klasse zugewiesen werden.

Nicht erwähnt wird:

a) in Lübeck und Bremen. (Im Rechenunterricht bis U III erledigt).

d) in Lübeck (wird aber getrieben wie aus den Aufgabensammlungen ersichtlich).

e) Bremen A. G. (wohl in U II zu erledigen).

f) in Lübeck.

g) in Hamburg (nach U II verschoben).

h u. i) Lübeck, Hamburg, Bremen A. G. (nach U II).

Unter-Sekunda.

a) Quadratwurzel ausziehen.
b) Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.
c) Rechnen mit irrationalen Quadratwurzeln.
d) Potenzen.
e) Wurzeln.
f) *) Logarithmen.
g) *) Exponentialgleichungen.
h) Lineare Gleichungen mit 3 Unbekannten.
i) Graphische Darstellungen: die lineare und quadratische Funktion.

Nicht erwähnt wird:

a) u. c) in Bremen.

d) u. e) in Bremen Ref. G. und Bremerhaven (in O III erledigt).

g) in Hamburg (nach O II) und in Bremerhaven.

h) u. i) in Lübeck, Bremen A. G., Bremerhaven, Hamburg.

Ober-Sekunda.

a) *) Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten.
b) Imaginäre Größen.
c) Logarithmen.
d) Exponentialgleichungen.
e) *) Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.
f) Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.
g) Arithmetisches Lehrgebäude.
h) *) Arithmetische Reihen.
i) *) Geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung.

Nicht erwähnt wird:

a) u. c) in Lübeck, Bremen Ref. G., Hamburg (in U II erledigt).

d) in Lübeck, Bremen Reform-Gymn. (in U II erledigt).

g) in Lübeck und Bremen.

i) in Bremerhaven (nach U I verschoben).

h) u. i) in Hamburg und Lübeck (nach U I verschoben).

Unter-Prima.

a) Arithmetische und geometrische Reihen erster Ordnung.
b) Zinseszins- u. Rentenrechnung.
c) Gaußische Zahlenebene.
d) Moivres Theorem.
e) Binomischer Satz.

Nicht erwähnt wird:

c) u. d) in Lübeck und Bremen (vielleicht in O II).

e) in Lübeck, Bremen A. G., Bremerhaven und Hamburg (nach O I).

Ober-Prima.

a) *) Binomischer Satz für ganze positive Exponenten.
b) *) Komplexe Zahlen.
c) Diophantische Gleichungen ersten Grades.
d) Kombinatorik.
e) Wahrscheinlichkeitsrechnung.
f) Auflösung höherer Gleichung durch graphisches Verfahren.
g) Wiederholungen aus allen Gebieten.

Nicht erwähnt wird:

b) in Hamburg (in U I erledigt).

b), c), d), e), f), in Bremerhaven.

c), e), in Lübeck und Bremen.

f) in Hamburg, Bremen A. G.

C. Geometrie.

Quarta.

a) Übungen mit Lineal und Zirkel.

b) Begriffe, Sätze und Aufgaben der Planimetrie bis zu den einfachen Dreieckskonstruktionen.

c) Fundamentalaufgaben.

d) Kongruenz der Dreiecke nebst Anwendungen.

e) *) Eigenschaften der Parallelogramme und Trapeze.

f) Konstruktionsaufgaben.

Nicht erwähnt wird:

a) in Hamburg und Bremen (wohl weil unentbehrlich für b).

c) in Lübeck und Bremen (wohl als selbstverständlich fortgelassen).

e) Bremen A. G. und Bremerhaven (nach U III verschoben).

f) Lübeck (nach U III verschoben).

Unter-Tertia.

a) Lehre vom Viereck.

b) Kreislehre.

c) Regelmäßige Vielecke.

d) Analyse von Konstruktionsaufgaben.

e) *) Flächenvergleichung und Flächenberechnung. Einfache Berechnungsaufgaben.

Nicht erwähnt wird:

a) in Lübeck, Hamburg und Bremen Ref. G. (in IV erledigt).

c) in Lübeck und Bremen. Auch in Hamburg nur fakultativ.

e) in Lübeck und Hamburg (nach O III verschoben).

Ober-Tertia.

a) Kreislehre (Erweiterung).

b) Flächengleichheit.

c) Ausmessung der geradlinigen Figuren.

d) Proportionalität von Strecken.

e) Ähnlichkeit.

f) *) Regelmäßige Vielecke.

g) Konstruktionsaufgaben.

Es fehlen:

a) in Bremen Ref. G. (in U III erledigt).

c) in Hamburg (nach U II verschoben).

d) u. c) in Bremen A. G. (nach U II verschoben).

f) in Bremen A. G., Bremerhaven (nach U II verschoben), in Hamburg (fakultativ in U III).

g) in Hamburg (in U III), in Bremen A. G. (in U II).

Unter-Sekunda.

a) *) Proportionalität.

b) *) Ähnlichkeit.

c) Proportionen am Kreise.

d) Ähnlichkeitsaufgaben.

e) Flächenberechnung der geradlinigen Figuren.

f) Kreisberechnung.

g) *) Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

h) *) Satz des Apollonius.

i) *) Anfangsgründe der Trigonometrie.

Nicht erwähnt wird:

a) u. b) in Bremen Ref. G., Bremerhaven, Hamburg (in O III erledigt).
g) in Hamburg und Lübeck (nach O II verschoben).
h) in Bremerhaven.
h) u. i) in Lübeck, Bremen A. G., Hamburg (nach O II verschoben).

Ober-Sekunda.

a) Übersicht über das System der planimetrischen Lehrsätze.
b) Algebraische Geometrie.
c) Maßbeziehungen am Dreieck.
d) Harmonische Gebilde.
e) Transversalen am Dreieck.
f) Trigonometrie.
g) Goniometrie.
h) Einführung in die Stereometrie: Zeichnung und Berechnung einfacher Körper.

Es wird nicht erwähnt:

a) in Lübeck und Bremen.
a), c), d), e) in Bremen Ref. G. (nach U I verschoben).
d), e) in Hamburg.
g), h) in Lübeck, Bremen A. G., Hamburg (nach U I).

Unter-Prima.

a) *) Harmonische Gebilde.
b) *) Transversalen am Dreieck.
c) Ebene Trigonometrie II. Teil. Goniometrie.
d) Stereometrie nebst Anleitung zum Zeichnen räumlicher Gebilde.
e) Sphärische Trigonometrie.
f) *) Analytische Geometrie des Punktes, der Geraden und des Kreises.

Es wird nicht erwähnt:

a) u. b) in Hamburg. In Lübeck, Bremen A. G., Bremerhaven (in O II erledigt).
e) in Lübeck.
f) in Lübeck, Bremen A. G. und Hamburg (nach O I verschoben).

Ober-Prima.

a) Grundlehren von den Koordinaten.
b) Analytische Geometrie der Kegelschnitte.
c) Kegelschnitte in synthetischer Behandlung.
d) Maxima und Minima.
e) Kartenprojektionen.
f) Wiederholungen aus allen Gebieten.

Es wird nicht erwähnt:

a) in Bremen Ref. G. (in U I erledigt).
a) u. b) in Bremerhaven (in U I erledigt).
c), d) u. e) in Hamburg.
c) u. e) in Bremen A. G.
c) u. d) in Lübeck.

In Bremerhaven ist das Pensum: Schwerpunkt und Guldinsche Regel. Wiederholungen.

D. Entwurf des Reformlehrplans für das Wilhelm-Gymnasium in Hamburg.

IV.

2 Stunden wöchentlich.

1. Sem. Begriffe und Aufgaben der Planimetrie. Fundamentalaufgaben. Kongruenz der Dreiecke.

2. Sem. Parallelogramme und Trapeze. Konstruktionsaufgaben. Anfang der Kreislehre. (Bei allen Konstruktionsaufgaben ist besonderer Wert auf die Betrachtung einfacher Abhängigkeitsverhältnisse zu legen.)

U III.

3 Stunden wöchentlich.

1. Sem. Analysis von Konstruktionsaufgaben. Addition und Subtraktion. Negative Zahlen. Multiplikation.
2. Sem. Kreislehre. Division. Einfache Gleichungen 1. Grades mit einer Unbekannten. Faktorenzerlegung.

O III.

3 Stunden wöchentlich.

1. Sem. Reguläre Polygone. Verwandlung und Teilung der Figuren. Erweiterung der Lehre von der Division. Gleichungen 1. Grades mit mehreren Unbekannten. Graphische Darstellung.
2. Sem. Lehrsatz des Pythagoras. Geometrische Konstruktion irrationaler Quadratwurzeln. Proportionalität. Quadratwurzelausziehen.

U II.

3 Stunden wöchentlich.

1. Sem. Gleichungen 2. Grades mit einer Unbekannten. Imaginäre Zahlen. Ähnlichkeit.
2. Sem. Proportionen am Kreise. Harmonische Teilung. Flächenberechnung. Kreisberechnung. Potenzen. Wurzeln. Logarithmen.

O II.

4 Stunden wöchentlich.

1. Sem. Methoden der Winkelmessung. Ebene Trigonometrie. Wiederholung der Gleichungen zweiten Grades mit einer und zwei Unbekannten. Komplexe Zahlen. Moivres Theorem.
2. Sem. Exponentialgleichungen. Erweiterung der geometrischen Konstruktion algebraischer Ausdrücke. Systematische Einführung in den Funktionsbegriff.

U I.

4 Stunden wöchentlich.

1. Sem. Arithmetische Reihen erster Ordnung. Geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Wiederholung der Funktionsbetrachtungen. Kubische Gleichungen.
2. Sem. Stereometrie. Elemente der sphärischen Trigonometrie.

O I.

4 Stunden wöchentlich.

Kombinatorik. Einfachste Fälle der Wahrscheinlichkeit. Binomischer Lehrsatz. Elemente der Differentialrechnung.
Elemente der analytischen Geometrie und der Integralrechnung. Wiederholungen aus allen Gebieten.

Reifeprüfungsaufgaben Herbst 1909.

1. Eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 7$, $b = 5$ cm rotiert das eine Mal um die Achse $2a$, das andere Mal um die Achse $2b$ und drittens um eine zu a parallel gezogene Tangente. Wie verhalten sich die Volumina der drei Rotationskörper zueinander?

2. Es ist gegeben die Funktion $y = ln \frac{a+x^2}{2bx}$. Es sollen der erste und zweite Differentialquotient abgeleitet werden, und der Wert von x soll angegeben werden, für welchen die Funktion ein Minimum wird.

3. Um eine gegebene Kugel vom Radius r soll eine quadratische Pyramide gelegt werden, so daß das Volumen dieser Pyramide ein Minimum ist. Wie groß muß die Höhe und die Grundkante derselben sein?

4. Wie hoch steht die Sonne am längsten Tage in Hamburg, wenn sie genau im Westen steht, und um wieviel Uhr (Lokalzeit) findet das statt?

Sonderaufgaben.

1. $\int_0^8 4\sqrt[3]{x^2}\cdot dx$ soll berechnet werden.

2. Es soll eine Methode angegeben werden, um $\int e^x \sin x \cdot dx$ zu finden.

II. Realgymnasium.

1. Stundenzahl.

Rechnen.

	VI	V	IV	UIII	OIII	UII	Sa
Lübeck Katharineum (LK) . . .	4	4	2(+2)	2	2	(1)	14(17)
„ Johanneum (LJ)	5	5	3	2	1		16
Bremen (B)	4	5	2	2	—		13
Vegesack (V)	4	4	2	1	—		11
Hamburg (H)	5	4	2	—	—	(2)	11(13)

Die eingeklammerten Zahlen bezeichnen fakultativen Unterricht.

Mathematik.

	V	IV	UIII	OIII	UII	OII	UI	OI	Sa
LK	–	2	4	4	4	5	5	5	29
LJ	1	3	4	4	5	4	5	5	31
B	–	3	4	5	5	5	5	5	32
V	–	2	4	5	4	5	5	5	30
H	–	2	4	4	4	4	4	4	26

2. Unterrichtsstoff.

A. Rechnen.

(Sexta bis Quarta zeigen nur unwesentliche Abweichungen vom Gymnasiallehrplan).

Unter-Tertia.

a) Zusammengesetzte Regeldetri mit direkten und indirekten Verhältnissen.
b) Kettensatz.
c) Warenrechnung.
d) Gewinn- und Verlustrechnung, Zins-, Diskontrechnung.
e) Zinseszins- und Terminrechnung.
f) Geldkurse.
g) Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben.

LJ fehlt e und f. V fehlt f, hinzugefügt: Mischungsrechnung. H kein Rechenunterricht.

Ober-Tertia.

a) Wechselrechnung.
b) Staatspapiere und Aktien.
c) Konto-Korrente.
d) *) Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben.

V und H Rechenunterricht fehlt.

Unter-Sekunda.

a) Fakturen.
b) Verkaufsrechnung.
c) Kalkulationen.
d) *) Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben.

Der Unterricht fehlt LJ, B, V. In Hamburg (fak.) Zinsrechnung, Geldumrechnung, Diskontrechnung, hies. Wechsel, Platzwarenrechnung, Einkaufs-, Verkaufs- und Frachtrechnung.

B. Arithmetik und Algebra.

Quarta.

Einführung in die arithmetische Sprache.

Unter-Tertia.

a) Einführung der relativen Zahlengrößen.
b) Die vier Grundrechnungsarten in allgemeinen Zahlen.
c) Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

LJ fügt hinzu: Proportionen, Ausziehen von Quadratwurzeln, V Anwendungen von c) auf bürgerliche Rechnungen.

Ober-Tertia.

a) Proportionen.
b) Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.
c) Wurzeln.
d) Berechnung der Quadratwurzeln.
e) Berechnung der Kubikwurzeln.
f) Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten.
g) Rein quadratische Gleichungen.

LJ a) s. U III, e) fortgelassen, gemischt, quadratische Gleichungen hinzugefügt. B e), g) fortgelassen, f) auf eine Unbekannte beschränkt. V. wie LJ. H nur d) und f).

Unter-Sekunda.

a) Quadratische Gleichungen.
b) Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten.
c) Einführung in die Logarithmen und ihren Gebrauch.

LJ b) s. O III, hinzugefügt: arithmetische und geometrische Reihen. B. b), c) fehlt, hinzugefügt O III f. V zu a hinzugefügt „mehrere Unbekannte". H aus dem Pensum der O III: b), c), hinzugefügt: Zinseszins und Rentenrechnung, einfache Systeme quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Ober-Sekunda.

a) Arithmetische Reihen erster Ordnung.
b) Geometrische Reihen.
c) Zinseszins- und Rentenrechnung.
d) Exponentialgleichungen.
e) Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.
f) Quadratische Gleichungen mit imaginären Wurzeln.

LJ d) fehlt, komplexe Zahlen hinzugefügt. V wie LJ. H d) und f) fehlt.

Unter-Prima.

a) Die komplexen Zahlen als Erweiterung des Zahlbegriffs und ihre Darstellung.
b) Der Moivresche Satz.
c) Gleichungen dritten Grades.
d) Diophantische Gleichungen.

LJ hinzugefügt: Maxima und Minima, graphische Darstellungen. Kombinatorik. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Ober-Prima.

a) Kombinationslehre.
b) Wahrscheinlichkeitsrechnung.
c) Der binomische Satz.
d) Differentialrechnung.
e) Größte und kleinste Werte.
f) Unbestimmte Form von Funktionen.
g) Arithmetische Reihen höherer Ordnung.
h) Einfache unendliche Reihen und Konvergenzuntersuchung.

LK d) fehlt. LJ hat a) bis c) in U I, g) fehlt. V fügt ausdrücklich Integralrechnung hinzu, g) fehlt. H fehlt g).

C. Geometrie.

Quinta (nur LJ).

Veranschaulichung der geometrischen Grundbegriffe. Gerade Linien. Winkel, Kreis, Parallelen. Leichte Konstruktionsaufgaben.

Quarta.

Lehre von den Geraden, Winkeln, Dreiecken und Vierecken.

Unter-Tertia.

Kreislehre. Konstruktionsübungen.

LK und LJ dazu Inhaltsgleichheit und Ausmessung der Figuren, Proportionalität der Strecken. B. fügt hinzu: regelmäßige Polygone, Gleichheit der Figuren, Elemente

der mathematischen Geographie und Astronomie: Orientierung am Himmel, die wichtigsten Sternbilder, scheinbare tägliche Bewegung des Himmelsgewölbes, Bewegung der Sonne, des Mondes und der Planeten unter den Fixsternen. In V. kommt Flächengleichheit hinzu. H. wie LJ.

Ober-Tertia.

a) Flächengleichheit.
b) Ausmessung geradliniger Figuren.
c) Proportionalität der Strecken.
d) Ähnlichkeit.
e) Konstruktionsaufgaben.

LK, LJ, V und H gehen bis zur Kreisberechnung. B hat a in U III erledigt, fügt Ähnlichkeit hinzu, und aus der Astronomie: Bestimmung der Mittagslinie mit der Magnetnadel, Entstehung der Jahreszeiten, die Wendekreise, Äquinoktien, Sostitien, Phasen des Mondes.

Unter-Sekunda.

LK. Wiederholungen und Ergänzungen zur Planimetrie, Sätze und Aufgaben aus der algebraischen Geometrie. Zeichnung der einfachen körperlichen Gebilde in schräger Parallelprojektion, Berechnung von Kanten, Oberfläche und Rauminhalt. Die trigonometrischen Funktionen zunächst am rechtwinkligen Dreieck, Sinussatz und Kosinussatz.

LJ. Stereometrie bis zur Berechnung von Inhalt und Oberfläche der Kugel. Elemente der Trigonometrie.

B. Berechnung des Kreises. Konstruktionsaufgaben. Anfangsgründe der Trigonometrie und Berechnung von Dreiecken. Stereometrie: Anleitung zum perspektivischen Zeichnen räumlicher Gebilde. Die einfachen Körper nebst Berechnung von Kantenlängen, Oberflächen, Inhalten. Mathematische Geographie und Astronomie: Gestalt und Größe der Erde, geographische Ortsbestimmung, Entfernung der Sonne und des Mondes von der Erde, Kopernikanisches Weltsystem.

V und H wie LJ.

Ober-Sekunda.

LK. Harmonische Punkte und Strahlen, Polaren, Transversalen, Ähnlichkeitspunkte und -achsen, Potenzlinien. Goniometrie und ebene Trigonometrie mit Übungen im Freien. Ausführliche Behandlung der Stereometrie. Von der darstellenden Geometrie die rechtwinklige Projektion.

LJ. Einige Kapitel der neueren Geometrie. Abschluß der Trigonometrie und Stereometrie.

V. wie LJ.

H. Planimetrie: Harmonische Punkte und Strahlen. Ähnlichkeitspunkte. Chordalen. Apollonische Berührungsaufgaben. Schwierigere Konstruktionsaufgaben.

Stereometrie: Sätze über Ecken. Eulers Polyedersatz. Zahl und Arten der regelmäßigen Körper. Volum und Oberfläche von Kugelteilen. Schwierigere Aufgaben.

Ebene Trigonometrie: Erweiterung der Goniometrie und Verwendung der Formeln zur bequemeren Auflösung schiefwinkliger Dreiecke.

Sphärische Trigonometrie: Die vier Fundamentalsätze und ihre Anwendung auf stereometrische und astronomische Aufgaben.

Unter-Prima.

LK. Erweiterung der ebenen Trigonometrie mit Übungen im Gelände. Sphärische Trigonometrie und ihre Anwendungen auf die mathematische Erdkunde, Nautik und Astronomie. Kartenprojektionen. Schwierigere geometrische Konstruktionen und Berechnungen. Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlung.

LJ. Stereometrie II. Teil und sphärische Trigonometrie. Einleitung in die analytische Geometrie der Ebene, insbesondere der Kegelschnitte.

V. Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Einführung in die projektive Geometrie einschließlich der Erzeugung der Kegelschnitte

H. Kegelschnitte in planimetrischer und projektiver Behandlung.

Ober-Prima.

LK. Analytische Geometrie der Ebene. Zentralprojektion.

LJ. Übungen aus dem Gebiete der sphärischen Trigonometrie. Anwendung der Differentialrechnung auf die Geometrie.

V. Sphärische Trigonometrie mit Anwendung auf mathematische Erdkunde. Analytische Geometrie der Ebene. Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.

H. Analytische Geometrie der Ebene. Anwendung der Differentialrechnung auf die Kurvenlehre.

Reifeprüfungsaufgaben.

Hamburg, Herbst 1907.

a) Geometrie der Lage: Die beiden Hauptscheitel A und A_1 einer Ellipse sind mit dem einen Nebenscheitel B verbunden; auf diese Verbindungslinien BA und BA_1 sind Lote gefällt aus den Punkten D und D_1, in denen eine bewegliche Ellipsentangente die Tangenten der Scheitel A und A_1 schneidet. Es soll gezeigt werden, daß der Schnittpunkt Δ dieser Lote auf einer Hyperbel liegt, von der die in A und A_1 auf BA und BA_1 errichteten Lote die Asymptoten sind.

b) Analytische Geometrie: Gegeben ist eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt O und eine in der Entfernung c von O auf der Hauptachse senkrecht stehende Gerade s; die Polare eines in s liegenden Punktes P_1 schneidet den Durchmesser OP_1 in Δ. Welches ist der Ort für Δ, wenn P_1 sich in s bewegt?

c) Kubische Gleichung: Um die spezifischen Wärmen von Kupfer und Blei zu vergleichen, will man zwei Körper von gleicher Ober-

fläche und gleichem Gewicht herstellen. Da ein geeigneter Bleikörper, der aus einem Zylinder und zwei seinen Endflächen aufgesetzten Halbkugeln besteht, vorhanden ist, so muß man noch einen ähnlich gestalteten Kupferzylinder herstellen, der wie der Bleikörper das Gewicht $p = 162\,\pi\, g$ und die Oberfläche $O = 27\,\pi\,\text{cm}^2$ hat. Wie groß sind Radius und Höhe des an seinen Enden abgerundeten Kupferzylinders zu wählen, wenn das spezifische Gewicht des Kupfers $9\,g\,\text{cm}^{-3}$ ist?

d) Differentialrechnung: Die Kurve $y\,r^2 = \frac{4}{3}\,x\,(r^2 - \frac{1}{4}\,x^2)$ hat einen Wendepunkt, einen höchsten und einen tiefsten Punkt. Man soll die Koordinaten dieser drei Punkte angeben und die Kurve zeichnen.

Sonderaufgaben.

a) Die erste Aufgabe analytisch-geometrisch zu lösen.
b) Die zweite Aufgabe rein-geometrisch zu lösen.
c) Die van der Waalssche Zustandsgleichung $R\,\Theta = (p + \frac{a}{v^2})\,(v - b)$ stellt, wenn p konstant ist, die absolute Temperatur Θ als Funktion des Volumens v dar. Für welchen Wert von v hat die sich ergebende Kurve eine Wendetangente? Welchen Wert muß p haben, damit diese Wendetangente der Volumenachse parallel ist?

III. Oberrealschule.

1. Stundenzahl.

A. Rechnen.

	VI	V	IV	U III	O III	U II	Sa
Bremen . . .	5	5	3	2	—	—	15
Hamburg . .	5	4	2	1	1	1	14

B. Mathematik.

	IV	U III	O III	U II	O II	U I	O I	Sa
Bremen . . .	3	4	5	5	5	5	5	32
Hamburg . .	2	5	5	5	5	5	5	32

2. Unterrichtsstoff.

A. Rechnen.

a) Allgemeines Lehrziel.

Sicherheit und Gewandtheit im mündlichen und schriftlichen Rechnen mit bestimmten Zahlen und Anwendung des Rechnens auf die gewöhnlichen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens.

b) Lehraufgaben.

VI. 5 St. Die Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen, unbenannten und benannten. Die deutschen Maße, Gewichte und Münzen nebst Übungen in der dezimalen Schreibweise und den einfachsten dezimalen Rechnungen. Zeitrechnung. Leichte Regeldetriaufgaben. Kopfrechnen hier wie auf den folgenden Stufen.

V. 4 St. Teilbarkeit der Zahlen. Die vier Grundrechnungsarten mit gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen, Verwandlung der einen Bruchart in die andere. Anwendung der Brüche auf die Rechnung mit benannten Zahlen, wieder mit besonderer Berücksichtigung der deutschen Maße, Gewichte und Münzen.

IV. 2 St. Zusammengesetzte Regeldetri mit geraden und umgekehrten Verhältnissen.

U III. 1 St. Prozent- und Teilungsrechnung. Wiederholung aus früheren Pensen. Ergänzung und Vervollständigung durch Aufgaben aus der Mischungs- und Terminrechnung.

O III. und U II je 1 St. Die in dem Pensum von Klasse U III aufgeführten Gebiete sind wiederholend, ergänzend und erweiternd zu behandeln. Insbesondere ist das kaufmännische Rechnen zu üben.

B. Mathematik.

a) Lehrziel.

Kenntnis der Elementarmathematik und Bekanntschaft mit den Grundlehren der analytischen Geometrie der Ebene, der Differential- und Integralrechnung.

b) Lehraufgaben.

IV. 2 St. Die Lehre von der geraden Linie, den Winkeln, Dreiecken und Parallelogrammen.

U III. 5 St. Arithmetik: Die Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlengrößen. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und Anwendung derselben auf eingekleidete Aufgaben.

Planimetrie: Die Kreislehre. Flächengleichheit und Flächeninhalt geradliniger Figuren. Konstruktionsaufgaben.

O III. 5 St. Arithmetik: Die Lehre von den Proportionen, den Potenzen und Wurzeln. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Einfache quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.
Planimetrie: Ähnlichkeitslehre. Proportionalität gerader Linien am Kreise. Regelmäßige Vielecke. Kreisumfang und -inhalt. Konstruktionsaufgaben.

U II. 5 St. Arithmetik: Die Lehre von den Logarithmen. Quadratische Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen erster Ordnung. Zinseszins- und Rentenrechnung.

Trigonometrie: Grundlagen der Goniometrie. Einfache Dreiecksberechnungen.

Stereometrie: Die einfachen Körper und ihre Berechnung.

O II. und I. je 5 St. Abschluß der Arithmetik und Algebra: Kombinatorik, binomischer Lehrsatz, Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf einfache Aufgaben aus der Versicherungsrechnung; quadratische, kubische und diophantische Gleichungen.

Erweiterung und Vertiefung der Planimetrie, der ebenen Trigonometrie und der Stereometrie; sphärische Trigonometrie, mathematische Erdkunde und Astronomie.

Analytische Geometrie der Ebene.

Grundlehren der Infinitesimalrechnung für Funktionen einer unabhängigen Variabeln und Anwendung auf Aufgaben über größte und kleinste Werte, aus der Reihenlehre, der Geometrie und Physik.

Bemerkungen: Obiges sind die amtlichen Lehrpläne für Hamburg. Die Oberrealschule in Bremen ist bei der Bearbeitung neuer Lehrpläne und diese waren noch nicht im Druck erschienen. Die Verteilung des Stoffes in den Oberklassen ist in Hamburg den einzelnen Anstalten überlassen. Hier folgt eine solche Verteilung:

O II. Vertiefung und Erweiterung der Trigonometrie und Stereometrie. Sphärische Trigonometrie mit Anwendung auf terrestrische und astronomische Aufgaben. Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten. (Fakultativ: diophantische Gleichungen).

U I. Anwendung der Algebra auf Geometrie. Analytische Geometrie der Ebene. (Fakultativ: Elemente der projektiven Geometrie.) Kombinatorik einschl. binom. Lehrsatz mit ganzen positiven Exponenten. (Fakultativ: Determinanten, Kettenbrüche.) Versicherungsrechnung. Komplexe Zahlen. Gaußische Zahlenebene. Kubische Gleichungen.

O I. Differentialrechnung für Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen. Anwendung auf größte und kleinste Werte, Reihenentwicklungen, unbestimmte Formen, Kurvendiskussionen. Elemente der Integralrechnung mit Anwendung auf Geometrie und Physik.

Reifeprüfungsaufgaben.

Bremen, Ostern 1909.

a) Welches ist der Ort für die Spitze A des Dreiecks ABC, wenn $BC = a$ (10) cm und die Höhe auf a mittlere Proportionale zur Summe und Differenz der beiden anderen Seiten ist?

b) Die Funktion $y = x^3 - 9x + 28$ soll bezüglich ihrer Wurzel und Extremwerte, sowie etwaiger Wendepunkte untersucht werden.

c) Von einer Ellipse sind drei Punkte, in zweien derselben die Tangenten gegeben. Sie ist zu zeichnen.

d) In welchem Punkte schneiden sich die durch die Gleichungen $x + y + z = 9$, $x + 2y + 3z = 14$, $x + 3y + 6z = 20$ dargestellten Ebenen? Die Aufgabe ist auch an einer in Normalprojektion (oder Schrägprojektion) ausgeführten Figur zu deuten.

Hamburg Herbst 1907 (an einer der vier Oberrealschulen gestellt).

a) Durch eine Einlage von 6000 Mark erwirbt ein 30jähriger Mann eine Todesfallversicherung. Wie hoch ist dieselbe bei Annahme 4 prozentiger Verzinsung auf Grund der Schubertschen Tafel der diskontierten Lebenszahlen? Welches Lebensalter müßte der Mann erreichen, damit seinen Erben die gleiche Summe von einer Sparkasse ausgezahlt würde, bei der die 6000 Mark zu $3^1/_4$ % zu dem Zeitpunkt des Vertragsabschlusses angelegt worden wären?

b) Welche regelmäßigen sphärischen Vielecke lassen sich aus gleichseitigen Dreiecken zusammensetzen und wie groß sind die Radien der inneren und äußeren Berührungskreise dieser Vielecke?

c) Die erste Polare der Kurve $2x^3 + 2x^2 - 8x - y + 8 = 0$ in bezug auf den Nullpunkt ist zu zeichnen und zu beschreiben, auch sind die Schnittpunkte dieser Polaren mit der Abszissenachse und die Tangenten an sie in diesen Punkten zu bestimmen.

d) Welchen Wert hat die Differenz

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{\cos x}\, dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\sin x}\, dx ?$$

Sonderaufgaben.

a) Gesucht ist der geometrische Ort der Spitze eines Dreiecks, von welcher die Grundlinie $2c$ und das Produkt der Schenkel p^2 gegeben ist.

1) Welche Gestalt nimmt dieser geometrische Ort an, je nachdem p größer oder kleiner als c oder ihm gleich ist?
Zahlenbeispiel für die Skizzen: $c = 3$.

$$p_1 = 2\sqrt{2},\ p_2 = \sqrt{10},\ p_3 = 3.$$

2) In welchem Fall tritt ein Doppelpunkt auf und welche Tangenten hat dieser Punkt?

3) Die ersten Polaren des unendlichen fernen Punktes der Grundlinie des Dreiecks und des unendlich fernen Punktes des Mittellotes auf der Basis sowie der Mitte der Basis in bezug auf den geometrischen Ort sind zu bestimmen, ihre Bedeutung für die Kurve anzugeben und eine Skizze für die Zahlenwerte $c = 3$ und $p = 2\sqrt{2}$ zu entwerfen.

b) Das folgende bestimmte Integral ist zu berechnen.

$$\int_{b:c}^{(b + \sqrt{b^2 + ac}) : c} \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - cx^2}}$$

2. Eingeführte Lehrbücher.*)

a) Rechenbücher.

An einer größeren Anzahl von Anstalten sind die Bücher von Westrick u. Heine und von Müller u. Pietzker eingeführt, mehrere brauchen das Lübeckische Rechenbuch, vereinzelt finden sich Särchinger u. Estel, Löbe-Peter, Buchenau, Loebnitz. Für kaufmännisches Rechnen werden daneben Rösler u. Wilde und das Hamburgische Schulrechenbuch benutzt.

b) Arithmetik.

Fast allgemein ist Bardey-Pietzker eingeführt, daneben kommen als Aufgabensammlungen Müller-Kutnewsky, Schubert-Schumpelick, Schultze-Pahl, in Oberklassen auch Martus und Dölp-Netto (Differential- und Integralrechnung) vor. Als Lehrbücher treten Bork-Nath, Kambly, Schwab-Lesser, Reidt, Mehler-Schulte Tigges, H. Müller auf.

c) Geometrie.

Für Planimetrie sind mehrfach im Gebrauch: Lackemann, M. Schuster, Kambly, Mehler-Schulte Tigges, Bork-Crantz-Haentzschel, Spieker, vereinzelt Hercher, Borth, Bork-Nath, Holzmüller, Müller-Kutnewsky, Schwab-Lesser, Thieme.

Für Trigonometrie und Stereometrie sind Lackemann, Bohnert und Reidt besonders zu nennen. Die analytische Geometrie ist in einigen der obigen Bücher vertreten, gesondert werden erwähnt Gandtner-Gruhl und Kambly-Röder, Lange-Zühlke, synthetische Geometrie der Kegelschnitte, und Böger, Geometrie der Lage, werden benutzt, wo diesen Abschnitten mehr Zeit gewidmet werden kann. Für darstellende Geometrie wird J. Schröder benutzt, ohne amtlich eingeführt zu sein.

d) Logarithmentafeln.

Die vier- und fünfstelligen Tafeln halten sich ziemlich in der Verbreitung das Gleichgewicht, in den Realschulen und Oberrealschulen überwiegen die ersteren, meist in der Schülkeschen Ausgabe, daneben in der von Schubert oder in der Mehlerschen. Die fünfstelligen von August, Greve und Schlömilch treten wiederholt, die von Wittstein vereinzelt auf. In einzelnen Anstalten werden die Rechenstäbe von Dennert u. Pape, Faber und Nestler zum Teil unter völligem Zurücktreten der Logarithmentafeln in den Oberklassen benutzt.

*) Alles Nähere ist zu ersehen aus Heft 1 dieses Bandes: W. Lietzmann, Stoff und Methode des mathematischen Unterrichts der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher.

e) Urteile über die Lehrbücher.

Nur in wenigen Fällen ist ein Urteil über die praktische Bewährung eines Buches abgegeben; sehr häufig erklären die Herren Mathematiker ihre völlige Zufriedenheit, öfter mit dem charakteristischen Zusatz, daß sie das Buch nie gebrauchen.

Gegen die Lübeckischen Rechenhefte, Westrick u. Heine, Borck-Crantz-Haentzschel, Holzmüller, Kambly u. Spieker werden vereinzelt, gegen Schuster mehrfach und gegen Bardey starke Bedenken geäußert. Außer den an andrer Stelle eingeführten Büchern, z. B. Schwab-Lesser, Böger, Bohnert, Kambly, Schülke werden Behrendsen-Götting, H. A. Wagner, Heis-Druxes empfohlen.

f) Benutzung der Lehrbücher.

Die Ansichten über die Benutzung der Lehrbücher durchlaufen alle Schattierungen von der grundsätzlichen Verwerfung selbst einer Aufgabensammlung bis zu der Forderung strengsten Anschlusses an den Wortlaut des Buches, nicht nur bei den Sätzen sondern auch bei den Beweisen. Zwischen diesen Extremen hat sich eine starke Majorität aber darüber geeinigt, daß die häuslichen Aufgaben stets, die in der Schule zu lösenden meist dem Buch entnommen werden. Ebenso wird in der Geometrie das Lehrbuch zur Repetition fast durchweg empfohlen, die Benutzung bei der Durchnahme wird meist ausgeschlossen, nur die einzuprägenden Sätze werden öfter schon in der Stunde im Buch nachgelesen.

Ein treffendes Bild von den verschiedenen Anschauungen geben folgende Äußerungen.

1. „Die Entwicklungen der Lehrbücher sind weder für den Lehrer noch für den Schüler bindend. Beim Anfangsunterricht in der Geometrie ist das Lehrbuch überhaupt entbehrlich, weil es für den geistigen Standpunkt der Schüler meist zu hoch ist." K. (Bremen).

2. „Beim Anfangsunterricht halte ich es für wesentlich, daß sich die Darbietung, die natürlich ohne Buch vorzutragen bzw. aus dem Unterricht zu entwickeln ist, eng an das eingeführte Buch anschließt, um bei den Schülern, die das Buch zu Hause benützen sollen, keine Verwirrung hervorzurufen. Die Gefahr des geistlosen Auswendiglernens halte ich nicht für so groß; auch ist letzteres im Unterricht leicht festzustellen." H. (Bremen).

3. „Im Unterricht entwickele ich den neuen Stoff zunächst an der Tafel und benutze dabei die im Lehrbuch gebrauchten Bezeichnungen lasse es aber geschlossen. Erst nach eingehender Durchnahme gehe ich an der Hand der Bücher den Stoff nochmals durch und lasse, wenn nötig, kurze Notizen hinzusetzen, die den Schüler bei der häuslichen Arbeit unterstützen." D. (Hamburg).

4. „Es kommt sehr auf den Stoff an und die Befähigung der Schüler. Wenn es irgend geht, vermeide ich es überhaupt, das Buch im Unter-

richt zu verwenden und gebe nur eine Anleitung zum häuslichen Gebrauch in der (Geometrie). In der Arithmetik wähle ich aus dem Buche meist die Aufgaben für die Behandlung im Unterricht aus, welche im Kopf zu lösen sind. Die Schüler haben dann das Buch vor sich. Die schwierigeren Aufgaben werden schriftlich zu Hause gerechnet."
D. (Bremen).

5. „Innerhalb einer Schule ist das Mindestmaß des durchzunehmenden Lehrstoffes festzulegen und zwar für die Unterstufe im Anschluß an ein Lehrbuch. Für die höheren Klassen muß dem Lehrer eine mit der Unterrichtsstufe fortschreitende größere Freiheit gewährt werden, immer vorausgesetzt, daß das Mindestmaß erreicht wird." B. (Hamburg).

6. „Ein Lehrbuch halte ich nur dann für brauchbar, wenn es nichts weiter enthält als den durchzunehmenden Stoff in kurzer, klarer Darstellung ohne jeden Hinweis darauf, wie der Stoff durchgenommen werden kann. Denn sonst wird das Buch, will man es überhaupt benutzen, zum Vormund des Lehrers. Und es gibt sicher sehr viele Methoden, die zum Ziel führen. Ich halte es sogar für gut, denselben Stoff nicht jedesmal, wo man ihn durchzunehmen hat, nach derselben Methode durchzunehmen." J. (Hamburg).

7. „In den oberen Klassen lasse ich gelegentlich, namentlich wenn die Zeit knapp ist, einen kleinen Abschnitt, dessen Inhalt nach dem im Unterricht Vorhergegangenen und nach der Darstellungsweise der Lehrbücher leicht verständlich ist, von den Schülern selbständig zu Hause vorbereiten und in der Stunde darüber berichten." L. (Hamburg).

8. „Lehrbücher benutze ich so wenig wie möglich. Ich meine, sobald einem Lehrer der in der Klasse zu behandelnde Stoff bekannt ist, soll er sich mühen, diesen Stoff ganz gemäß seiner Individualität pädagogisch auszuarbeiten, sich nicht an den, von einem anderen im Lehrbuch vorgeschriebenen, Gang binden. Erst so kommt rechtes Leben in seine Methode. Die tausend Kleinigkeiten der Darstellung, die im Unterricht dem Schüler einen Satz interessant und lieb machen, können nicht im Lehrbuch stehen, bedeuten aber nahezu alles. Aus sich heraus soll der Lehrer schöpfen. Daß er natürlich trotzdem aus Zeitschriften, im Verkehr mit Fachgenossen vieles lernen kann, ist selbstverständlich." H. (Hamburg).

9. „In der Schule ist es mir gar nicht um Lehrbücher, sondern vielmehr um Übungsbücher zu tun. Mit Lehrbüchern habe ich mich nie befreunden können." · G. (Hamburg).

10. „Jedes neue Lehrbuch habe ich möglichst genau dadurch kennen zu lernen versucht, daß ich seine Methode vorurteilslos im Unterricht verwandte. Ich habe immer dabei gelernt, die Schüler manchmal."

11. „Ich benutze die Lehrbücher so, daß jedes Diktieren möglichst vermieden wird." H. (Lübeck).

12. „In der Geometrie halten sich die Schüler außer der allgemeinen Kladde noch zwei Hefte, eins für Lehrsätze, eins für Konstruktionen.

Der Wortlaut der Lehrsätze wird von mir in knapper Form diktiert, worauf der Beweis unter tätiger Mitarbeit der Schüler an der Tafel geführt wird. Beim Beweise erstrebe ich Anschaulichkeit, aber ohne die präzise mathematische Schlußfolgerung darunter leiden zu lassen. Das Denken darf nicht schablonenhaft werden! Deshalb vermeide ich auch die Benutzung des Lehrbuches, weil der Schüler im Hause leicht den Beweis ohne tieferes Verständnis auswendig lernt (Exempla docent!). Im Hause wird der Beweis von den Schülern im Lehrsatzhefte ausgearbeitet (mit Angabe der Gründe) und in der nächsten Stunde wiederholt. Konstruktionen werden ähnlich ins Konstruktionsheft eingetragen. Den Schülern macht die Anfertigung eigener Lehr- und Repetitionshefte sehr viel Vergnügen." B. (Hamburg).

3. Verwendung von Apparaten und Modellen, ihre Herstellung durch Schüler.

Die Benutzung von Modellen wird ausnahmslos im stereometrischen Anfangsunterricht verlangt. Ebensowenig findet sie Widerspruch bei der sphärischen Trigonometrie, wenn auch hier meist nur eine schwarze Kugel benutzt wird, und in der Darstellenden Geometrie.

In der Planimetrie stehen sich die Anschauungen schroff gegenüber. Die einen halten Modelle für ein unübertreffliches Hilfsmittel, die anderen, fast ebenso zahlreichen, für eine Anleitung zur Gedankenlosigkeit.

Daß Modelle vor den Schülern im Unterricht entstehen z. B. aus Stricknadeln und Korken oder aus Holzstäbchen und Plastilin, findet keinen Widerspruch; freiwillige Herstellung aus Pappe im Hause wird vielfach befürwortet, obligatorische meist verworfen. Die Mathematikstunden in Handfertigkeitsunterricht zu verwandeln, findet einige begeisterte Verehrer und einige entrüstete Gegner.

Von Zeichenapparaten werden beim mathematischen Unterricht fast ausnahmslos Wandtafelzirkel auch Stangenzirkel und Lineal, häufig ein rechtwinkliges Dreieck, bisweilen ein Ellipsenapparat (bestehend aus zwei senkrechten Schienen, in denen die verstellbaren Stifte eines Stangenzirkels laufen), öfter Schablonen der Kegelschnitte verwendet. Über Apparate bei Feldmeßübungen wird später zu sprechen sein.

Einige Äußerungen seien wörtlich angeführt:

1. „Apparate und Modelle sollen dem Schüler nicht die geistige Arbeit abnehmen, die zur Gewinnung einer mathematischen Einsicht notwendig ist. Wie bei einem Gebilde der Kunst oder Technik stets zuerst die Idee im Geiste des Erzeugers sich aufbaut und erst, wenn sie hier klare Gestalt gewonnen hat, stofflich verwirklicht wird, so suche man etwa bei der Erörterung einer geometrischen Konfiguration die Anschauung derselben erst entstehen zu lassen, entweder mit Hilfe

einer nach Angabe und unter Beteiligung der Schüler allmählich erwachsenden Zeichnung oder eines etwa aus Holzstäben im Laufe der Betrachtung ebenfalls erst entstehenden Modells. Auch übe man die Schüler darin, sich solche Konfigurationen einfacher Art ohne Zeichnung und Modell vorzustellen. Die Herstellung von Modellen durch die Schüler halte ich aus den angegebenen Gründen für sehr ratsam. Sie zwingt den Schüler dazu, sich alle Teile des herzustellenden Modells genau vorzustellen und lenkt seine Aufmerksamkeit erst auf Einzelheiten, die er ohne diesen Zwang vielleicht gar nicht bemerken würde." L.

2. „Die Benutzung guter Apparate und Modelle halte ich für unerläßlich; die Apparate und Modelle müssen aber groß und klar übersichtlich, sowie solid gebaut sein. In der Stereometrie, der ebenen Trigonometrie und Sphärik sowie auch in der Lehre von den Funktionen (inverse Funktion!) leisten gute Modelle einen so hervorragenden Dienst, daß die Schüler schon spontan nach einem Modell verlangen, wenn sie bei einer anderen Gelegenheit mit Hilfe eines geeigneten Modells einen klaren Einblick in die Materie gewonnen haben." S.

3. „Gegen die Herstellung von Apparaten und Modellen durch Schüler bin ich durchaus. Gerade sehr gut veranlagte Schüler besitzen oft gar keine Handfertigkeit und mühen sich ohne Interesse dabei herum, während für Schüler mit praktischer Anlage leicht eine zu intensive Lieblingsbeschäftigung mit der geistig nicht anstrengenden Arbeit entsteht." G.

4. „Ich suche möglichst ohne Modelle auszukommen, weil durch deren übermäßigen Gebrauch die Phantasie der Schüler leidet und die Raumanschauung nicht gefördert, sondern gehemmt wird." B (H.)

5. „Ich habe die Erfahrung gemacht, daß es Schüler gibt, die sich ohne Modell auch einfache räumliche Gebilde nicht vorstellen können." J.

6. „Gewiß sollen Apparate und Modelle, an denen und mit denen die Schüler das Messen von Strecken und Winkeln kennen und ausüben lernen sowie ihre räumlichen Anschauungen klären können, im Unterricht gebraucht werden. Doch darf in der an zweiter Stelle erwähnten Hinsicht ihr Wert nicht überschätzt werden. Apparate und Modelle sind oft nicht einfach genug und erscheinen dem gegenüber, was der Begriff fordert und die innere Anschauung zu bieten vermag, gar zu unvollkommen, ja zu roh. Das Zeichnen darf durch sie keinenfalls verdrängt oder auch nur eingeschränkt werden. Zu der Herstellung von Modellen usw. ist gelegentlich anzuregen. Dazu beanlagte Schüler werden dem entsprechen, andere dem gegebenen Beispiele folgen. Doch hüte man sich, darin zu weit zu gehen, da das zur Überbürdung führen und der Gesamtausbildung mehr schädlich als nützlich sein würde." M.

Verzeichnis der Apparate und Modelle der mathematischen Sammlung einer Oberrealschule.

A. Allgemeines.

28 logarithmische Rechenstäbe (Systeme: Dennert & Pape, Faber, Niedhammer, Nestler).
5 Stangenzirkel nach Dr. May (mit Zirkelschuhen).
15 Wandtafelzirkel mit Bügel.
20 rechtwinklige Dreiecke für die Wandtafel.
18 Wandtafellineale.
10 Wandtafeltransporteure.

B. Rechen-Unterricht.

Kubikdezimeter nebst Teilung.
Boppsche Tafel des metrischen Systems.
Kubikmeter, aus 12 Stäben zu je 1 m zusammengefügt.

C. Planimetrie.

Feuersteinsches Kreisberechnungs-Modell.
Modell zur Kreisberechnung. (S)*)
Modell zum Zerlegungsbeweis des Pythagoras (Felix Neustadt, Dresden-Niederlößnitz).
Planimetrischer Apparat „Universal" (Felix Neustadt).
Vernickelter Eisenrahmen (veränderliches Viereck).

D. Kegelschnitte.

2 Ellipsenzirkel. (S. und J. Dorn.)
Ellipsen-, Parabel-, Hyperbel-Schablone zum Gebrauch an der Wandtafel. (S.)
Modell zur Herstellung von Ellipsen als Projektion des Kreises. (S.)
Dasselbe mit konjugierten Durchmessern. (S.)
Großes Drahtmodell eines Kegels mit Schnittellipsen und Berührungskreisen der Dandelinschen Kugeln. (S.)

E. Kurvenlehre.

Winkeltrisektor aus Kupfer. (S.)
Stativ zur Drehung von Drahtmodellen um die Achse $x-y=o$. (S.)
Kurvenmodelle hierzu: Sinus (bezw. arc. sin). (S.)
Tangens (bezw. arctg), e (bezw. log nat). (S.)
Anzeiger für trigonometrische Funktionen (nach Grimsehl).
6 graphische Fahrpläne. (S.)
Cycloidenzeichner nach Graßmann von Schilling, Halle a. S.

F. Stereometrie.

Zerlegbare Modelle der 5 regulären Körper.
5 Sphenisken, 3 Obelisken, 5 Prismatoide.
Modell für die Volumberechnung der Kugel.
Drahtmodell eines Prismatoids zum Beweis der Volumformel. (S.)

*) (S) bedeutet nach Zeichnungen und Angaben des Herrn Direktor Dr. J. Schröder in Hamburg ausgeführt und von der allgemeinen Lehrmittelausstellung Hamburg, Steindamm 152, zu beziehen.

Drahtmodell eines schief abgeschnittenen Prismas. (S.)
Drahtmodell für die Zerlegung eines schrägen dreiseitigen Prismas in drei inhaltgleiche Pyramiden. (S.)
Drahtmodell eines Tetraeders mit eingeschriebenem Oktaeder. (S.)
Halbtetraeder (Drahtmodell). (S.)
Drahtmodell zum Beweis des archimedischen Satzes. (S.)
Hohlmodell zum Beweis des archimedischen Satzes. (S.)
Modell zum Beweis des Eulerschen Polyedersatzes. (S.)
Zerlegbarer Würfel. (Satz des Eudoxos.)
Drahtmodelle der regelmäßigen Körper. (S.)
Ecke mit Polarecke. (S.)
Sammlung von Celluloidplatten, Stäben und Schnüren zum Beweis der Sätze über Gerade und Ebenen.
Großes Modell für den Beweis des Senkrechtstehens einer Geraden auf eine Ebene. (S.)

G. Sphärische Trigonometrie.

Schwarze Kugel auf Stativ mit anlegbarem Messingkreis.
Drahtmodell eines sphärischen Dreiecks. (S.)
Drahtmodell eines sphärischen Dreiecks mit Polardreieck. (S.)
Drahtmodell zur Ableitung des Sinus- und Cosinus-Satzes. (S.)
5 Drahtmodelle zur Berechnung der Flächenneigungswinkel der regulären Körper. (S.)

H. Analytische Geometrie des Raumes.

Dreiachsiges Ellipsoid, einschaliges Hyperboloid.
Elliptisches Paraboloid, hyperbolisches Paraboloid.
Rotationsellipsoid, -paraboloid, -hyperboloid.
Volbers' Sphärometer.

J. Feldmeßkunde.

Theodolit.
3 Sextanten, 1 Oktant.
10 Fluchtstäbe zu 2,50 m.
2 Meßlatten zu 3 m.
2 Bandmaße zu 20 m. 1 Bandmaß zu 10 m.
Ring mit 10 Markierstäben.
2 Nivellierinstrumente.
1 Kreuzscheibe.
1 Doppelspiegelapparat für rechte Winkel.
3 zusammenlegbare Holzmaßstäbe zu 2 m.

K. Astronomie.

Weidtscher Himmelsglobus (Rosenbaum u. Horst, Berlin).
Universalapparat.
Große schwarze Kugel auf Stativ mit Gradnetz.

L. Darstellende Geometrie.

5 Modelle für verschiedene Projektionsarten (Schröder, Darmstadt).
Sammlung von hölzernen Vollkörpern (150 Stück).
Projektions-Tafel nach Schilling mit Zubehör.

4. Propädeutischer geometrischer Unterricht.

Durch die Lehrpläne ist ein gesonderter propädeutischer Unterricht in V nirgends vorgesehen, ebensowenig eine Zweistufigkeit des Geometrieunterrichts ausgesprochen. Ausdrücklich verworfen wird ein solcher Unterricht etwa an einem Drittel der Anstalten, ein zweites Drittel verwendet den Geometrieunterricht in IV stets anfangs, zum Teil $^1/_2$ bis $^3/_4$ Jahre auf Propädeutik und leitet dann allmählich zum wissenschaftlichen Unterricht über. Das letzte Drittel erklärt die Propädeutik für notwendig, erteilt in der IV nur solchen Unterricht und fordert zum Teil auch für die Folgezeit bei den einzelnen Abschnitten stets einen vorbereitenden anschaulichen und praktischen Kursus. Daß der Rechenunterricht für die allgemeine Arithmetik ähnliche Dienste zu leisten hat, wie der Anschauungs- und Zeichenunterricht für die Geometrie wird von dieser Kategorie besonders betont. Einige Stimmen erheben sich dafür, den Geometrieunterricht zugunsten des Rechnens bis nach U III zu verschieben.

Die Gründe für die verschiedene Stellungnahme ergeben sich aus folgenden Gutachten.

1. „Spezieller propädeutischer Unterricht, ohne das wahre Ziel im Auge zu haben, ist Zeitvergeudung." Ha. (H.)

2. „Da ich das klassische formale Beweisverfahren für die niedere Geometrie für unumgänglich halte, habe ich am Schluß des ersten Unterrichtsjahres in diese Methode übergeleitet. Gerade die hierbei gewonnene Erfahrung, wie schwer es zunächst dem Durchschnittsschüler ist, falsche oder nicht bindende Schlüsse zu vermeiden, hat mich die Überzeugung gewinnen lassen, daß es falsch ist, zu weitgehend die wissenschaftliche Methode durch geometrischen Anschauungsunterricht ersetzen zu wollen." Hi. (H.)

3. „Wenn unter propädeutischem Unterricht verstanden wird, daß man z. B. im Anfangsunterricht zur Erklärung der Grundbegriffe von den Körpern ausgeht, so sollte man m. E. in den meisten Fällen den propädeutischen Unterricht an den Haken hängen — und zwar an denselben Haken, an den die Grundsätze gehören. Ich habe es einmal erlebt, daß ein älterer Oberlehrer im Geometrieunterricht der Quarta mit den Grundsätzen noch nicht ganz fertig war, als ich bereits in der Parallelklasse das Pensum erledigt hatte." F. (B.)

4. „Im geometrischen (einschl. stereometrischen) Unterricht scheint es mir wichtig, alle Eigenschaften der Figuren, soweit möglich, aus der Anschauung zu entnehmen und im Anfang auf etwaige Beweise ganz zu verzichten. Es scheint mir besser, ein Schüler hält einen Satz deshalb für richtig, weil er ihm zufolge seiner Anschauung selbstverständlich erscheint, als weil er weiß, daß man ihn beweisen kann. Das gilt nach meiner Ansicht auch noch für die Oberstufe. Natürlich muß man aber allmählich auch zu strengen Beweisen übergehen." J. (H.)

5. „Der propädeutische Unterricht hat in technischer Beziehung die Aufgabe, den Schüler mit der Handhabung von Zirkel, Lineal und rechtem Winkel und der Herstellung einfacher exakter Zeichnungen (ev. auch der Herstellung einfacher Pappmodelle) vertraut zu machen. In stofflicher Beziehung soll er aus der unmittelbaren Anschauung und Fertigung körperlicher Gegenstände und gezeichneter Figuren die Kenntnis der grundlegenden Begriffe vermitteln und zur Auffindung einfacher Beziehungen verhelfen. Hat man die Klasse zu scharfem peinlich genauem Zeichnen angehalten, dann kann man auf diese Weise etwa in einem Jahr ein beträchliches Tatsachenmaterial zusammentragen, das zum Teil das Fundament, zum Teil das Baumaterial für das von dem anschließenden wissenschaftlichen Unterricht zu errichtende Gebäude bildet. Selbstverständlich wird der Übergang zu diesem wissenschaftlichen Unterricht ein allmählicher sein, d. h. man wird die Schüler nach und nach darauf achten lehren, daß zwischen verschiedenen durch Erfahrung gefundenen Tatsachen und Eigenschaften Beziehungen bestehen (etwa daß eine die Folge der andern ist). Auch das Bedürfnis nach einem Beweis für empirisch gefundene Eigenschaften muß allmählich geweckt werden. In gewissem Sinne wird der mathematische Schulunterricht bis in die obersten Klassen propädeutisch bleiben: Einmal kann er die in der Wissenschaft erreichbare Strenge so gut wie nirgends durchführen; dann aber ist es auch aus pädagogischen Gründen empfehlenswert, möglichst jedes Problem zuerst empirisch-propädeutisch zu behandeln und auch, nachdem man auf diese Weise ein vorläufiges Ergebnis gefunden hat, dessen Allgemeingültigkeit durch einen deduktiven Beweis festzulegen. Das letztere Verfahren hat auch den Vorteil, daß es sehr oft die geschichtliche Entwicklung nachbildet." L. (H.)

5. Anwendung der Mathematik. Praktische Übungen.

Eine erfreuliche Übereinstimmung herrscht bei allen Referenten über die Nützlichkeit der Anwendungen der Mathematik. Nur zwei Stimmen halten eine Warnung vor Übermaß für nötig, von vielen wird ausdrücklich verlangt, nur das in der Mathematik zu betreiben, was praktisch verwertbar ist, und auch in der Mathematikstunde physikalische und chemische Aufgaben rechnen zu lassen. Feldmessung, Astronomie, Nautik und Versicherungsrechnung sind die am häufigsten betonten Gebiete.

Praktische Übungen im Freien werden an $^2/_3$ aller Anstalten betrieben auch die übrigen stellen solche zum Teil in Aussicht. Nur wenige geben große Schülerzahl und Mangel an Zeit und an Instrumenten als Grund gegen solche an, einzelne auch unbefangen die erhebliche Mehrbelastung des Lehrers.

Ein Teil der Übungen wird im physikalischen Praktikum vorgenommen. Klassenunterricht im Freien wird besonders in IV, U II und O II betrieben. Einfache Übungen im Schulhof und am Schulgebäude dienen vielfach zum Ausgangspunkt der Geometrie. Das Feldmessen wird zum Teil ziemlich primitiv mit Metermaß und Transporteur ausgeführt, zum Teil aber auch mit allen Hilfsmitteln: Nivellierinstrument und Meßlatte, Fluchtstäbe, Meßketten, Markierstäbe am Ring, Theodolit, Sextant. Bei großen Klassen hat es sich als zweckmäßig erwiesen, zuerst an einer bekannten Strecke die Schrittlänge eines jeden Schülers festzustellen und ihm dann die Bestimmung der Winkel mit Hilfe von Armlänge und Millimetermaß zu zeigen. Infolge der Übung im Zeichenunterricht bringen es die Schüler hierin meist schnell zu überraschender Fertigkeit. Der logarithmische Rechenstab dient hier sowohl als Meßinstrument wie als Hilfsmittel, den Winkel sofort auf der Tangentenskala abzulesen. Hat man so die Möglichkeit, alle Schüler zu beschäftigen, geschaffen, so kann man mit Gruppen an die Einübung der einfachsten genaueren Messungen gehen. Dazu genügen einige Fluchtstäbe, eine Meßlatte, ein zweifach gebogenes Glasrohr zum Nivellieren und ein einfacher Sextant. Nützlich ist es, wenn mehrere Schüler das Edlersche Meßblatt oder den Ohmannschen Winkelmesser haben. Mit dem Theodolit wird man selten beim Klassenunterricht arbeiten können — eine Messung mit einem solchen ist allerdings wünschenswert. Die beiden Snelliusschen Aufgaben (Pothenot u. Hansen) gewinnen ein gewaltiges Interesse, wenn die Zahlen wirklich von den Schülern selbst durch Messung gefunden sind. An mehreren Anstalten, auch Gymnasien, wird dies Verfahren mit gewissen Modifikationen angewandt.

Sonnenhöhenbestimmungen werden vielfach gemacht, vereinzelt auch abends astronomische Beobachtungen angestellt; mehrere Schulen sind zu dem Zweck mit Plattformen ausgerüstet. Andere haben flache Dächer mit gemauerten Stativen für die Aufstellung von Fernrohren. Auch wenn exakte Höhenmessungen im Dunkeln nur selten gelingen, gewinnt der ganze Unterricht in der sphärischen Trigonometrie ein ungleich höheres Interesse, sobald die wichtigsten Sternbilder bekannt, die Standorte des Mondes an einigen aufeinanderfolgenden Tagen beobachtet, einzelne Planeten durchs Fernrohr gesehen sind.

Nicht wertlos ist es, daß verschiedene Referenten betonen, gerade durch die Umfrage zur Erweiterung der praktischen Übungen angespornt worden zu sein.

6. Stellungnahme zu den traditionellen Zielen und zu der üblichen Methode.

Die Frage: „Sind Sie mit den traditionellen Zielen, sowie mit der üblichen Methode des mathematischen Unterrichts einverstanden?“ beantwortet ein jüngerer Oberlehrer dahin: „Die traditionellen Ziele und

die übliche Methode sind für mich im wesentlichen gleichbedeutend mit denjenigen der modernen Reformbewegung, da ich als Schüler auf der Oberstufe bereits einen Unterricht genoß, der entsprechende Forderungen anbahnte." (Z. Hamburg) Aus einer anderen Hansestadt wird geantwortet: „Als übliche Methode des mathematischen Unterrichts sehe ich die an, bei der man, von der Anschauung und Erfahrung ausgehend, zunächst möglichst induktiv vorgeht, später die Schüler zum deduktiven Verfahren, recht zeitig auch zur Selbstätigkeit führt. Mit ihr bin ich durchaus einverstanden."

Solche und ähnliche Äußerungen beweisen, daß die ältere „übliche Methode" in den Hansestädten kaum noch bekannt ist. Ein deduktiver, dogmatischer, vortragender Unterricht ist seit einem Menschenalter hier verschwunden. Ebenso lange ist es selbstverständlich, daß auf den Gymnasien analytische Geometrie recht gründlich, auf den Realgymnasien außerdem Infinitesimalrechnung getrieben wird. Es ist das eine natürliche Folge der großen Freiheit, die traditionell den Mathematiklehrern in bezug auf die Methode gelassen wird, und der Weitherzigkeit der Lehrpläne besonders für die Oberklassen. Auch ist es ein Vorzug der verhältnismäßig kleinen Stadt-Staaten, daß gute Ideen sich rascher verbreiten, Neuerungen in so leicht übersichtlichen Verhältnissen leichter gestattet und auf ihren Wert hin praktisch erprobt werden können. Von besonderem Wert ist es gewesen, daß die Unterrichtsverwaltungen — wie auch anderswo — selbst aufs eifrigste jeden guten Gedanken, der innerhalb und außerhalb des Gebietes auftrat, aufgenommen, empfohlen und gefördert haben. Die von Göttingen ausgegangene Reformbewegung fand in den Hansestädten einen so vorbereiteten Boden, daß sie noch ehe die Meraner Vorschläge erschienen, schon vielfach in die Tat umgesetzt war. So bedeuten eben die Ziele und Methoden der Unterrichtskommission für die Hansestädte die traditionellen und die üblichen, und die Mehrzahl der Referenten versichern deshalb ihr lebhaftes Einverständnis. Wo sich Widerspruch erhebt, ist es bereits das Rückfluten dieser Welle, richtet er sich gegen Übertreibungen dieser Bewegung. So wird dagegen protestiert, daß alle Gleichungen nur graphisch gelöst werden, daß der ganze Geometrieunterricht nur Anschauungsunterricht wird, daß die Schüler überhaupt nicht mehr logische Beweise kennen lernen, alles Dinge, die nicht den maßvollen Meraner Vorschlägen, sondern einigen allzu eifrigen Neuerern vorgeworfen werden können.

Da die wesentlichen Punkte in dem folgenden Abschnitt zu behandeln sind, sei hier von einzelnen geäußerten Wünschen Abstand genommen. Nur eine Äußerung allgemeiner Natur finde hier Platz: „Ich wünsche im allgemeinen auch für den mathematischen Unterricht engere Grenzen des zu bearbeitenden Gebietes, auf diesem aber, unter Nichtbeachtung alles Nebensächlichen, gründliche Arbeit, durch die der Schüler mit dem Arbeitsfelde vertraut und zu selbständiger Tätigkeit befähigt wird.

Wird der Unterrichtsgegenstand nur durchgenommen, von außen betrachtet und kennen gelernt, nicht zum Eigentum des Schülers gemacht, das er einigermaßen beherrscht und das ihn darum näher angeht, so bleibt der erreichte Nutzen wahrlich recht gering. Sollen die Grenzen im mathematischen Unterricht im allgemeinen enger als bisher gehalten werden, so schließt das nicht aus, daß sie hier und da auch zu erweitern sind". M. (Lübeck).

7. Stellung zu den Reformbestrebungen, insbesondere zu den Vorschlägen der Unterrichtskommission.

a) Einschränkung der formalen Operationen der Algebra.

Von den abgegebenen Stimmen sind die Hälfte unbedingt für Einschränkung der formalen Operationen, ein Viertel rät zur Vorsicht, ein Viertel ist direkt dagegen. Es finden sich sogar Mathematiker, denen selbst die Bardeysche Aufgabensammlung nicht genügenden Wert auf formale Operationen legt. Unter den bedingten Voten verdienen besonders die Beachtung, die eine weitschauende Auswahl der Aufgaben wünschen. Solche formalen Operationen, die auf spätere Stufe unbedingt gebraucht werden, sollen schon möglichst frühzeitig geübt werden. An Einzelheiten werden aufgeführt: abgekürzte Division durch $x - \alpha$, Zerlegen in Teilbrüche, Absondern von Quadraten. Andere wünschen möglichst frühen Beginn der Gleichungen und zwar mit Zahlen, um die Rechenfertigkeit dauernd zu erhalten. Daß negative und gebrochene Exponenten nicht ganz fehlen dürfen, ist klar, im allgemeinen brauchen aber nur Zahlen als Exponenten verwandt zu werden. Vor breitem Eingehen auf allgemeine Logarithmensysteme wird gewarnt, Kubikwurzeln mehrfach ausdrücklich verworfen. Mit Recht warnt eine Stimme: „Wir müssen uns hüten, daß die Mathematik nicht als formaler Kram verschrien werden kann." K.

b) Behandlung des Funktionsbegriffes.

Die allgemeine Stimmung wird durch folgende Äußerung gekennzeichnet: „Nach meinen Erfahrungen ist die Behandlung des Funktionsbegriffes im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht der höheren Schulen durchaus nicht neu, es sollte daher nicht, wie es oft geschieht, die Einführung in ihn, sondern nur eine stärkere Betonung und frühzeitige Einführung als Ziel der Reformbestrebungen bezeichnet werden."

Tatsächlich hat sich auch nur ein Referent ganz ablehnend verhalten, einer will erst in Prima davon sprechen, einige an Gymnasien erst in Obersekunda. Die übrigen verlangen ihn kategorisch mit dem Beginn der Trigonometrie, und nur vereinzelt werden hier Bedenken gegen graphische Darstellung erhoben („die Schüler verlernen ganz das

Rechnen"). Die Mehrheit möchte allerdings nicht vor O III bei den Systemen linearer Gleichungen die graphische Darstellung sehen, manche allerdings schon in U III. Einige verlangen, daß der Funktionsbegriff schon in Quinta eingeführt wird. Eine gute Vorstellung des Betriebs in den Mittelklassen gewinnt man aus der Programmabhandlung von J. Schröder (Ostern 1909). Daß trotz graphischer Darstellung die Sache selbst unklar bleiben kann, ist richtig, trifft aber wohl mehr den Lehrer als das Verfahren. Schwer verständlich ist die stellenweise Animosität gegen die graphische Darstellung bei solchen, die trotzdem den Funktionsbegriff frühzeitig und gründlich einführen wollen.

„Die Einführung in den Funktionsbegriff gewinnt eine wesentliche Stütze, wenn der physikalische Unterricht mit dem mathematischen Hand in Hand geht. Die physikalischen Vorgänge fordern geradezu eine Anwendung des Funktionsbegriffes. Ohne das Mittel der graphischen Darstellung kann der Physikunterricht selbst auf der Unterstufe kaum auskommen. Ferner ist zu erwähnen, daß sich auch im geographischen Unterricht mancherlei Gelegenheit zu graphischer Darstellung findet." G. (Hamburg).

c) Einführung der Elemente der Differential- und Integralrechnung.

„Wir lehren Differential- und Integralrechnung seit 1874 mit gutem Erfolg und nennen die Dinge beim rechten Namen" wird von einem Realgymnasium geantwortet und ein alter Schüler der Gelehrtenschule bestätigt es. Für die Realanstalten sind die Elemente der Infinitesimalrechnung nach Lehrplan und Prüfungsordnung obligatorischer Lehrgegenstand. Auch am Gymnasium hat sich nur eine Stimme dagegen erhoben. „Es gehört zur allgemeinen Bildung", heißt es wiederholt. Auch die Leibnizsche Bezeichnung wird überall als selbstverständlich betrachtet, nur einmal wird ein Bedenken gegen das Differential, nicht den Differentialquotienten, erhoben. Aus praktischen Gründen wird daneben die Lagrangesche Bezeichnung (y') gebraucht. Vereinzelt wird Beschränkung auf Differential- und Ausschluß der Integralrechnung an Gymnasien und Realgymnasien verlangt.

Über den Betrieb an einer Oberrealschule orientiert die folgende Äußerung:

„Bei uns werden die Elemente der Differential- und Integralrechnung als Abschluß des mathematischen Schulpensums in O I gelehrt. Selbstverständlich darf die Infinitesimalrechnung nicht gewissermaßen als neue Disziplin dem übrigen Pensum rein äußerlich angehängt werden, sondern der ganze Unterricht der Oberklassen muß auf dieses Endziel hin angelegt sein und bei jeder Gelegenheit die dort zu benutzenden Begriffe und Methoden vorbereiten. Solcher Gelegenheiten gibt es sehr viele im mathematischen wie im physikalischen Unterrichte. Ich pflege besonders Betrachtungen aus der analytischen Geometrie und aus der

Mechanik zu dieser Vorbereitungsarbeit heranzuziehen. In der analytischen Geometrie eignet sich hierzu z. B. die Einführung der Parabel als Grenzfall von Ellipse und Hyperbel und die Herleitung sämtlicher Parabeleigenschaften aus denen der Ellipse (oder Hyperbel). Man wird dabei ganz von selbst auf die Begriffe: unendlich kleine Größen verschiedener Ordnung, unbestimmte Werte $(0:0, \infty - \infty)$ und auf eine genauere Erörterung des Grenzbegriffs geführt. In der Physik ist man zu solchen Betrachtungen geradezu genötigt z. B. in der Mechanik bei der Erörterung der Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung. Das Integral drängt sich hier bei sehr vielen Gelegenheiten auf (Potential, Trägheitsmoment, Foucaultsches Pendel, Schwerpunkt usw.). Ich pflege auch ruhig bei solchen Anlässen schon die Bezeichnungen „Integral", „Differential", „Differentialquotient" einzuführen und zu benutzen mit dem Hinweis, daß später eine genauere Betrachtung dieser Begriffe erfolgen werde. Bei der systematischen Behandlung in O I benutze ich (neben der Lagrangeschen Bezeichnung y') vorwiegend die Leibnizschen Zeichen, rechne auch mit Differentialen. In der Integralrechnung beginne ich mit dem bestimmten Integral; beim Auswerten unbestimmter Integrale verzichte ich auf komplizierte Fälle (schwierigere Partialbruchzerlegungen)." L.

d) Gemeinsame Behandlung der Planimetrie und Stereometrie.

Die von Italien und in Deutschland von Baden ausgegangene Bewegung einer gemeinsamen Behandlung von Planimetrie und Stereometrie hat in den Hansestädten noch wenig Eingang gefunden. Die meisten Referenten erklären sie für unzweckmäßig; selbst in IV soll, wenn auch vom Körper ausgegangen wird, möglichst rasch und ausschließlich Planimetrie getrieben werden. Das übliche Verfahren entspreche dem Grundsatz vom Leichten zum Schweren, ohne gründliche Vorkenntnisse in der Planimetrie sei ein erfolgreicher stereometrischer Unterricht nicht denkbar.

Einige erklären eine solche Verbindung zwar für wünschenswert, behaupten aber, daß sie bei den gegenwärtigen Lehrplänen undurchführbar sei.

Das Gegenteil weisen die Freunde dieser Methode nach, und von einzelnen Herren wird jede Gelegenheit benutzt, von der Ebene sofort in den Raum überzugehen. Schon im Rechenunterricht wird bei dem Nachweis, daß ein cbdm 1000 ccm enthält eine stereometrische Betrachtung notwendig, auf den Quader muß gleichfalls eingegangen werden, was auch die Rechenbücher allgemein tun. In IV wird von diesen Mathematikern schon recht tüchtig Stereometrie getrieben, selbstverständlich als Anschauungsunterricht: Netze der Platonischen Polyeder werden angefertigt, gewölbte Flächen bei Kugel, Zylinder und Kegel betrachtet.

An einer Stelle wurden die Kongruenzsätze gleich zum Beweis der Fundamentalsätze über die Lage von Geraden und Ebenen im Raum

mit Hilfe großer Modelle benutzt. Es wird behauptet, daß die Tertianer sich hierbei williger und interessierter gezeigt hätten als die Sekundaner. Eine gute mehrfach benutzte Gelegenheit bieten die Ähnlichkeitssätze. Polygone in ähnlicher Lage sind räumlich in der Tat anschaulicher als in der Ebene, selbst der Satz $F:F' = h^2:h'^2$ machte keine Schwierigkeiten. Von mehreren Seiten, die sonst der Verbindung abhold sind, wurde auf die Behandlung der Schnitte des senkrechten Kreiskegels unter Hinzuziehung der Dandelinschen Kugeln hingewiesen.

Einzelne Äußerungen seien als Beleg angeführt.

„Der Zirkel ist eine räumliche Anwendung des Kongruenzsatzes sws".

„Das stereometrische Pensum der Untersekunda wird leicht langweilig, weil es in ewigem Berechnen von Inhalten besteht, auch ist es teilweise viel zu leicht für Untersekundaner."

„Die Ausbildung der räumlichen Anschauung ist von vornherein im Geometrieunterricht anzustreben und jede Gelegenheit, aus der Ebene in den Raum hinauszugehen, ist zu benutzen".

„Auch bei den geometrischen Örtern in Untertertia ist Gelegenheit, zuweilen auf räumliche Betrachtungen einzugehen (Kreis und Kugel, Mittellot und Mittelebene). In der Kegelschnittslehre sind die Dandelinschen Kugeln ausführlich zu behandeln."

Aber es soll nicht verschwiegen werden: Diese Stimmen sind recht vereinzelt.

e) Behandlung der Kegelschnitte: analytisch, synthetisch, projektiv.

Auf der Oberstufe werden die Kegelschnitte stets analytisch behandelt. An den Gymnasien beschränkt man sich gewöhnlich hierauf, an den Realanstalten wird meist die synthetische Betrachtung eng mit der analytischen verknüpft, d. h. es wird bei der Ableitung und beim Beweis von Sätzen jedesmal der bequemste Weg bevorzugt. Vereinzelt wird auch die projektive Geometrie so mit herangezogen, daß Tangenten ohne Zirkel konstruiert werden können. An einer Anstalt ist genau der preußische Lehrplan U I synthetische Geometrie, O I analytische innegehalten; an einer anderen ist die Reihenfolge unter scharfer Trennung: O II synthetisch, U I projektiv, O I analytisch.

Die Schönheit der projektiven Darstellung wird nirgends in Zweifel gezogen, ihre ausführliche Berücksichtigung aber aus verschiedenen Gründen abgelehnt. Einer ist, daß die Lehrer zum Teil nicht hinreichend damit vertraut sind, ein zweiter, daß sie für kein Studium vorausgesetzt wird, der Techniker braucht sie nicht, der Mathematiker lernt sie — manchmal auch nicht — auf der Universität.

Auch hier mag die Minorität in erster Linie zum Wort kommen: „Ich bevorzuge die projektive Behandlung. Sie gibt den besten Einblick in die wissenschaftliche Behandlung eines Gebiets durch Aufbau aus einigen Grundtatsachen. Sie ermöglicht Schülern die eifrige Teilnahme, die wegen mangelhaften Grundlagen in der Planimetrie versagten.

Sie fesselt, wie ich aus eigner Erfahrung als Schüler und Lehrer weiß, die Schüler ungemein". Z. (B).

„Ich bin für die analytische und synthetische und projektive Behandlung und zwar in der Reihenfolge: synthetische (weil diese an die Planimetrie anknüpft); projektive (und zwar rein geometrisch nach der Geometrie der Lage); analytische (diese zuletzt, weil das Erfassen der geometrischen Bedeutung arithmetischer Operationen dem Schüler im Anfang große Schwierigkeiten bereitet). Die auf die synthetische und projektive Behandlung verwendete Zeit wird zu einem ganz erheblichen Teil wiedergewonnen bei der analytischen, weil es sich dann bei ihr nicht mehr um einen neuen Inhalt, sondern um eine neue Form handelt." B. (H).

Für den Umfang, in dem die projektive Geometrie auf einer Realanstalt betrieben wird, ist das schöne Buch von Böger, „Geometrie der Lage" charakteristisch.

f) Vertiefung des Geometrieunterrichtes in Prima nach der erkenntnistheoretischen Seite hin.

Die Antworten auf diese Frage tragen zum großen Teil den Stempel, daß praktische Erfahrungen auf diesem Gebiet nicht vorliegen. Wenn behauptet wird, daß viele Lehrer nicht dazu imstande sind, so bestätigen eine Reihe von Äußerungen dies ungewollt. Wenn von Schülern das Gleiche behauptet wird, so kann man ziemlich sicher sein, daß entweder keiner, oder ein verkehrter Versuch vorliegt. Die Mehrzahl bezeichnet eine Vertiefung nicht nur des geometrischen, sondern des mathematischen Unterrichts überhaupt nach dieser Seite hin für wünschenswert, viele klagen aber, besonders am Gymnasium, über Zeitmangel. Dagegen hebt eine Anzahl ganz energisch hervor, daß solche Betrachtungen so überaus wertvoll sind, daß ihnen unbedingt ein paar Stunden — von einem systematischen Unterricht ist nur zweimal die Rede – geopfert werden müssen, selbst auf Kosten von analytisch-geometrischen Örtern und anderen Abiturientenparadeaufgaben. So lautet ein Urteil von einem Gymnasium her: „Ich glaube, daß die Schule durch die Mathematik hier noch viel segensreicher als bisher auf die Denkfähigkeit und das Urteilen des Schülers hinwirken kann, indem man zeigt, daß in der Mathematik lediglich die logischen Methoden zur Anwendung kommen, die für jedes Urteil maßgebend sind. Vor allem sind die Schüler auf die vielen versteckten Schwierigkeiten und Fehlerquellen für ein Urteil hinzuweisen. Hier, glaube ich, kann man namentlich in der Oberprima gerne Beispiele aus dem Nächstliegenden, Neuesten wählen: Aus Versammlungen, Tagespressen usw. Takt gehört natürlich zur Auswahl. Viele Schüler gehen ab mit der Überzeugung, daß Mathematik bis zum gewissen Grade „Hexerei" sei." K.

Von einer Oberrealschule:

„Eine Vertiefung geometrischer Betrachtungen nach der logischen und erkenntnistheoretischen Seite hin habe ich selbst mehrfach versucht

und zwar bei Gelegenheit des stereometrischen Unterrichts in Obersekunda. Veranlassung dazu bietet die Tatsache, daß der Inhalt aller hier bewiesenen Sätze aus der Anschauung unmittelbar einleuchtet. Ich pflege den Schülern hier klarzumachen, daß der „Beweis“ im Grunde den Zweck hat, die logische Abhängigkeit der betrachteten Tatsache von einer Anzahl unbewiesener, nicht weiter auf einander reduzierbarer Grundtatsachen (Axiomen) darzutun. Ebenso benutze ich irgendeine der möglichen Definitionen der Ebene; auf die Unmöglichkeit der Definition der Geraden weise ich hin. Bei den stereometrischen Konstruktionen wird darauf aufmerksam gemacht, daß sie im Grunde nichts verlangen als die Zurückführung einer Aufgabe auf gewisse als lösbar geltende Grundaufgaben. An der Spitze des ganzen Systems stehen also Grundbegriffe (Punkt, Gerade), Grundsätze, Grundaufgaben (Postulate). Eine zweite Gelegenheit zu solchen Betrachtungen bietet sich bei der Behandlung der Kongruenz und Symmetrie dreiseitiger Ecken. In der Ebene können zwei symmetrische Dreiecke dadurch kongruent gemacht werden, daß man ein Dreieck „umklappt“, d. h. aus der „2-dimensionalen“ Ebene in den „3-dimensionalen“ Raum geht. Fingiert man (mit Helmholtz) „2-dimensionale Wesen“, deren „Raum“ die 2-dimensionale Ebene ist, so sind für diese die Kongruenz und Symmetrie von Dreiecken ebensowenig aufeinander zurückführbar, wie für uns die Kongruenz und Symmetrie dreiseitiger Ecken. Die Bemerkung, daß anders organisierte Wesen denkbar wären, deren Raumanschauung die unsrige ebenso übertrifft, wie diese die der „2 dimensionalen Wesen“, liegt dann sehr nahe. Die Schüler pflegen nach meinen Erfahrungen bei solchen Hinweisen auf die Bedingtheit der Form unserer Erfahrung und Erkenntnis durch die Beschaffenheit unseres Erkenntnisorgans großes Interesse zu zeigen. Ferner lassen sich derartige das Philosophische streifende Betrachtungen anstellen beim Vergleich der Eigenschaften des sphärischen und des ebenen Dreiecks. Hier ist es nicht schwer, den Schülern klarzumachen, daß das „Parallelenaxiom“ oder die Konstanz der Winkelsummen = 2 R keine logische Folge der übrigen Euklidischen Axiome sein kann, weil sie sonst beim sphärischen Dreieck auch vorhanden sein müßte. Bei dieser Gelegenheit pflege ich auch hinzuweisen auf die Möglichkeit einer „2 dimensionalen Geometrie“ auf irgendeiner Fläche (etwa Ellipsoid; den Geraden der Ebene entsprechen die „kürzesten“ [geodätischen] Linien usw.) und besonders zu betonen, daß in diesem allgemeinen Falle einer gekrümmten Fläche die Beweglichkeit der Figuren verloren geht, so daß also diese für gewöhnlich als selbstverständlich betrachtete Eigenschaft als nur in besonderen Fällen (bei konstanter Krümmung) vorhanden sich erweist. Daß derartige Betrachtungen bei größerer Reife der Schüler (in O I) noch größere Erfolge haben würde, glaube ich als sicher annehmen zu können. Bei dem großen in O I zu bewältigenden Pensum bin ich auf dieser Stufe nie zu derartigen Exkursen gekommen.“ L.

Einen wichtigen Punkt hebt die folgende Bemerkung hervor: „Doch fordert diese Seite gründliche philosophische Vorbildung der Lehrer. Da eine solche Vorbildung auch oft im naturwissenschaftlichen Unterricht zur Behandlung erkenntnistheoretischer, physiologischer und ethischer Fragen nötig ist, müßte man heute eigentlich von jedem Mathematiker und Naturwissenschaftler die Lehrbefähigung für philosophische Propädeutik verlangen, damit er die Fragen von allgemeiner Bedeutung, die sein Fach in Fülle bringt, besprechen kann. Ich glaube, heutzutage hören die Schüler in philosophischen Dingen mehr auf den Naturwissenschaftler als auf den Religions- und Deutschlehrer. – Nützen wir dies!" G.

g) Das Verhältnis des geometrischen Zeichnens zum Stereometrieunterricht.

Fast ohne Ausnahme wird der Stereometrieunterricht in Untersekunda mit einer Einführung in die schräge Parallelprojektion verbunden.

Seltener findet sich hier schon die Darstellung im Grundriß und Aufriß, die meist der speziellen Darstellenden Geometrie überlassen wird. An einer Anstalt werden systematisch im Stereometrieunterricht in O II Schrägbilder, in U I Grundriß und Aufriß, in O I Bilder in Malerperspektive gezeichnet. An anderen Anstalten wird für die sphärische Trigonometrie eine eingehende Behandlung der stereographischen Projektion bevorzugt. Grundsätzlich wird es nicht dem Zeichenlehrer oder einem fakultativen Unterricht in Darstellender Geometrie überlassen, ob die Schüler die Körper korrekt zeichnen; sondern der Mathematiker fühlt sich verpflichtet, hier Fehlendes zu ergänzen oder auch ganz neu aufzubauen.

An den Oberrealschulen sind zwei Zeichenstunden pflichtmäßig, zwei weitere wahlfrei. Der Schüler darf für die ersteren Freihandzeichnen oder Darstellende Geometrie wählen. Auch die Zeichenlehrer sind von dieser Einrichtung durchaus befriedigt. Wenn ein künstlerisch unbegabter Schüler fünf Jahre lang gründlich im Zeichnen unterrichtet ist, hat er für seine allgemeine Bildung gewiß genug gelernt. Einen solchen weiter zum Freihandzeichnen zu zwingen, ist für Schüler und Lehrer eine Qual. In Darstellender Geometrie lernt er etwas Nützliches und freut sich, durch Eifer und Sorgfalt etwas zu erreichen, was ihm bisher im Zeichnen mehr oder minder versagt blieb.

Stellenweise wird Klage darüber geführt, daß der Unterricht in Darstellender Geometrie nicht in die Hände genügend vorgebildeter Lehrer gelegt wird; doch wird sehr wohl anerkannt, daß ein mathematisch gut geschulter Zeichenlehrer einen besseren Unterricht erteilen kann, als ein zeichnerisch ungeschickter Mathematiker. Die Fakultas in angewandter Mathematik ist wünschenswert, aber nicht unbedingt erforderlich, besonders bei solchen Mathematikern, die selbst ein Realgymnasium oder eine Oberrealschule besucht haben.

Eine etwas temperamentvolle Äußerung über gewisse Mißstände soll hier nicht unterdrückt werden: „Viel Zeichnen und nochmals viel Zeichnen, planimetrisch und stereometrisch. An unserem Gymnasium soll bei der Lehrplanberatung der fakultative Unterricht im Linearzeichnen gefordert werden, der in die Hand des Mathematikers gelegt werden muß. Ich halte das Linearzeichnen auch deswegen für unbedingt notwendig, weil an manchen Anstalten der Zeichenunterricht durch ein ganz einseitiges und nach meiner Meinung ganz mißverstandenes Eingehen auf die Reformbewegung im Zeichnen allmählich zur allgemeinen Schmiererei, Spielerei und höchstens ganz einseitigen Förderung einiger wenigen sehr begabten Schüler führt. Die Schüler verlernen jedes genaue Sehen, jedes scharfe Auffassen und jedes auch nur einigermaßen korrekte Arbeiten. Ich bin überzeugt, daß auch hier – und teilweise ist es schon geschehen – eine scharfe Reaktion erfolgt, genau so wie sie in der Kunst bereits erfolgt ist. Schon seit geraumer Zeit klagt man über den Mangel an guten Zeichnern z. B. im „Kunstwart". Da hat die Mathematik die doppelte Pflicht, ihrerseits energisch einzugreifen, daß es bald zu einer vernünftigen und praktischen Reform kommt." K.

Das fakultative Linearzeichnen auf der Mittelstufe ist vor 10 Jahren zugunsten des obligatorischen Rechenunterrichts bis U II einschließlich aufgegeben. Sicherheit im kaufmännischen Rechnen ist in den Hansestädten ein unbedingtes Erfordernis für den abgehenden Einjährigen, wenn er nicht hinter dem Volksschulselektaner zurückstehen will. Der Verlust ist, wie es scheint, durch die weit stärkere Betonung des Zeichnens im Mathematikunterricht zum großen Teil ausgeglichen worden.

h) Stärkere Betonung der Anwendungen.

„Daß 'die hohe, die himmlische Göttin' dadurch in den Augen der Schüler nur gewinnen kann, daß sie von ihrem theoretischen Wolkensitz in die Sphäre der praktischen Anwendungen 'hinab' steigt, wird wohl jeder Lehrer in seinem Unterricht erfahren haben." L.

„In unserer Stadt meines Wissens nicht mehr erforderlich." B.

„Nach 5 scheint auf die Anwendungen hinreichend Wert gelegt zu werden." J.

Wenn auch, wie in Abschnitt 5 gezeigt ist, an einigen Anstalten recht viel in der Beziehung geschehen ist, dürfte die Anregung durch die Meraner Lehrpläne doch noch manchmal auf fruchtbaren aber bisher ganz unbestellten Boden gefallen sein.

Immerhin mag erwähnt werden, daß der vielfach angefeindete „Jenaer Beschluß" des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts auf Antrag des Prof. Richter-Wandsbeck, also eines Nachbarn einer Hansestadt, gefaßt worden ist. Er verlangte, daß die Mathematik ausschließlich in den Dienst der Naturwissenschaften und sonstigen praktischen Anwendungen gestellt würde. In Braunschweig wurde das „ausschließlich" in „tunlichst" gemildert.

i) Stärkere Betonung der geschichtlichen Entwicklung.

Gelegentlich geschichtliche Hinweise zu geben, halten nur zwei Referenten für „überflüssig“. Die Mehrzahl beschränkt sich auf solche, erklärt sie nicht nur für nützlich, sondern für notwendig. An einer ganzen Reihe von Anstalten wird tatsächlich durch regelmäßige Erwähnung des (oft freilich angeblichen) Entdeckers von Sätzen oder Erfinders von Methoden, durch gelegentliche Zusammenfassungen und Hinweis auf den Zusammenhang mit der kulturellen Entwicklung den Schülern ein lebensvolles Bild geboten, so daß sogar einzelne vor einem Zuviel an Zahlen und Namen glauben warnen zu müssen. Näheres geben die Äußerungen:

1. „Dem Ziele des humanistischen Gymnasiums entsprechend ist immer auf die historische Entwicklung soviel als möglich Wert zu legen. Lektüre mathematischer Schriften halte ich in Rücksicht auf die beschränkte Zeit, namentlich am Reformgymnasium, in der in den oberen Klassen der Mathematik zur Verfügung stehenden Zeit für ausgeschlossen.“ K. (B.)

2. „Ich halte es für wichtig, daß der Mathematiklehrer die Geschichte seiner Wissenschaft einigermaßen eingehend kennt, er wird dann diese Kenntnis benutzen, seinen Unterrichtsgegenstand zu beleben und für die Schüler anziehender zu machen. Keinesfalls aber darf eine stärkere Betonung der geschichtlichen Entwicklung zu einer Vermehrung des Unterrichtsstoffes führen.“ M. (L.)

3. „Ja! Es darf sich hierbei aber niemals um Vermehrung des Gedächtnisstoffes durch Lernen von Zahlen oder Namen handeln, sondern es muß versucht werden, Beziehungen zu Zeitgenossen zu finden, Gründe, warum zur gegebenen Zeit gerade diese Disziplin gepflegt würde, warum gerade das betreffende Land um diese Zeit eine Reihe von Gelehrten ein anderes gar keine aufzuweisen hat und ähnliches mehr.“ B. (B.)

4. „Ganz ohne Zahlen und Namen dürfte es denn doch nicht gehen. Wichtiger als die nackte Zahl, die in der Tat leicht vergessen, oder grausam verwechselt wird — „nur“ das Jahrhundert falsch – ist die feste Verknüpfung mathematisch wichtiger Daten mit historisch sicher bekannten Epochen: Sokrates — Delisches Problem; Hannibal — Archimedes; Reformation — kubische Gleichungen; 30jährige Krieg — analytische Geometrie, vorher Logarithmen nachher Differentialrechnung; Friedrich der Große — Euler; Napoléon – projektive Geometrie usw.“

5. „Hinweise auf die geschichtliche Entwicklung erwecken stets das lebhafte Interesse der Schüler. Sie erscheinen mir auch aus dem Grunde wertvoll, weil sie zeigen, wie die geschichtliche Entwicklung oft erst nach vielen Um- und Abwegen zu den endgültigen Ergebnissen gekommen ist.“ L. (H.)

6. „Die geschichtliche Entwicklung ist nach wie vor stark zu betonen.“ B. (H.)

k) Freiere Gestaltung des Unterrichts auf der Oberstufe.

Unter „freierer Gestaltung des Unterrichts auf der Oberstufe“ sind von den Referenten zwei nur zum Teil zusammenhängende Fragen behandelt worden: Einerseits die Zerlegung der Oberklassen in eine mathematisch-naturwissenschaftliche und eine fremdsprachliche Abteilung, andererseits eine weitgehende Beweglichkeit innerhalb der Lehrpläne, die selbst möglichst wenig zu spezialisieren sind.

Was den letzten Punkt betrifft, so sind drei Maßregeln erforderlich und auch fast überall durchgeführt: 1. Das Pensum der Oberstufe ist in den allgemeinen Lehrplänen nicht auf die einzelnen Klassen verteilt, 2. jeder Lehrer führt seine Schüler von O II bis O I durch, 3. in der Reifeprüfung wird auf mathematisches Verständnis im allgemeinen, auf gründliche und sichere Kenntnisse aber nur in den eingehend behandelten Gebieten Wert gelegt.

Daß diese Freiheit als ein wertvolles Gut angesehen und von ihr verständiger Gebrauch gemacht wird, zeigen zahlreiche Äußerungen. Jede Stadt mag da einmal zu Wort kommen.

Lübeck: „Der freien Gestaltung des Unterrichts auf der Oberstufe stehe ich freundlich gegenüber. M.“

Bremen: „Der Lehrplan gibt in den obersten Klassen nur allgemeine Direktiven und überläßt die Ausgestaltung des Unterrichts nach der einen oder anderen Seite dem Ermessen des Lehrers, der eine dem Niveau der Klasse, besonderen Wünschen und seinen eigenen Neigungen entsprechende Auswahl trifft.“ K.

Hamburg: „Die freie Gestaltung, glaube ich, ist in Hamburg durch die Lehrpläne gewährleistet; es bleibt dem einzelnen so viel Spielraum, daß er z. B. irgendein Gebiet ganz besonders behandeln kann, auch in anderer Art, etwa durch Stellen von größeren Aufgaben, durch Entwickeln von großen Zusammenhängen usw. Im einzelnen wird sich das nach der Schule, dem Lehrer und vor allem der Klasse richten.“ K.

Recht weit geht die folgende Forderung: „Es wäre nach meiner Ansicht sehr gut, wenn es dem Lehrer ganz überlassen würde, was und wie er's durchnehmen will. Vor allem muß es dem Lehrer freistehen, einige Gebiete ganz kurz, andere sehr ausführlich zu besprechen. Dann kann jeder das eingehend behandeln, was ihm selbst am liebsten ist; und das wird einer immer am besten unterrichten.“ J.

Hierzu bemerkt ein Mitglied der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission: „Ich bin sehr für Freiheit, aber nicht für Regellosigkeit. Der Lehrer müßte immer vor Augen haben, was seine Schüler mit ihrer mathematischen Ausbildung später anfangen sollen.“

Eine größere äußere Freiheit ist dem Lehrer schon dadurch gewährt, daß von seiten der Oberschulbehörden für die Mathematik keinerlei Vorschriften über die Anzahl und die Art der schriftlichen Arbeiten gegeben sind. Klassenarbeiten werden überall geschrieben, aber ihre Zahl schwankt zwischen 2 und 8 im Semester. Als häusliche Aufgaben werden

neben kleinen von Stunde zu Stunde aufgegebenen – außer an dem für die meisten Schulen durch Konferenzbeschluß festgelegten freien Nachmittag –, die vom Lehrer nur kontrolliert, aber nicht korrigiert werden, stets Verbesserungen der Klassenarbeiten verlangt, die mehrfach als besondere häusliche Leistungen zensiert werden. Häufig werden Zeichnungen angefertigt, die der Lehrer einsammelt und korrigiert. Selten sind größere vierwöchentliche Arbeiten. Bisweilen werden Semesterarbeiten für die freiwillig sich hierzu meldenden Schüler gestellt. Diese Schüler werden dann von den laufenden Arbeiten ganz oder teilweise befreit und erhalten außerdem monatlich einen arbeitsfreien Tag. Eine solche Vergünstigung wird aber nicht der ganzen Klasse gewährt, sondern nur durchaus zuverlässigen Schülern, denen es natürlich auch vollständig freigestellt wird, aus welchem Fache sie eine Arbeit wählen wollen. Doch befindet sich diese Einrichtung noch durchaus im Versuchsstadium. Schwierigkeiten haben sich weniger daraus ergeben, daß einmal im Monat nur die halbe Klasse anwesend ist, als daraus, daß einzelne Schüler aus Eifer und Ehrgeiz sich überarbeitet haben.

Was sonst freiere Gestaltung des Unterrichts heißt, nämlich Zerlegung der Oberklassen in eine mathematisch-naturwissenschaftliche und in eine fremdsprachliche Abteilung, hat zwar seine Wiege in Hamburg gehabt, ist aber zurzeit in den Hansestädten nirgends durchgeführt.

„Bei uns in Hamburg nimmt man leider gar keine Rücksicht auf die Spezialneigungen der erwachsenen Schüler. Seit meiner Schulzeit auf dem Realgymnasium des Johanneums in Hamburg, wo wir unter Friedländer eine mathematisch-naturwissenschaftliche und eine sprachliche Abteilung von Obersekunda an hatten, halte ich an der Überzeugung fest, daß es eine überaus glückliche Einrichtung ist, wenn man unter Festhaltung gewisser Mindestforderungen in allen Fächern den Schülern der Oberklassen Gelegenheit gibt, sich je nach ihren Neigungen für die mehr sprachliche oder mehr mathematisch-naturwissenschaftliche Betätigung zu entscheiden. Für besonders abänderungsbedürftig halte ich die Zustände auf der Oberstufe unserer Oberrealschulen, wo nach meinen Beobachtungen die neuen Sprachen ein viel zu starkes Übergewicht haben und durch ihre Anforderungen die Schüler erdrücken. Wenn man im allgemeinen der Auffassung zuneigt, daß den Oberrealschulen ihr wesentliches Gepräge durch die mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächer gegeben werde, so trifft das für Hamburg absolut nicht zu.“ S.

Charakteristisch ist, daß an anderen Anstalten — natürlich nicht von Mathematikern — gerade das Gegenteil behauptet wird: Die mathematischen Hausaufgaben überlasteten die Schüler unerhört. Dagegen ist eine Erscheinung fast durchweg zutage getreten: Die Zensuren in Mathematik sind sehr viel besser als in den Sprachen. Eine über mehr als ein Jahrzehnt verfolgte Statistik stellte an einer Anstalt fest, daß auf 7 „nicht genügend“ in den Fremdsprachen erst 1 „nicht genügend“

in der Mathematik erteilt wurde. Bei den Prädikaten über „genügend“ liegt die Sache etwas günstiger für die Sprachen. Immerhin kommen 4 „gut“ in der Mathematik auf 1 „gut“ in den Sprachen.

Für die Dichotomie erheben sich im ganzen etwas mehr Stimmen als gegen sie. Die letzteren sind aber zum Teil recht beachtenswert. Es werden sowohl die äußeren Schwierigkeiten hervorgehoben – aus den 6 bis 8 Oberklassen, die an den Doppelanstalten vorhanden sind, werden mindestens 12 –, teils die inneren der ungleichartigen Ausbildung auf einer und derselben Anstalt. Endlich tritt auch unter Hinweis auf die mögliche spätere Aufhebung der Dichotomie das Bedenken auf, daß die Mindestforderungen in Mathematik für die sprachliche Abteilung zu Normalforderungen für die ganze Schule gemacht werden.

Eine klug abwägende vermittelnde Stellung nimmt folgende Äußerung ein: „Daß eine freiere Gestaltung des Unterrichts auf der Oberstufe dringend wünschenswert sei, ist wohl ohne Frage. Wie das aber praktisch möglich zu machen sei, ist schwer zu beantworten. Der Gedanke, Sektionen zu schaffen (etwa eine mathematisch-naturwissenschaftliche, eine fremdsprachliche) ist nicht ausführbar, weil er erstens eine enorme Vermehrung der Lehrkräfte verlangt und weil vor allem eine große Anzahl Schüler kein ausgeprägtes Interesse besitzt. Auf Oberrealschulen ist das meist noch der Fall, wo soll aber das Gros der Gymnasiasten hin, die nachher Juristen, Offiziere werden, weil ihnen tieferes Interesse für irgendeine Schuldisziplin fehlt? Möglich erscheint mir der Vorschlag, daß man jedem Schüler freistellt 1–2 Fächer ganz aufzugeben. Die so gewonnene Zeit verwende er für ein Lieblingsfach, in dem er Spezialleistungen und ein gutes Prädikat aufweisen muß. – Beschränkt man sich auf zwei Fächer, so wird allzu großer Einseitigkeit vorgebeugt, und nur der Stoff fällt weg, der dem Schüler am verhaßtesten war, den er so wie so so schnell wie möglich vergessen hätte. – Sollte dabei einmal eine Flucht vor einem bestimmten Lehrer stattfinden, so wäre das nicht schlimm. Unterrichtet ein Lehrer gut, so gehen die Schüler nicht von ihm, auch wenn er recht streng ist. Der Hauptgrund für eine Lehrerflucht würde immer Langeweile oder taktlose Rücksichtslosigkeit gegen ältere Schüler sein.“

G.

8. Auf welchen Gebieten könnte eine Entlastung zugunsten des neuen Lehrstoffes eintreten?

Zur Entlastung ist die Fortlassung der quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, der kubischen Gleichungen, der Reihen höherer Ordnung, der Neperschen Analogien vorgeschlagen. Die beiden letzten werden, abgesehen von ganz vereinzelten Ausnahmen, in den Hansestädten nicht behandelt. Die kubischen Gleichungen werden auf allen Anstalten behandelt, selbst auf den

Gymnasien wenigstens graphisch gelöst, die Systeme quadratischer Gleichungen werden so weit berücksichtigt, als die analytische Geometrie dies verlangt. Die Kunstgriffmethoden Bardeys werden zum Teil recht energisch verworfen.

Aber auch auf anderen Gebieten sind Vereinfachungen teils schon durchgeführt, teils werden sie als wünschenswert bezeichnet. Von der Einschränkung der formalen Algebra war schon unter 7a die Rede. Den planimetrischen Konstruktionsaufgaben werden engere Grenzen gezogen. Die ebene Trigonometrie soll auf Sin-, Cos-, Tang- und Halbwinkelsatz, sowie die Flächenformeln 0,5 absin γ, $\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ ϱs, die sphärische auf das rechtwinklige Dreieck, Sin- und 2 Cos-Sätze beschränkt werden. In der Goniometrie sind die besonderen Sätze über Winkel, deren Summe 180° beträgt, fortzulassen, goniometrische Gleichungen auf die wichtigsten Fälle einzuschränken. Vereinzelt wird selbst die Verwendung eines Hilfswinkels in der ganzen sphärischen Trigonometrie gestrichen.

Als entbehrlich wird ein großer Teil der Kombinatorik, die elementare Reihenlehre (durch die Behandlung der Taylorschen und Maclaurinschen Reihe zu ersetzen), die elementare Methode der Maxima und Minima (ebenfalls ersetzbar durch die der Differentialrechnung), Kettenbrüche, Diophantische Gleichungen, die Theorie der Chordalen, das Apollonische Berührungsproblem u. a. bezeichnet. Solche Dinge sollen jedenfalls nicht im amtlichen Lehrplan enthalten sein, dem einzelnen Lehrer, der dies oder jenes Gebiet besonders liebt, mag aber seine Behandlung gestattet sein.

9. Das Interesse des physikalischen und chemischen Unterrichts an der Reform.

Da die Differential- und Integralrechnung an allen Realanstalten mehr oder weniger getrieben werden, ist ihre Anwendung auf physikalische Probleme selbstverständlich. Die Meinungen gehen aber darin auseinander, ob die betreffenden Betrachtungen in der Physik- oder in der Mathematikstunde anzustellen sind. Aus Rücksicht auf die Physik wird deshalb stellenweise schon in O II Differentialrechnung betrieben, aus Rücksicht auf die Verteilung des mathematischen Pensums die Mechanik nach O I verlegt. Darüber herrscht Einigkeit, daß die Mathematik den Stoff, die Physik die Methode der anderen Wissenschaft nicht ungenutzt liegen lassen darf.

Die graphische Darstellung von Funktionen, die schon in den Mittelklassen gelehrt wird, leistet der Physik und Chemie wertvolle Dienste. Wieviel Mathematik die heutige Chemie braucht, ist allerdings der Mehrzahl der Mathematiker völlig unbekannt, wie aus den Antworten auf den Fragebogen hervorgeht.

Von großem Vorteil ist für Physik und Chemie die Vertrautheit mit dem logarithmischen Rechenschieber. Freilich gibt's auch Chemiker, die ihn nicht zu gebrauchen verstehen.

„Der physikalische Unterricht ist durchaus an der Reform des mathematischen interessiert. Es scheint mir zur allgemeinen Bildung zu gehören und zur Schulung des Denkens außerordentlich beizutragen, wenn s, v, γ in der Mechanik durch die mathematischen Formulierungen $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{d^2s}{dt^2}$ verbunden werden. So erst kann der Schüler erkennen, wieviel an einem mathematischen Gesetz beobachtet werden muß, wieviel durch Rechnung erschlossen werden kann. – Desgleichen sollte in der Oberprima (wenigstens der Realanstalten) die Integration der Newtonschen Differentialgleichungen $m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Mm}{r^2} \cos \alpha$ etc. durchgeführt werden. Von der Großtat Newtons wird so viel gesprochen, werde sie auch behandelt! Auch der Funktionsbegriff ist zum Verständnis mathematisch formulierter physikalischer Gesetze unbedingt erforderlich, man denke an die Gasgleichungen. –

Auch der chemische Unterricht ist interessiert, wenn man in Chemie, wie es leider von Chemikern der alten Schule nur noch zu häufig geschieht, nicht nur eine Summe von Verbindungen, Formeln und äußeren Eigenschaften bespricht, sondern in den Rahmen des Unterrichts die wichtigsten physikalisch-chemischen Gesetze, die ungeheuren Bildungswert durch ihre Einfachheit, Allgemeingültigkeit und ständige Beziehung auf das Molekulargewicht besitzen, hereinzieht (Massenwirkungsgesetz, Dissoziationserscheinungen, osmotischer Druck und all seine Folgeerscheinungen, Gleichgewichtszustände, die Thermochemie). Auch die kinetische Theorie der Gase muß entweder vom Chemiker durchgesprochen werden, oder aber, falls dies der Physiker tut, oft gestreift werden. Alle diese physikalisch-chemischen Gesetze fordern aber mathematische Kenntnisse und besonders Vertrautsein mit dem Funktionsbegriff." G.

10. Reifeprüfung.

Für die Abschaffung der Reifeprüfung haben sich genau ebensoviel Stimmen erhoben wie für die Beibehaltung. Den ersteren zuzuzählen sind vielleicht diejenigen, die jeden zweifellos reifen Schüler von der schriftlichen und mündlichen Prüfung durch das Lehrerkollegium befreit sehen wollen.

Mehrere der Abänderungsvorschläge sind durch die neue Prüfungsordnung bereits erfüllt, so die Aufhebung des Unterschieds zwischen Haupt- und Nebenfächern und die unbedingte Kompensationsmöglichkeit, wenn die Kenntnisse nicht unter dem Wissen stehen, das für die Versetzung nach Unterprima erforderlich ist.

Die Bearbeitung von ein oder zwei größeren Fragen an die Stelle von vier Aufgaben zu setzen, wird im allgemeinen abgelehnt. Nur vier Stimmen erheben sich dafür, es den Lehrern zu gestatten. Andere sehen hierin eine Gefahr, entweder des Mißlingens für die Schüler oder zu weitgehender Vorbereitung für den Lehrer.

In der Prüfungsordnung ist vorgeschrieben, daß vier Aufgaben aus verschiedenen Gebieten zu stellen sind. Die Gebiete sind nicht näher bestimmt, und von dieser Freiheit wird ausgiebiger Gebrauch gemacht. Dagegen ist der Lehrer verpflichtet, der Behörde einen ausführlichen Nachweis einzuliefern, daß die Lösung der gestellten Aufgaben keine besonderen Kunstgriffe oder umständliche Rechnung verlangt. Nachdem die Korrektur durch den Lehrer ausgeführt ist, wird ein zweiter Mathematiker vom Direktor als Korreferent ernannt. Einigen die beiden sich nicht über das Prädikat, so entscheidet der Schulrat. Der Fall, daß ein von zwei Mathematikern übereinstimmend abgegebenes Urteil umgestoßen wird, ist nach der Prüfungsordnung allerdings zulässig, aber meines Wissens noch nicht vorgekommen.

Da die Gebiete, aus denen die Aufgaben entnommen werden, dem Lehrer überlassen werden, so findet sich die Planimetrie selbst an Gymnasien nur selten, auch die ebene Trigonometrie wird an Gymnasien öfter, an Realanstalten meist durch die sphärische ersetzt, die Stereometrie tritt in Verbindung mit kubischen Gleichungen auf, aus der analytischen Geometrie wird an allen Arten von Anstalten in der Regel je eine Aufgabe gestellt, aus der Differentialrechnung an Realanstalten, aber auch an Gymnasien, aus der Integralrechnung nur an Oberrealschulen. Systeme quadratischer Gleichungen treten selten auf, Gleichungen dritten Grades sehr häufig, bisweilen auch diophantische Gleichungen. Aufgaben aus der Rentenrechnung finden sich an Gymnasien, Lebensversicherungsaufgaben an Oberrealschulen häufig. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik kommen selten vor. Die Reihenlehre wird öfter in Betracht gezogen, allerdings fast nur auf Grundlage der Infinitesimalrechnung.

Die hinzuzufügenden Sonderaufgaben, bei denen ein Nachweis der leichten Lösbarkeit nicht erbracht zu werden braucht, sind trotzdem meist nicht viel schwieriger; sie dienen mehr dazu, einen etwaigen Ausfall in den Pflichtaufgaben zu kompensieren. Zwei tadellos gelöste Aufgaben sind im allgemeinen notwendig und hinreichend zu einem „Genügend". Zu einem „Sehr gut" werden vier fehlerlose Lösungen verlangt.

Die unter 1 mitgeteilten Reifeprüfungsaufgaben geben ein gutes Bild der Zielforderungen auf den einzelnen Anstalten.

11. Ausbildung der Kandidaten.*)

a) Trennung in eine mathematisch-physikalische und eine chemisch-biologische Gruppe.

Die von der Unterrichtskommission vorgeschlagene Trennung in eine mathematisch-physikalische und eine chemisch-biologische Gruppe findet, da die Referenten fast durchweg Mathematiker sind, sehr viel Zustimmung. Einige Bedenken, die gerade von besonders sachkundiger Stelle ausgehen, sollen aber nicht unerwähnt bleiben. Ehemalige Gymnasiasten müssen, auch wenn sie der ersten Gruppe angehören, auf der Universität Chemie treiben. Die wissenschaftlich natürlichste Kombination ist heute Physik und Chemie, solche Lehrer sind auf den Oberrealschulen nicht nur verwendbar, sondern besonders wünschenswert. Der Fall, daß der Mathematiker Biologie unterrichten muß, tritt z. Zt. in den Hansastädten bei Realvollanstalten nicht mehr ein, bei Gymnasien und Realschulen ist er noch nicht ganz beseitigt. Ebenso liegt es für den Biologen in bezug auf die Mathematik. Hier kann eine Fakultas in Geographie nützlich verwertet werden, ihre Verbindung mit Chemie, Mineralogie, Geologie oder Biologie ist natürlich. Fehlen diese Fächer gänzlich – und das ist bei der mathematisch-physikalischen Gruppe nicht undenkbar – so sieht die hinzugenommene Geographie wie ein bedenklicher Lückenbüßer aus. Angewandte Mathematik ist ganz gewiß ein natürlicherer Genosse der reinen Mathematik.

b) Ausbildung auf der Universität.

Wenn einem Kandidaten, der gleich zu Beginn seiner Unterrichtstätigkeit in die Prima einer Oberrealschule gewiesen wird, auch der Seufzer entschlüpfen kann: „Was man nicht weiß, das eben brauchte man, und was man weiß, kann man nicht brauchen“, so muß man doch im allgemeinen sagen: Die Ausbildung der jungen Mathematiker ist gut. Gewiß gibt es solche, die von sphärischer Trigonometrie oder von Versicherungsrechnung keine Ahnung haben, die recht einfache Konstruktionsaufgaben oder analytisch-geometrische Örter zunächst mit Grauen betrachten, aber das ist erlernbar. Bedenklicher ist es – und das kommt bisweilen vor – wenn sie den Grundlagen der Geometrie und Analysis ganz fremd geblieben sind. Wirklich vertiefende Behandlung von Problemen der Elementarmathematik auf der Universität ist höchst wünschenswert. Auch die Geschichte der Mathematik könnte wohl etwas weniger stiefmütterlich behandelt werden. Nicht an allen Universitäten scheint Wert auf Determinanten, Zahlentheorie und projektive Geometrie gelegt zu werden. Auch die Kandidaten der reinen Mathematik sollten nicht versäumen, Kollegia über an-

*) Vgl. W. Lorey. Die Entwickelung der mathematischen Ausbildung der Lehramtskandidaten an den norddeutschen Universitäten und technischen Hochschulen.

gewandte Mathematik zu hören, besonders aber an Übungen im Feldmessen, in Astronomie und am Zeichnen teilnehmen, wenn sie es nicht genügend auf der Schule getrieben haben.

Auf die sehr wünschenswerte gründliche philosophische Ausbildung der Mathematiker wurde schon an anderer Stelle hingewiesen. Die Prüfung in Religion und Deutsch könnte getrost fortfallen und dafür mehr Philosophie verlangt werden.

c) Studium auf technischen Hochschulen.

In den Antworten auf die Frage: „Soll die ganze Ausbildung der Lehramtskandidaten auch den technischen Hochschulen übertragen werden?" bekennen die meisten, daß ihnen die Verhältnisse an technischen Hochschulen nicht hinreichend bekannt sind. Die, welche auf einer solchen studiert haben, sind ausnahmslos von der Nützlichkeit, manche von der Notwendigkeit eines mehrsemestrigen Studiums auf einer technischen Hochschule überzeugt. Für volle Parität der Universitäten und technischen Hochschulen treten 12 % der abgegebenen Stimmen ein. Die Mehrzahl erheben Bedenken, nicht wegen der fachlichen sondern wegen der allgemeinen Ausbildung. Es scheinen zur Zeit noch nicht an allen technischen Hochschulen die Bedingungen erfüllt zu sein, die gegen eine gewisse Einseitigkeit des Studiums schützen, an anderen mag es darin mindestens so gut wie an manchen Universitäten stehen.

d) Pädagogisch-praktische Ausbildung.

Leider fehlen aus Bremen Angaben über die Gestaltung von Seminar- und Probejahr. Lübeck überläßt die Ausbildung der Kandidaten den Nachbarstaaten, verlangt aber eine solche für die Anstellung. So muß der Bericht sich in diesem Punkte auf Hamburg beschränken.

Die Annahme der Kandidaten erfolgt in Hamburg zu jedem beliebigen Termin. Nachteilige Folgen haben sich daraus nicht ergeben, da bei der theoretischen Anweisung eben mit dieser Tatsache gerechnet und bei der praktischen Anleitung darauf Rücksicht genommen wird, falls der Kandidat mitten im Semester eintritt. Die Kandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften werden in der Regel einer Oberrealschule oder einem Realgymnasium zugewiesen. Die Zahl der Seminarkandidaten an einer Anstalt schwankt zwischen 4 und 12. Jeder Kandidat wird einem erfahrenen Oberlehrer seines Spezialfaches zur Ausbildung zugewiesen. Tunlichst hat ein Oberlehrer nur für e i n e n Seminarkandidaten die Verantwortung, bisweilen allerdings daneben noch für einen Probekandidaten. Der anleitende Oberlehrer bestimmt völlig selbständig, welchen Stunden der Kandidat zuzuhören hat, das ist in erster Linie in der Klasse und in dem Fach der Fall, wo er möglichst bald auch unterrichten soll. Das reine Zuhören wird selten über 14 Tage ausgedehnt, dann erfolgen die ersten Unterrichtsversuche

in Gegenwart des Oberlehrers. Erweist sich der Kandidat als der Sache einigermaßen gewachsen, so wird ihm, meist schon im ersten Vierteljahr eine mehrere Stunden hintereinander beanspruchende Aufgaben gestellt. Hier wird der Kandidat bald auch eine oder mehrere Stunden allein gelassen, um sich über seine Fähigkeit Disziplin zu halten, klar zu werden. Erst wenn diese Anfangsstadien überwunden sind, hört der Direktor sich den Kandidaten an, bespricht die Stunde mit dem Oberlehrer und überläßt diesem die weitere Mitteilung an den Kandidaten. Das Überspringen der Zwischeninstanz hat sich nicht als praktisch erwiesen. Natürlich erfolgt die Besprechung auch oft im unmittelbaren Anschluß an die Stunde zwischen Direktor, Oberlehrer und Kandidat. Ist der Direktor einmal zufällig allein bei dem Kandidaten anwesend, so ist es jedenfalls nötig, daß er dem verantwortlichen Oberlehrer Mitteilung über seine Beobachtungen und seine etwaigen Äußerungen dem Kandidaten gegenüber macht. Des Eingreifens in den Unterricht enthalten sich Oberlehrer und Direktor in der Regel, da der Verlust, den der Kandidat an Autorität erleidet, meist größer ist als der Nutzen. Nach der Stunde ist hinreichend Gelegenheit, den Kandidaten auf alle Fehler aufmerksam zu machen, nötigenfalls wird Einreichung der schriftlichen Vorbereitung auf die nächste Stunde verlangt. Es wird darauf gesehen, daß der Kandidat wöchentlich mindestens 4 solcher beaufsichtigten Stunden, sogenannten „Anleitungsunterricht“, erteilt.

Daneben hospitiert er systematisch nach Anweisung des Oberlehrers zuerst in seinen Spezialfächern auf allen Unterrichtsstufen bis zur Vorschule einschließlich, sodann auch in den übrigen Schulfächern, wenn auch in bescheidenem Umfang. Wöchentlich hat er dem Direktor einen Stundenplan über seine Tätigkeit einzureichen. An einzelnen Anstalten wird auch ein schriftlicher Bericht über die gehörten und erteilten Stunden verlangt. Dieser geht durch Vermittelung des Oberlehrers an den Direktor, wodurch Taktlosigkeiten im Entstehen unterdrückt werden. Da in den großen Kollegien häufig Vertretungen notwendig sind, wird der Kandidat früh und oft zu solchen herangezogen. Hier ist er ganz selbständig, muß aber dem Oberlehrer berichten, was er getan hat. Die wöchentliche Beschäftigung mit Seminarkonferenzen Anleitungs-, Hospitier- und Vertretungsstunden soll die Zahl von 18 Stunden nicht überschreiten, schwankt gewöhnlich zwischen 12 und 15. Im zweiten Vierteljahr erhält der Kandidat oft schon den Unterricht in ein bis zwei Fächern auf verschiedenen Klassenstufen. Den praktischen physikalischen Übungen einer Klasse hat er außerdem beizuwohnen und helfend oder auch selbständig einzugreifen. Wenn eine Klasse in zwei getrennten Teilen die Übungen ausführt, ist es Brauch, daß der Oberlehrer die erste Abteilung übernimmt und der Kandidat in dieser Stunde assistiert. Die zweite Abteilung leitet dann der Kandidat selbständig. Das Zuhören des Oberlehrers wird, wenn der

Kandidat die nötige Sicherheit besonders in disziplinarer Beziehung hat, mehr auf regelmäßige Besuche beschränkt. Im zweiten Semester erhält der Kandidat häufig schon einige lehrplanmäßige Stunden ganz selbständig zugewiesen, die dann auch remuneriert werden. Daneben behält er den Anleitungsunterricht in einem Fache bei. Diesem wohnt der Oberlehrer öfter, dem selbständigen gelegentlich bei. Im Seminarjahr hat sich der Kandidat in der Sammlung gründlich zu orientieren, wozu schon die Praktika den nötigen Anlaß geben. Außerdem sind alle Seminarkandidaten der Physik verpflichtet, an dem wöchentlich einmal 2—3stündigen physikalischen Handfertigkeitsunterricht auf der Oberrealschule auf der Uhlenhorst teilzunehmen.

Für die theoretische Unterweisung ist wöchentlich eine einstündige Konferenz während der Schulzeit angesetzt. Diese leitet der Direktor. Soviel wie möglich werden allgemeine Fragen des Unterrichts und der Erziehung diskussionsweise behandelt. Die Methodik der einzelnen Unterrichtsfächer wird von erfahrenen Fachmännern in großen Zügen vorgetragen, Diskussionen schließen sich unmittelbar daran oder werden eine Woche später in Gegenwart des Vortragenden vorgenommen. Jeder Kandidat hat ein Referat über ein pädagogisch wertvolles Buch zu liefern, z. B. von Locke, Basedow, Pestalozzi, Herbart, Jäger, Förster, Wernicke, Lietz, Wetekamp, Reidt, Simon, Schwering, Klein, Wellstein, Höfler, Killing, Veröffentlichungen der IMUK; die eifrige Benutzung der Seminarbibliothek wird vom Direktor gefördert. Die Protokollführung bei den Seminarkonferenzen wechselt ab. An anderen Anstalten hat jeder Kandidat über jede allgemeine oder Fachkonferenz ein Protokoll einzureichen.

Es soll nicht verschwiegen werden, daß der regelmäßige Gang gewisse Unterbrechungen durch Vertretungen an anderen Anstalten erleidet. Sind diese von kurzer Dauer und nicht im Anfang des Seminarjahres, so können sie sogar nützlich sein: Der Kandidat lernt andere Anstalten und Methoden kennen. Bedenklich ist es, wenn der Kandidat auf ein Vierteljahr dem anleitenden Herrn entzogen wird. Daß er den Seminarkonferenzen und dem physikalischen Handfertigkeitsunterricht beiwohnt, genügt nicht.

Der Kandidat hat an allen Konferenzen und an allen Klassenprüfungen teilzunehmen, soweit er nicht durch eigenen Unterricht verhindert ist. Wenn nach den Klassenprüfungen die Zensuren für diese Stunde zwischen Fachlehrer und Direktor verabredet werden, haben die Kandidaten das Recht, ihr abweichendes Urteil auszusprechen, ja sie werden ausdrücklich dazu aufgefordet, wenn die höheren Instanzen uneins sind.

In den Fragebogen haben die meisten Herrn die Ansicht vertreten, daß ein Seminarjahr im allgemeinen für die Ausbildung ausreicht. Ich möchte dem nur zum Teil zustimmen. Sehr nützlich ist es jedenfalls, wenn der Kandidat im zweiten Jahre eine andere Anstalt gründlich

kennen lernt. Auch ist selbst bei befriedigenden Leistungen im Seminarjahr nicht immer ein sicheres Urteil möglich, ob der Kandidat bei völliger Selbständigkeit erfolgreichen Unterricht zu geben imstande ist. Daß die Schulverwaltung sich dies Probejahr vorbehält, erscheint gerechtfertigt. Nicht unwichtig ist auch, daß der Kandidat, nachdem er am Schluß des Seminarjahres eine wissenschaftlich-pädagogische Arbeit abgeliefert, zum Schluß des Probejahres einen mehr praktischen Bericht über seine gesamte Unterrichtstätigkeit zu machen hat. Nach dem ersten Jahre dürfte er in der Regel nicht dazu imstande sein. Im Probejahre werden die Kandidaten in der Regel mit einer größeren Stundenzahl remuneriert beschäftigt. Bleiben sie an der Anstalt, so wechseln sie oft den überwachenden Oberlehrer, um wenigstens noch eine andere Methode kennen zu lernen. Monatliche Revisionen durch den Oberlehrer und eine eingehende Prüfung der Klassen durch den Direktor am Schlusse des Semesters sind die Regel.

Der Schulrat verfolgt die Entwickelung der Kandidaten mit besonderer Aufmerksamkeit. Bei jedem Besuch in der Anstalt oder wenn der Direktor aus anderen Gründen oder gerade zu diesem Zweck auf der Oberschulbehörde erscheint, werden sämtliche Kandidaten eingehend besprochen. Besondere Vorkommnisse werden sofort schriftlich oder mündlich mitgeteilt. Der Schulrat hört jeden Kandidaten mindestens in jedem Semester, sind Bedenken gegen die Zulassung zum Probejahre oder die Zuerkennung des Anstellungsfähigkeitszeugnisses vorhanden, erheblich öfter. An diese Besuche knüpft sich sofort eine eingehende Kritik, die der Schulrat entweder dem Kandidaten direkt in Anwesenheit des überwachenden Oberlehrers und des Direktors ausspricht oder den beiden letzteren zu geeigneter Weitergabe übermittelt. Der Schulrat entscheidet auf Grund seiner eigenen Beobachtungen, der wiederholten mündlichen Berichte des Direktors und des schriftlichen Schlußberichts des Oberlehrers und des Direktors über die Zulassung zum Probejahre und später über die Zuerkennung des Anstellungsfähigkeitszeugnisses. Die Verweigerung des ersteren wie des letzteren ist wiederholt vorgekommen entweder nur hinausschiebend, dann gewöhnlich mit Versetzung an eine andere Anstalt verbunden, oder endgültig.

Die pädagogische Ausbildung der Kandidaten auf die Universitäten zu verlegen, hat bei der Rundfrage nirgends Fürsprecher gefunden. Das schließt aber nicht aus, daß eine gründliche Bekanntschaft mit der Geschichte der Pädagogik von der Universität aus nötig ist und Vorlesungen über Methodik der Elementarmathematik sehr erwünscht sind.

Zum Schluß seien die Titel einiger Seminararbeiten erwähnt. Die betreffende Literatur hat der Kandidat aus Rethwisch' Jahresberichten über das höhere Schulwesen zusammenzustellen und erhält dann vom Direktor die wichtigeren Originalarbeiten zum eingehenden Studium Die Aufgaben werden aber so gewählt, daß der Kandidat Gelegenheit hat, die Theorie in der Praxis zu erproben oder nach ihr zu modi-

fizieren. Da er die Arbeit im ersten Monat erhält und im neunten abzuliefern hat, ist ihm hinreichend Zeit gegeben, eigene Erfahrungen zu sammeln.

Welche Einschränkungen kann der arithmetisch-algebraische Unterricht in den Mittelklassen erfahren?

Aus welchen Gründen empfiehlt es sich, im Anfangsunterricht der darstellenden Geometrie von der schiefen Parallelprojektion ausgiebigen Gebrauch zu machen?

Wie weit kann und wie weit soll der Rechenunterricht in den unteren Klassen der höheren Schulen den Unterricht in der Arithmetik vorbereiten?

Welche Teile der Kreislehre lassen sich an den Anfang des Unterrichts in der Planimetrie stellen?

Der geometrische Unterricht in der Quarta mit besonderer Berücksichtigung von M. Schusters „Geometrischen Aufgaben".

Wie läßt sich der Unterricht in der sphärischen Trigonometrie auf die stereometrische Behandlung nur der rechtwinkligen Ecke aufbauen?

Behandlung der Integralrechnung in Oberprima, ausgehend vom bestimmten Integral.

Die Logik im Lehrplan der Oberrealschule.

Wie gestaltet sich in der Sekunda die Behandlung der Trigonometrie bei möglichst genauem Anschluß an die Planimetrie?

Wie weit läßt sich Geschichte der Philosophie an den physikalischen und chemischen Unterricht anschließen?

Die Verwertung des Zeichnens beim Unterricht.

Induktion und Deduktion im geometrischen Unterricht.

Schlußwort.

Wenn in der Einleitung gesagt wurde, daß der vorliegende Bericht als eine gemeinsame Studie einer größeren Anzahl hanseatischer Mathematiker in der Selbstbeobachtung ihres Unterrichtes zu betrachten sei, so lag es nahe, eine mehr objektive Ergänzung dadurch zu suchen, daß mehrere Anstalten eingehend besichtigt und der Befund geschildert wurde. Das kann aber nur ein Fernstehender tun und eine Vervollständigung in der Beziehung ist für diesen Bericht ebenso wünschenswert wie für mehrere andere Berichte über deutsche Staaten. Einstweilen muß es dem Leser überlassen bleiben, der Schilderung das Maß von Vorsicht entgegenzubringen, das er Autobiographien gegenüber für notwendig hält.

DAS GROSSHERZOGTUM MECKLENBURG-SCHWERIN

VON

N. GEUTHER.

I. Allgemeines über die höheren Schulen.

Die höheren Schulen des Großherzogtums unterstehen der Abteilung für Unterrichts-Angelegenheiten des Großherzogl. Ministeriums und werden daselbst durch einen vortragenden Rat (einem Mathematiker folgte 1900 als solcher ein Altphilologe) vertreten. Ein Drittel der höheren Schulen sind großherzoglich, d. h. sie werden vom Landesherrn als dem Besitzer des Domaniums (ca. $42^1/_2\,\%$ des ganzen Landes) aus eigenen Mitteln unterhalten, während alle übrigen städtisch sind und bis auf eine Ausnahme ohne irgendeinen Zuschuß von seiten der Regierung bestehen; daß hierdurch an manche Stadtverwaltung hohe Anforderungen gestellt werden, ist klar, und man muß die Opferwilligkeit des Mecklenburger Bürgertums bewundern, wenn man erfährt, daß Städte von 6 oder 7000 Einwohnern im Besitz einer neunklassigen Vollanstalt sind. Da, wie erwähnt, sich die Regierung an der finanziellen Sicherstellung der städtischen Schulen nicht beteiligt, so hat sie bei diesen auch keinen unmittelbaren Einfluß auf die Anstellung und Versetzung von Lehrern (es steht ihr in manchen Schulen nicht einmal das Bestätigungsrecht zu) und hat kein Recht, in die Regulierung der Lehrergehälter einzugreifen. Während die Oberlehrer an den großherzoglichen Schulen z. Z. ihr Höchstgehalt von 6500 M in 25 Jahren erreichen, finden sich bei den städtischen Kollegen Grenzstufen von 6000 M in 25 Jahren, aber auch von 8000 M in 21 Jahren vor. Einer Gleichstellung mit den Richtern, wie sie in den größeren Bundesstaaten endlich durchgeführt ist, können sich die Mecklenburger Oberlehrer noch nicht erfreuen; ebenso bestehen über Verleihung des Professortitels keine Bestimmungen: in der Regel wird jedoch an die für das Lehramt an höheren Schulen geprüften Lehrer der Vollanstalten nach ca. 19jähriger Dienstzeit der Titel „Gymnasialprofessor“ verliehen; für ältere Direktoren ist keine besondere Titulatur vorgesehen. – Für die großherzoglichen höheren Schulen sind allgemeingültige Lehrpläne herausgegeben, während von den städtischen Schulen

eine jede sich nach ihrem eigenen, vom Ministerium genehmigten, Lehrplan, sowie nach einer eigenen Schulordnung richtet.

Im Großherzogtum, das nach der letzten Volkszählung fast 640000 Einwohner zählt, befinden sich folgende höhere Schulen:

Art der Schule	großh.	städt.	Sa.
Gymnasien	4	3	7
Realgymnasien	2	4	6
Realprogymnasien	1	1	2
Realschulen	–	5	5
Sa.	7	13	20

In den 184 Klassen sämtlicher Schulen wurden Ostern 1910 gegen 4400 Schüler unterrichtet. Es kommt also auf je 32000 Einwohner eine höhere Schule und auf je 145 Einwohner ein Schüler. Vergleicht man hiermit die Zahlen, die sich aus einer entsprechenden Zusammenstellung über die benachbarte und geographisch gleichartige preußische Provinz Pommern ergeben, so kommt man zu einem Ergebnis, das dem Bildungsbedürfnis der Mecklenburger kein schlechtes Zeugnis ausstellt: in Pommern mit ca. 1700000 Einwohnern, 38 höheren Schulen und gegen 8900 Schülern kommt auf je 44000 Einwohner erst eine Schule und 1 Schüler auf je 200 Einwohner.

Die höheren Mädchenschulen im Großherzogtum, die teils städtisch, teils privater Art sind, brauchen an dieser Stelle nicht erwähnt zu werden, da man zur Zeit erst angefangen hat, an ihnen die Mathematik als Lehrgegenstand einzuführen. Da das großherzogliche Ministerium der Koedukation gegenüber sich ablehnend verhält, hat die Stadt Rostock an ihrem Gymnasium Mädchen-Parallelklassen errichtet, um solchen Schülerinnen, die nach Besuch einer „höheren Töchterschule“ sich wissenschaftlich weiterbilden wollen, die Möglichkeit dazu zu geben. Weil die unterste dieser Klassen der Untersekunda gleichgestellt ist, müssen die Besucherinnen derselben in 4 Jahren denselben mathematischen Stoff bewältigen, zu dessen Durchnahme den Knaben 7 Jahre zur Verfügung stehen. Da bis jetzt nur die beiden Sekunden besetzt sind, so kann man über diese Einrichtung kein abschließendes Urteil fällen. Auffällig und zu bedauern ist, daß das Land trotz der gut besuchten 5 Realschulen noch keine Oberrealschule besitzt.

Das Großherzogtum Mecklenburg-Strelitz, dessen Einwohnerzahl sich auf ca. 104000 beläuft, besitzt 6 höhere Schulen, nämlich 3 Gymnasien, wovon das großherzogliche als lutherisches, die beiden städtischen als evangelische bezeichnet werden, 2 Realschulen (1 großherzogliche und 1 städtische) und 1 Realprogymnasium mit 2jähriger Sekunda. Die Lehrpläne der einzelnen Schularten sind den entsprechenden preußischen angepaßt, so daß besondere Eigenart nicht hervorzuheben ist, und die folgenden Darlegungen sich auf die Verhältnisse des Großherzogtum Mecklenburg-Schwerin beschränken.

II. Der mathematische Unterricht.

A. Die Gymnasien.

Der für die großherzoglichen Anstalten im Jahre 1900 herausgegebene Lehrplan ist auch dem Unterricht an den städtischen Schulen zugrunde gelegt. Die Stundenverteilung ist folgende:

	VI.	V.	IV.	U III.	O III.	U II.	O II.	I.	Sa.
Rechnen	4	4	2						
Arithmetik				2	2	2	2	2	32
Geometrie			2	2	2	2	2	2	
Naturg. u. Physik	2	2	2	1	1	2	2	2	14

Wie aus der Zusammenstellung ersichtlich ist, stehen ebenso wie nach dem preußischen Lehrplane von 1901 den mathematisch-naturwissenschaftlichen Lehrfächern 46 Stunden zur Verfügung; die beiden Tertien sind gleich den anderen Klassen mit je 4 Stunden bedacht und zwar zum Nachteil der Naturgeschichte, die mit 1 Wochenstunde auskommen muß. Die Verteilung des mathematischen Lehrstoffes in den Oberklassen ist folgende:

O. II. Geometrie: Ebene Trigonometrie. Neuere Geometrie.
Arithmetik: Ausgewählte quadratische Gleichungen mit 1 und 2 Unbekannten; arithmetische und geometrische Reihen und einfache Zinseszinsrechnung.

I. Geometrie: Stereometrie. Analytische Geometrie: Gleichung der geraden Linie, des Kreises, der Parabel, Ellipse, Hyperbel; Bestimmung der Gestalt aus der Gleichung. Tangenten.
Arithmetik: Ausführliche Behandlung der Zinseszins- und Rentenrechnung und ebenso der Gleichung 2. Grades mit mehreren Unbekannten. Kubische Gleichungen. Diophantische Gleichungen. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Binomischer Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

Beim arithmetischen Unterricht ist in den meisten Anstalten die Aufgabensammlung von Bardey in Gebrauch; in den Lehrbüchern für den geometrischen Unterricht ist hingegen keine Einheitlichkeit herauszufinden. Das zur Verwendung kommende Lehrbuch wird überall dem Unterrichte möglichst zugrunde gelegt und dient hauptsächlich als Anhalt bei den Wiederholungen. Den fünfstelligen Logarithmen gibt man noch fast allerorts den Vorzug vor vierstelligen. In der Stereometrie macht man von Körpermodellen ausgiebigen Gebrauch; wo es die Zeit zuläßt, werden solche auch von Schülern hergestellt. Der geometrische Unterricht beginnt in der IV. mit einem vorbereitenden Teil; dieser liegt stets in den Händen des Oberlehrers, dem die wissenschaftliche Weiterführung anvertraut ist; daß man die Wichtigkeit dieses Anfangsunterrichts nicht verkennt, zeigt Schwerin, wo man ihn gerade von den älteren Fachlehrern erteilen läßt.

In der Reifeprüfung, deren Beibehaltung allgemein gewünscht wird und die man für zweckmäßig hält, besonders wenn dabei das Ergebnis der Schulleistungen in gebührender Weise berücksichtigt wird, werden für den schriftlichen Teil 5 Aufgaben gestellt: je eine aus der Planimetrie oder der analytischen Geometrie, aus der Trigonometrie, aus der Stereometrie, aus der Arithmetik und aus der Algebra. In 5 Stunden sind die Lösungen dieser Aufgaben anzufertigen.

B. Die Realgymnasien.

Von den Realgymnasien ist dasjenige zu Güstrow wegen seiner von den übrigen abweichenden Eigenart hier ausgeschieden und unten in einem besonderen Abschnitt behandelt. Für die übrigen 5 Anstalten ist der Verteilungsplan folgender:

	VI.	V.	IV.	UIII.	OIII.	UII.	OII.	UI.	OI.	Sa.
Rechnen	4	4	2	1	1					12
Mathematik			2	4	4	5	5	5	5	30
Physik						3	3	3	3	12
Chemie							2	2	2	6
Naturgeschichte	2	2	2	2	2	2				12
Zeichnen	–	2	2	2	2	2	2	2	2	16

Hierzu ist zu bemerken, daß Rostock den Rechenunterricht schon in IV beendet und in UIII mit 5 Stunden Mathematik beginnt, Ludwigslust in UIII noch eine Rechenstunde beibehält und in OIII dann mit 5 Mathematikstunden einsetzt. Da den Realgymnasien eine ziemlich große Bewegungsfreiheit in bezug auf den mathematischen Lehrstoff gelassen ist, so ist besonders in den Pensen der oberen Klassen nur für manche Gebiete Einheitlichkeit zu finden. Es wird allgemein gelehrt in OII: Lösung quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten, Zinseszins- und Rentenrechnung; Erweiterung der in UII begonnenen Trigonometrie, Stereometrie und Teile aus der neueren Geometrie; in I Kombinatorik mit Wahrscheinlichkeitsrechnung, sphärische Trigonometrie mit Anwendung auf die mathematische Geographie. – Außerdem werden noch an einzelnen Anstalten behandelt: Kubische Gleichungen, Kettenbrüche, diophantische Gleichungen, näherungsweise Auflösung von numerischen Gleichungen, arithmetische Reihen höherer Ordnung, Elemente der Lehre von den Funktionen, Grundlehren der darstellenden Geometrie u. dgl. m.

Die zur Verwendung kommenden Lehrbücher zeigen auch hier eine große Mannigfaltigkeit; kaum bei zwei Anstalten kehrt derselbe Verfasser wieder. An einer Anstalt gebraucht man neben 6-stelligen Logarithmen auch 4-stellige. Die Lehrbücher dienen auch hier nur zur häuslichen Repetition und zur Entnahme von Aufgaben. In der Stereometrie werden wie im Gymnasium zur Veranschaulichung überall passende Modelle verwendet, auch gelegentlich von Schülern selbst

hergestellt. Der Ausführung von praktischen Übungen, wie Vermessen im Freien, stehen vielfach Hindernisse entgegen, wie zu große Schülerzahl, Mangel an geeigneten Instrumenten u. a. m.

Die Differential- und Integralrechnung hat im allgemeinen noch keinen Eingang gefunden; nur wo der physikalische Unterricht dazu Veranlassung gibt, wird an einer Schule gelegentlich von ihr Gebrauch gemacht: in der Bewegungslehre wird z. B. die mittlere Geschwindigkeit als Differenzenquotient, die augenblickliche Geschwindigkeit als Differentialquotient zum Ausdruck gebracht. Die für die Technik so wichtige darstellende Geometrie wird noch sehr vernachlässigt; nur in Ludwigslust werden ihre Grundlehren von einem Mathematiker in I behandelt, sonst überläßt man sie ganz dem Zeichenunterricht, der an allen Anstalten von V an bis in I obligatorisch ist. Die Reifeprüfung erstreckt sich in ihrem schriftlichen Teil auf das ganze Pensum der I und soll dem Schüler Gelegenheit geben, an 5 Aufgaben seine Fähigkeiten zu erproben. Die Aufgaben sind ähnlicher Art wie die an den Gymnasien, werden jedoch meist so gewählt werden, daß sie an den Prüfling höhere Anforderungen stellen als dort; die umfangreichere Vorbildung des Schülers berechtigt ja dazu. Die Ersetzung der 5 Aufgaben durch eine einzige größere hält man nicht für zweckmäßig, da dadurch die Prüfung erschwert werden könnte. Die Abschaffung der ganzen Reifeprüfung wird nur von einer Seite befürwortet, sonst hält man das Fortbestehen des Abschlußexamens in seiner jetzigen Form allgemein für notwendig.

C. Die Realschulen.

Die 5 Realschulen des Landes, die sämtlich unter städtischem Patronate stehen, (eine 6. soll z. Z. in der Residenz von privater Seite eingerichtet werden), werden von ca. 1300 Schülern besucht, wovon allein fast die Hälfte auf die Rostocker Schule kommt. Die Lehrpläne weichen nur wenig von den in Preußen für die gleichartigen Schulen gültigen ab. In der Schlußprüfung werden in der Mathematik auch 3 Aufgaben gestellt, meist je eine arithmetische, planimetrische oder trigonometrische und stereometrische. Daß man hierbei in den Seestädten von den Schülern auch gelegentlich Vertrautheit mit seemännischen Ausdrücken voraussetzen darf, erhellt aus Aufgaben, wie sie z. B. Wismar (1909) stellt:

Das Feuerschiff Fehmarnbelt (A) bildet mit den Leuchttürmen Westermarkelsdorf (B) und Marienleuchte (C) ein Dreieck mit den Seiten $AB = 5$ Seemeilen, $AC = 7$ Seemeilen und $BC = 6{,}5$ Seemeilen. Während eines nächtlichen auflandigen Sturmes wird $\sphericalangle BAC = 72^\circ 8'$ mittelst des Sextanten gemessen. Muß das Feuerschiff wegen Vertriebenseins gelöscht werden?

III. Das Realgymnasium in Güstrow und die Tätigkeit Seegers.

Das Realgymnasium zu Güstrow ist eine Reformanstalt nach Altonaer System, weicht jedoch in seiner Stundenverteilung mehrfach

von der allgemeinen Regel ab, so daß es als zweckdienlich erscheinen kann, wenigstens für die Hauptfächer den Plan wie folgt anzugeben:

	VI.	V.	IV.	U III.	O III.	U II.	O II.	I.	Sa.
Französisch	6	6	6	4	4	4	4	4	38
Englisch	–	–	3	3	3	3	3	3	18
Latein	–	–	–	7	7	6	6	6	32
Rechnen	6	4	2	1	1	–	–	–	14
Mathematik	–	2	4	4	4	5	5	5	29
Naturgeschichte	2	2	2	2	2	–	–	–	10
Physik und Chemie	–	–	–	–	–	4	4	4	12

Die Verteilung des mathematischen Stoffes ist im einzelnen folgende: Die Geometrie setzt in V ein; der vorbereitende Teil macht hier den Schüler mit der geraden Linie, Strecken, Kreisbogen, Winkeln, Zentriwinkeln, Parallelen, den verschiedenen Arten des Dreiecks und des Vierecks und der Kongruenz bekannt. In der IV bis zur O III werden dann die Hauptlehren über Kongruenz, Gleichheit und Ähnlichkeit der Figuren durchgenommen, so daß in U II die Planimetrie mit der rechnenden Geometrie, der Quadratur des Kreises und Anwendung der Algebra zur Lösung geometrischer Aufgaben zum Abschluß gebracht wird. In U II bleibt dann noch Zeit, die Elemente der Trigonometrie durchzunehmen. Die Stereometrie, die sphärische Trigonometrie und aus der analytischen Geometrie die Haupteigenschaften der Kegelschnitte bilden den Lehrstoff der O II. In I werden die Kegelschnitte mit Hilfe der Infinitesimalrechnung genauer untersucht und als Abschluß der Geometrie die Elemente der neuen Geometrie durchgenommen. – Die Arithmetik schreitet in den Klassen IV, U III und O III von der Einführung in das Buchstabenrechnen bis zu den quadratischen Gleichungen und den Logarithmen vor, so daß in U II nach Behandlung der einfachen Reihen-, der Zinseszins- und Rentenrechnung noch einige Sätze aus der Zahlentheorie, die diophantischen Gleichungen und die Kombinatorik mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und dem binomischen Lehrsatz durchgenommen werden können. In der O II ergeben die arithmetischen Reihen höherer Ordnung, die kubischen Gleichungen und die Kettenbrüche den Übungsstoff zweier Wochenstunden. Nach den unendlichen Reihen bilden die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung den Hauptinhalt des arithmetischen Unterrichts der I; in O I kommen dann abschließend aus der Physik hinzu die Elemente der Mechanik als Anwendung der Infinitesimalrechnung. Die darstellende Geometrie ist auch hier ganz dem Zeichenunterricht überwiesen und erstreckt sich von O III bis O II, wo sie mit Durchdringungen gemischtflächiger Körper endigt; in I folgt ihr dann die Perspektive.

Das Güstrower Realgymnasium verdankt seine jetzige Gestalt seinem früheren Direktor Seeger († 1902), einem Manne, in dem sich Unternehmungsgeist mit Willenskraft paarte, einem echten Schulmanne, der,

vom Schicksal an den richtigen Platz gestellt und von den Zeitverhältnissen begünstigt, in der glücklichen Lage war, seine weitausschauenden pädagogischen Ideen zu verwirklichen. In seiner Jugend widmete sich Seeger zuerst dem kaufmännischen Berufe (1840), um so seine Kenntnisse, die er sich auf einer Realschule erworben hatte, zu verwerten; er lernte auf diesem Wege die Anforderungen kennen, die das Leben an das Können eines jungen Mannes stellt, ein Umstand, der wohl später manchen seiner Entschlüsse beeinflußt haben mag. Wohl nicht ganz befriedigt von seiner Tätigkeit, gab er seine aussichtsreiche Stellung wieder auf und trieb mit solchem Erfolge mathematische Privatstudien, daß er von 1849 bis 1853 die Vorlesungen von Dirichlet und Joachimsthal, von Gauß und Weber auf sich einwirken lassen konnte. Seine Lehrtätigkeit begann er an der Real- und Bürgerschule zu Güstrow und bewährte sich in dieser Stellung so, daß ihm 1861 die Leitung der selbständig gemachten Realschule übertragen wurde. Der Ausbau der jungen Schule sollte nun seine Lebensarbeit werden, und es gibt wohl kein geeigneteres Mittel, seine zielbewußte Tätigkeit kennen zu lernen, als wenn man die Entwicklung dieser Anstalt verfolgt.

Die leitenden Gedanken für seine schöpferische Wirksamkeit, die Ziele, die er sich für seine Schule jeweilig setzte, finden sich meist in den Beilagen zu den Jahresberichten verzeichnet. In diesen Blättern finden sich manche der damaligen Zeit weit vorauseilende Ideen über Wesen und Wert des mathematischen Unterrichts, manche Forderungen aufgestellt, die erst in jüngster Zeit in Erfüllung gegangen sind oder um die wir jetzt noch kämpfen müssen. Mit besonderem Nachdruck fordert er hier wiederholt die Einreihung der Differential- und Integralrechnung in das Gebiet der Schulmathematik. „Die Professoren der Mathematik an den Hochschulen“, schreibt er 1884, „sollten heutzutage bei ihren Zuhörern Sicherheit im Differentiieren und einige Gewandtheit in der Anwendung der einfachsten Integrationsmethoden voraussetzen dürfen.“ Über den Wert dieser Rechnungsart bemerkt er an einer Stelle treffend: „Der Infinitesimalkalkul ist nicht bloß für den Mathematiker von Fach erfunden. Eine Kenntnis der Fundamente der Differential- und Integralrechnung ist für den Physiker und den Ingenieur absolut unentbehrlich. Auch die Philosophie kann ihrer nicht entraten, und könnte der Philologe sie nur haben, er würde sicher seine allgemeine Bildung wesentlich gehoben fühlen. Der Infinitesimalkalkul ist eins der wirksamsten und notwendigsten Instrumente, die Schätze der Gedankenwelt zu heben, und niemand wird ein modernes naturphilosophisches Werk verstehen können, der nicht begreifen gelernt hat, wie man von dem Verhältnis zweier, oder der Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen reden kann und deren Wert genau zu bestimmen vermag.“ Klar und scharf faßt er (1862) die Aufgabe seiner Schule in folgende Sätze: „Die lateinlose Realschule will und soll sein eine allgemeine, höhere

Bildungsanstalt und zugleich eine Vorbereitungsanstalt für alle höheren Fachschulen, welche nicht die Kenntnis der alten Sprachen zur Bedingung der Aufnahme machen. Als allgemeine Bildungsanstalt soll sie nicht einem besonderem Stande vorzugsweise dienen, nicht den Bedürfnissen eines einzelnen bestimmten Berufes vor den übrigen Genüge tun. Sie soll vielmehr im Dienste der allgemeinen Menschenbildung stehen und soll nur berücksichtigen, was dem gebildeten Kaufmann ebenso unentbehrlich ist, wie dem gebildeten Techniker oder Landmanne. Als höhere Bildungsanstalt bekennt sich die Realschule dazu verpflichtet, ihre Schüler als solche anzusehen und zu behandeln, die berufen sind, dereinst an der Gestaltung des Lebens im Staate und in der Kommune selbständig Anteil zu nehmen."

Es gilt nun zunächst, die Richtlinien für die einzelnen Fächer festzustellen; besonders liegt ihm natürlich der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterrichtszweig am Herzen. Seine Gedanken über die Konzentration, die hierin herrschen soll, bringt er in folgender Weise zum Ausdruck: „Die 5 Fächer – Rechnen, Geometrie, Arithmetik, Physik und Chemie – sind nur 5 Teile eines einzigen zusammenhängenden Unterrichts, von denen die einen den für die anderen erforderlichen Übungsstoff herbeischaffen und dafür wiederum von diesen die Mittel zu eigenem Vorwärtsschreiten zurückempfangen." „So wenigstens sollte es sein und jedenfalls wird es dahin kommen," schließt er vertrauensvoll. Auf einen gut geordneten Rechenunterricht legt er großes Gewicht und um diesen auch noch in der Sekunda richtig verwerten zu können, wünscht er eine Aufgabensammlung dem Unterrichte zugrunde zu legen, „die sich aufs engste an den Gang des physikalischen Unterrichts anschließt und eine kleine aber gewählte Anzahl physikalischer Tabellen enthält, die der Schüler gezwungen wäre, zur Auflösung der im Buch enthaltenen Aufgaben fortgesetzt zu benützen. Wenn so der physikalische Unterricht dem Schüler einen Satz aus der Mechanik wie ein geometrisches Theorem beweist, der Rechenunterricht ihm aber Gelegenheit gibt zu sehen, wieviel sich mit einem solchen Satze praktisch ausrichten läßt, – dann arbeiten beide nach einem gemeinsamen Ziele." Für den geometrischen Unterricht verfaßte er selbst das nötige Lehrbuch, da die ihm zur Verfügung stehenden Lehrbücher seinen Absichten nicht entsprachen.

Neben der ebenen Trigonometrie und den Elementen der Stereometrie setzt er auf den Lehrplan der Sekunda im zweiten Jahre sphärische Trigonometrie, Bruchstücke der neueren Geometrie mit dem Berührungsproblem und bei genügender Zeit auch die Elemente der darstellenden Geometrie. Zeigt diese Zusammenstellung schon, daß Seeger sich von der alten Schablone des mathematischen Unterrichts losreißen konnte und neue Bildungsstoffe einführte, deren Wert zu jener Zeit noch wenig anerkannt war, so läßt sein Plan für den arithmetischen Unterricht (1864) erst recht erkennen, daß er sich hierin solcher pädagogischer Mittel bediente, die wir gern als modern bezeichnen; denn was ist es

weiter, als die jetzt fast überall gegebene Anleitung zur Auffassung des Funktionsbegriffes, wenn er vorschreibt: „Auffassung der linken Seite der allgemeinen Gleichung 2. Grades als ganze rationale Funktion von x, in welcher x alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen hat?“ Als in den siebziger Jahren das Realschulwesen in eine neue Entwicklungsphase trat, war Seeger in Mecklenburg der erste, der für seine Schule die Folgerungen aus diesem Prozeß zog. Für die Erweiterung seiner Schule zu einer vollständigen Realschule (mit zweijährigen Oberklassen) stellte er 1876 einen Lehrplan auf, der für die oberste Klasse die Teilung in zwei Sektionen vorsah, gerade so wie sie neuerdings an manchen Anstalten durchgeführt wird, nämlich in eine mathematisch-naturwissenschaftliche (in beifolgendem Plane mit M bezeichnet) und eine sprachlich-historische (S). Man vergleiche:

	VI.	V.	IV.	III.	II.	I.	
						M.	S.
Religion	3	2	2	2	2	2	2
Deutsch	4	4	4	3	3	3	3
Französisch	6	6	6	6	6	4	5
Englisch	–	–	4	4	4	4	5
Latein (u. Griechisch)	–	–	–	–	(4)	(4)	10
Geschichte u. Geographie	4	4	4	4	3	3	3
Rechnen u. Mathemathik	6	6	6	6	6	6	–
Naturwissenschaft	–	2	2	4	5	5	–
Zeichnen	–	2	2	2	3	4	–

Die Schwierigkeiten, auf die er bei einer solchen Erweiterung stoßen würde, verhehlte sich Seeger durchaus nicht, denn es war ein neuer Unterricht zu organisieren, für den es bis dahin, wenigstens was die eine Abteilung der Prima betrifft, ganz an Vorarbeiten und Erfahrungen fehlte. „Indessen wie schwierig mir auch das Unternehmen erscheint, ich kann es doch nicht für ein Wagestück halten, vor dem man sich scheu zurückziehen möchte“, schreibt er. Zu dieser Zweiteilung kommt es aber doch nicht, sondern es wird vielmehr (1879) Latein als Lehrgegenstand in II und I eingeführt, weil der französische Unterricht in diesen Klassen ohne dasselbe nicht in der gebührenden Weise fortschreiten kann. Die durch Aufsetzung der I erreichte vermehrte Stundenzahl gibt Veranlassung zur Erweiterung des Mathematikpensums; zur analytischen Geometrie treten nun noch die Elemente der synthetischen Geometrie, Kollineation, Affinität, Reziprozität und die neue Behandlung der Kegelschnitte. Für die Schüler findet Seeger in diesem Stoffe durchaus keine Schwierigkeiten und voll jugendlicher Begeisterung schreibt er: „Hat der Schüler sich mit den allgemeinen Theorien gut bekannt gemacht und hat er sich darin geübt, einen Kegelschnitt je nach Bedürfnis, bald als die kollineare Umbildung eines Kreises, bald als das Erzeugnis konformer Punktreihen oder Strahlenbüschel, bald als die Direktrix eines

Polarsystems anzusehen, so wird ihm, im ganzen genommen, die Ableitung der elementaren Eigenschaften des Kegelschnittes als ein heiteres Spiel erscheinen." 1879 genießt Seeger die Freude, daß seine Schule als Realschule erster Ordnung anerkannt wird und nun beginnt für ihn das Ringen um die „Berechtigungen." Im Anschluß an den „Allgemeinen deutschen Realschulmänner-Verein" fordert er zunächst die Zulassung der Realschüler zum Studium der Medizin. Doch „recht auffallend darf es erscheinen, daß der Staat fortfährt, den von den Städten mit so großen Opfern gegründeten Schulen vorzuenthalten, was er schon längst um seiner selbst willen denselben ungebeten hätte geben sollen", schreibt er 1880 und fährt energisch fort: „unsere Anstalt hat ein Recht zu fordern, daß ihr die Erfüllung ihrer Aufgabe (nämlich auch für diejenigen Schüler zu sorgen, bei denen es sich mit der Zeit herausstellt, daß sie dem Staate oder der Wissenschaft zu dienen berufen sind) nicht durch ein äußeres Hindernis erschwert oder unmöglich gemacht werde."

Neue Sorgen bereitete ihm das Zirkularschreiben des preußischen Unterrichtsministers vom 31. März 1882, denn die Güstrower Schule mit ihrem hohen Ziel für den mathematischen Unterricht und dem obligatorischen Latein-Unterricht in 4 Jahreskursen entsprach weder dem dort vorgeschlagenen Lehrplan eines Realgymnasiums, noch dem einer Oberrealschule. Seinen mathematischen Stoff zu verkürzen, — dazu hä te sich Seeger wohl nie bereit finden lassen; lieber hätte er auf das Latein ganz verzichtet. Glücklicherweise bot sich ihm ein passender Ausweg: der Lehrplan des Altonaer Reformrealgymnasiums gab ihm die Möglichkeit, mit einigen Abänderungen seinen eigenen Lehrplan beizubehalten und doch die staatliche Anerkennung zu erhalten. Es entstand (1885) so der Lehrplan, der noch jetzt für die Schule als Richtschnur dient und der eingangs angeführt ist. Daß in diesem Lehrplan das Pensum stark in die Breite gewachsen ist, erkennt Seeger selbst an. „Nun muß ich mir sagen", schreibt er darüber, „daß, wenn die Berliner Schulkonferenz vom Dezember 1890 über unseren Lehrplan abzuurteilen gehabt hätte, viele Mitglieder sich entsetzt und höhnisch ausgerufen haben würden, ob denn die Jugend, die schon überbürdet sei, völlig zugrunde gerichtet werden solle?" Überbürdung kennt nämlich Seeger nicht; „die Arbeit wird zu einer Bürde nur dann, wenn sie mit Unlust verrichtet wird." So kann doch nur ein Schulmann sprechen, der gewöhnt ist, in seinen Schülern dieselbe Begeisterung für die Wissenschaft zu entflammen, wie er sie in seinem eigenen Innern hegt. — Die Erkenntnis, daß seine Anstalt weit über das ihr ursprünglich gesetzte Ziel hinausgewachsen war, veranlaßte ihn 1898 wohl, den Forderungen des Bürgerstandes wieder entgegenzukommen und der Vollanstalt eine lateinlose Realanstalt anzugliedern. VI bis IV bilden den gemeinsamen Unterbau der beiden Schulen. So hat Seeger am Schlusse seiner schöpferischen Tätigkeit, die er dank des ihm entgegen-

gebrachten großen Vertrauens seiner Bürgerschaft frei entfalten konnte, der Stadt wieder die Schule gegeben, an der auch die Handwerker und Kaufleute die ihnen nötigen Kenntnisse erwerben können.

Die Bücher, die Seeger für seinen mathematischen Unterricht selbst verfaßte, sind noch an der Anstalt, und soviel bekannt, nur an ihr, im Gebrauch, aber weniger wegen ihrer Güte, sondern mehr aus Pietät gegen ihren Urheber, denn den Anforderungen, die man jetzt an Schulbücher stellt, entsprechen sie nicht mehr. Seine *Elemente der Geometrie* (in den 60er Jahren erschienen) enthalten eine zu große Menge von Lehrsätzen, denen meist ein Beweis nicht beigefügt ist und die dazu oft eine wissenschaftlichere Fassung haben, als es einem Schülerverstande genehm sein kann. Letzteren Nachteil lassen auch seine *Elemente der Arithmetik* erkennen; so beginnt z. B. das Pensum der IV mit dem Satze: „Das Zeichen = ist das Zeichen der quantitativen Gleichheit oder der arithmetischen Äquivalenz". Recht spärlich ist auch die Aufgabensammlung, die er seinem Buche beifügt. Für die I stellte er *die Elemente der algebraischen Analysis* zusammen, ein Werkchen, dem man anmerkt, daß es ganz aus der Praxis herausgewachsen ist. Die Grenzen eines Schulbuches jedoch überschreitet bei weitem seine *Fundamentaltheorie der neueren Geometrie* (1880), sowohl was den Inhalt als auch die Fassung anbetrifft. Nicht unerwähnt möge bleiben, daß Seeger neben der umfangreichen Tätigkeit für organisatorische Arbeit und den mathematischen Unterricht auch noch Zeit fand, für den französischen Unterricht die Lehrbücher zu schreiben, die die besondere Stellung dieses Faches an seiner Schule erforderte.

IV. Ausbildung der Kandidaten des höheren Lehramtes.

Durch Verordnung vom März 1891 ist den Kandidaten die Zurücklegung eines Vorbereitungs- sowie eines Probejahres vorgeschrieben. Das Vorbereitungsjahr, das für die hiesigen Kandidaten dieselbe Bedeutung hat wie in Preußen das Seminarjahr, ist an einer der höheren Vollanstalten des Landes abzuleisten. Vor Ablauf dieses Jahres hat der Direktor der betreffenden Schule an das Ministerium einen Bericht zu erstatten, der sich über die Führung des Kandidaten, über seine Tätigkeit während der Vorbereitungszeit, das von ihm bekundete Streben und den erreichten Grad der praktischen Ausbildung auszusprechen hat. Besondere Beweise der Tüchtigkeit des Kandidaten sind darin ebensowenig zu verschweigen, wie auffallende Mängel der Führung, des Strebens und der Leistungen. Eine Verlängerung des Vorbereitungsjahres oder Versagung der Zulassung zum Probejahr aus irgendwelchen Gründen ist in der Verordnung nicht vorgesehen. Zur Ableistung des Probejahres wird der Kandidat in der Regel einer anderen Anstalt überwiesen; als solche kann auch eine Schule mit 6 Jahreskursen gewählt

werden. Auf Grund der Direktorialberichte über das Vorbereitungs- und auch über das Probejahr erhält der Kandidat ein Zeugnis über die erlangte praktische Ausbildung für das Lehramt ausgestellt. Zu erwähnen ist hier, daß die Patronate der städtischen Schulen zu Güstrow und Wismar, die bei der Anstellung ihrer Lehrer keine ministerielle Bestätigung einzuholen brauchen, doch im wohlverstandenen Interesse für die Zukunft der Kandidaten nur solche als Oberlehrer anstellen, die ihre beiden Vorbildungsjahre erledigt haben, während das Patronat der Rostocker Stadtschulen auch gelegentlich ein anderes Verfahren einschlägt.

DAS GROSSHERZOGTUM OLDENBURG

VON

A. BÖTTGER.

I. Die höheren Knabenschulen des Großherzogtums.

1. Übersicht.

Das Großherzogtum Oldenburg besteht aus drei räumlich getrennten Gebietsteilen, dem Herzogtum Oldenburg, dem von der Rheinprovinz umschlossenen Fürstentum Birkenfeld und dem Fürstentum Lübeck, welches an die Provinz Schleswig-Holstein und die freie Hansestadt Lübeck grenzt. Das Land ist bis auf den Süden des Herzogtums, der dem alten Bistum Münster entstammt, protestantischer Konfession.

Das Großherzogtum Oldenburg hat zurzeit bei einer Einwohnerzahl von 482430 (1910) folgende öffentlichen höheren Knabenschulen:

5 großherzogliche Gymnasien, davon 4 mit Realabteilungen,
3 städtische Oberrealschulen, davon 2 in Entwicklung,
4 städtische Realschulen, davon 3 in Entwicklung.

Alle diese Schulen unterstehen dem großherzoglichen Ministerium der Kirchen und Schulen. Im besonderen unterstehen die evangelischen Schulen des Herzogtums Oldenburg dem Evangelischen Oberschulkollegium zu Oldenburg, das katholische Gymnasium zu Vechta dem Katholischen Oberschulkollegium daselbst, die beiden Schulen des Fürstentums Lübeck der Regierung zu Eutin und die beiden Schulen des Fürstentums Birkenfeld der Regierung zu Birkenfeld. Doch ist das Mitglied des Evangelischen Oberschulkollegiums Geh. Oberschulrat Prof. Dr. Menge zugleich im Ministerium Referent für die Angelegenheiten der nicht zum Bereiche des Evangelischen Oberschulkollegiums gehörigen höheren Schulen des Großherzogtums.

Mit zwei Realschulen sind Vorschulen verbunden. Die Stadt Oldenburg hat eine gemeinsame Vorschule für das Gymnasium, die Oberrealschule und die Cäcilienschule (höhere Mädchenschule).

Realgymnasien und Reformanstalten gibt es im Großherzogtum Oldenburg nicht.

2. Koedukation.

Gemeinsame Erziehung beider Geschlechter an höheren Schulen (Koedukation) besteht seit 1905, und zwar an den Realschulen zu Brake, Delmenhorst, Nordenham und Varel.*)

Die Entwicklung dieser Angelegenheit ist für Delmenhorst bis jetzt folgende gewesen: 1. Laut Statut der Realschule, genehmigt durch Verordnung des Staatsministeriums, Departement der Kirchen und Schulen, vom 14. Juni 1905 sollen bis auf weiteres von Ostern 1905 ab in der Realschule auch Mädchen aufgenommen werden. Der Unterricht kann in VI–U III Knaben und Mädchen gemeinsam, muß in O III und U II getrennt erteilt werden. So wurde verfahren bis Ostern 1909. Ausnahmsweise durften 1909/10 in O III Knaben und Mädchen gemeinsam unterrichtet werden. 2. Laut Statut der nunmehrigen Oberrealschule, genehmigt durch Verordnung vom 1. Mai 1910 trat folgende Änderung ein: Die Mädchen der O III und U II werden nach einem dreijährigen Lehrgange unterrichtet, der in allem Wesentlichen dem Lehrplane der drei ersten Klassen der preußischen höheren Mädchenschulen vom 12. Dezember 1908 entspricht. Die Aufnahme von Mädchen in O II und I bedarf in jedem Einzelfalle der Genehmigung des Ministeriums der Kirchen und Schulen. Der Verlauf der Koedukation ist hiernach dieser:

Mädchen Knaben	VI, V, IV, U III	S III, S II, S I O III, U II	O II, U I, O I.

(S = Selekta). Für 1910/11 ist den Mädchen aus O III vom Jahre 1909/10 ausnahmsweise der Eintritt in eine parallele U II nach dem Knabenlehrplane gestattet. Für die drei oberen Klassen die Koedukation allgemein zuzulassen, scheint nicht in der Absicht des Oberschulkollegiums zu liegen. Die Angelegenheit schwebt noch. Herr Geheimer Oberschulrat Prof. Dr. Menge stellt in einem Aufsatze der „Lehrproben und Lehrgänge" 1909, 1. Heft „Sollen wir Mädchen in die höheren Knabenschulen aufnehmen?" folgende Leitsätze auf:

1. Die Zulassung von Mädchen in die drei unteren Klassen (4. bis 6. Schuljahr) scheint nach den bisherigen Erfahrungen unbedenklich. 2. In die drei mittleren Klassen ist sie nur zu gestatten, wo eine besondere höhere Lehranstalt für Mädchen nicht beschafft werden könnte. 3. In die drei oberen Klassen ist sie versuchsweise dann zu gestatten, wenn der Aufbau einer Studienanstalt auf die höhere Mädchenschule des Ortes durch die Verhältnisse ausgeschlossen ist.

Danach scheint man verfahren zu sein, als man am Gymnasium zu Oldenburg Ostern 1910 die Aufnahme zweier Mädchen nach O II gestattete.

---

*) An den Mittelschulen der kleinen Städte bestand die gemeinsame Erziehung beider Geschlechter schon seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts.

Über den Erfolg der Einrichtung finde ich im Programm der Realschule zu Delmenhorst 1909 folgendes Urteil (bis UIII): Der Gemeinschaftsunterricht hat im allgemeinen befriedigt. Die Vierteljahrsurteile sowohl wie die Versetzungsergebnisse zeigen, daß Mädchen wie Knaben in gleicher Weise bestrebt sind ihre Schulpflichten zu erfüllen, und in gleichem Verhältnisse haben die beiden Geschlechter die Versetzung erreicht. Ein Unterschied ist bisher auch nicht in der Aufnahme des mathematischen Stoffes zu erkennen. Jedenfalls ist die im mathematischen Unterrichte verlangte straffere Denkarbeit den Knaben und Mädchen gleich nützlich und wird von den dafür Befähigten gleich willig und erfolgreich geleistet. – Doch sei für den mathematischen Untericht, wie ein Fachkollege schreibt, ein abschließendes Urteil auch jetzt, 1911, noch nicht möglich, einmal, weil die Einrichtung für die Mittelklassen erst kurze Zeit besteht, ferner weil in U III und O III bisher Mädchen auf ihren Wunsch und ohne Begründung von der Mathematik (und keinem anderen Fache) dispensiert werden konnten und endlich weil von den Mädchen sehr viele die Schule aus U III mit ihrer Konfirmation verlassen; mit Berücksichtigung dieser drei Umstände sei sein Urteil über die Erfolge in der Mathematik dahin abzugeben, daß die Mädchen (im allgemeinen) nicht ganz die Leistungen der Knaben erreichten. Ein anderer Fachkollege schreibt: Die Mädchen sind durchschnittlich schwächer als die Knaben. Es scheint ihnen sehr schwer zu fallen, ihre Gedanken längere Zeit zu konzentrieren. Auch ist ihr Anschauungsvermögen geringer als das der Knaben, so daß besonders in der Geometrie der Unterschied zugunsten der Knaben hervortritt. An der Realschule Varel läßt sich über die bisherigen Erfolge, soweit zur Zeit die Erfahrung reicht, auch in der Mathematik nichts zu ungunsten der Mädchen sagen.

3. Entwicklung und Lehrpläne der verschiedenen Anstaltstypen.

Die Entwicklung des oldenburgischen Schulwesens bez. seiner Lehrpläne und vornehmlich in Hinsicht auf den Mathematikunterricht sei veranschaulicht durch die Entwicklung des Gymnasiums und der Oberrealschule der Stadt Oldenburg.*)

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß eine lateinische Schule zu Oldenburg schon vor der Reformation und zwar in Verbindung mit dem Chorherrenstift der Lambertikirche vorhanden war. Aber erst nach Einführung der Reformation wurden im Anschluß an die neue Kirchenordnung von 1573 auch die Verhältnisse der lateinischen Schule geregelt. Ihr Schwerpunkt lag in der religiösen Erziehung und – zu deren Förderung – in der sprachlichen Ausbildung, und zwar einzig und allein durch das Lateinische. Mathematik und Realien

*) Vergl. Meinardus, Geschichte des großherzoglichen Gymnasiums in Oldenburg, 1878.

wurden ebensowenig gelehrt wie lebende Sprachen. Erst in der Schulordnung von 1703 traten erstere im Lehrplane auf, und zwar wird in V und IV vierstündig der Orbis pictus des Comenius, in III–I Geographie, in II Mathematik einstündig Sonnabends von $1-2^h$ gelehrt. Doch stand die Mathematik nur gelegentlich auf dem Plane, wenn sich gerade eine Lehrkraft dafür fand, was selten genug gewesen sein mag bei der durchaus theologisch-philologischen Vorbildung aller Lehrer und dem wie anderwärts herrschenden Klassenlehrersystem; denn jede Klasse hatte nur einen Lehrer, der den gesamten Unterricht erteilte. Französisch tritt im Lehrplane zum ersten Male 1755 auf; doch ist es diesem Fache im nächsten halben Jahrhundert nicht viel besser ergangen als der Mathematik.

Verschiedene Versuche, den Lektionsplan zu verbessern, unter anderen von dem Rektor J. M. Herbart, dem Großvater des großen Pädagogen, der selbst bis 1794 Schüler des oldenburgischen Gymnasiums gewesen ist, hatten geringen Erfolg. Erst 1792 gelang es dem ausgezeichneten Rektor Manso, im Verein mit dem Prinzenerzieher Kruse (gest. 1827 als Prof. der Geschichte in Leipzig) nach zwei Richtungen eine durchgreifende Verbesserung durchzuführen. Einmal wurde die alte von J. Sturm (Straßburg 1507–1589) gegründete Organisation des Klassengebäudes aufgehoben und das Fachlehrersystem eingeführt.*) Ferner wurde, um den immer dringender gewordenen Wünschen derjenigen Eltern entgegenzukommen, die ihre Kinder zwar nicht den gelehrten Berufen zuführen, ihnen aber doch eine gehobene Schulbildung zuteil werden lassen wollten, den bisherigen fünf Klassen eine sechste Klasse, die Commerz- oder Bürgerklasse angefügt. Diese Klasse vereinigte alle Schüler der niederen Stufen, also auch die, welche später in die Lateinklassen aufrückten, und die älteren Schüler, die sich nicht dem Studium widmen wollten, so daß der Altersunterschied der Schüler dieser Klasse ein außerordentlicher war und zusammen mit der wachsenden Schülerzahl den Anlaß zu weiteren Veränderungen gab. Diese Bürgerklasse gelangte bald zur Blüte durch die hervorragend praktische Tüchtigkeit von Joh. Christ. Aug. Heyse, dem Verfasser des bekannten Fremdwörterbuchs (1. Aufl. Oldenburg 1804), der von 1792–1806 hauptsächlich in dieser Klasse tätig war.

Von 1792 an hieß die lateinische Schule Gymnasium; die alten Titel Conrektor, Subconrektor, Cantor und Subcantor wurden durch die Titel Professor und Collaborator ersetzt.

---

*) Für jedes Fach gab es besondere Abteilungen, in denen man unabhängig von den anderen Fächern aufrückte, z. B. für Mathematik und Physik zwei Abteilungen (von nun an stehend eingeführt), Naturgeschichte eine Abteilung, Englisch zwei Abteilungen, Zeichnen drei Abteilungen. Deutsch vier Abteilungen, Lateinisch fünf Klassen (10–12 Stunden). Das reine Fachlehrersystem, wie es jetzt noch besteht, wurde erst 1837 durchgeführt.

Es sei noch erwähnt, daß in der so reformierten Anstalt auch das Seminar seinen Ausgang gefunden hat, indem die künftigen Landschullehrer der Bürgerklasse als Hörer zugewiesen wurden, selbst dann noch, als 1806 das Seminar ein eigenes Gebäude erhielt.

Das Jahr 1800 brachte eine neue Schulordnung, die so vorzüglich war, daß sie in den wesentlichen Zügen heute noch besteht. 1815 wurde das Abiturientenexamen eingerichtet. Das Jahr 1836 führte eine wichtige Veränderung für die Schüler der Bürgerklasse, für die sogenannten deutschen Schüler herbei. Diese wurden nicht mehr in einer Klasse unterrichtet, sondern wurden nach Fähigkeiten und Leistungen auf die verschiedenen Klassen bis Tertia verteilt und erhielten für die lateinischen und griechischen Stunden Ersatzunterricht. Aber auch diese Einrichtung bewährte sich nicht, die Verhältnisse drängten mehr und mehr zur Abspaltung der höheren Bürgerschule, die nach langjährigen Verhandlungen Ostern 1844 vorgenommen wurde, nachdem Michaelis 1843 schon die für beide Anstalten gemeinsame und mit der höheren Bürgerschule verbundene Vorschule gegründet und in diese die Quinta des Gymnasiums mit gelegt worden war.

Damit war nun beiden Anstalten, die vereint sich nur gegenseitig gehemmt hatten, eine freiere Entfaltung der ihnen innewohnenden Kräfte gewährleistet.

A. Die weitere Entwicklung des Gymnasiums in Stadt Oldenburg. Die Quinta kehrte 1849 zum Gymnasium zurück, 1862 wurde die Sexta eingerichtet, nach und nach fand die Teilung der Tertia (1866), Sekunda (1872), Prima (1879), deren Kursus vorher zweijährig, der Prima sogar zeitweilig (1792–1840) dreijährig gewesen war, statt.

Die Entwicklung der Stundenverteilung auf die verschiedenen wissenschaftlichen Fächer (Hebräisch als Wahlfach ausgeschlossen) geht aus folgender Tabelle hervor:

A.

	1840–41						1854–55						1862–63						
	V	IV	III	II	I	zusammen	V	IV	III	II	I	zusammen	VI	V	IV	III	II	I	zusammen
Religion...	2	2	2	2	2	18	2	2	2	2	2	18	2	2	2	2	2	2	18
Latein	8	8	8	10	9	78	6	7	8	8	12	76	6	6	8	8	7	8	66
Griechisch .	0	0	6	6	6	36	0	0	8	7	7	44	0	0	0	4	7	6	34
Französisch	0	0	3	2	2	14	0	3	2	2	2	18	0	0	3	2	2	2	15
Englisch ..	0	0	2	2	2	12	0	0	0	2	2	8	0	0	0	0	2	2	8
Deutsch ...	4	4	2	2	3	26	5	4	2	2	2	25	6	6	3	2	2	2	27
Mathematik	0	2	3	4	4	26	0	2	3	3	4	24	0	0	2	3	3	4	22
Rechnen...	3	2	1	0	0	9	4	2	2	0	0	12	4	4	2	2	0	0	14
Physik	0	0	2	0	2	8	0	0	0	0	2	4	0	0	0	2	0	2	8
Geschichte .	2	2	2	2	2	18	2	2	2	2	2	18	2	2	2	2	2	2	18
Geographie	2	2	2	2	2	18	2	2	2	1	0	12	2	2	2	2	2	2	18
Naturgesch.	2	2	0	0	0	6	0	2	0	0	0	4	0	0	2	0	0	0	2
	I—IV 2-jährig					269	I—IV 2-jährig					263	I—III 2-jährig						250

	1874—75								
	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	I	zusammen
Religion . . .	2	2	2	2	2	2	2	2	18
Latein	10	10	9	9	10	8	8	8	80
Griechisch .	0	0	0	7	7	7	7	6	40
Französisch	0	0	4	3	2	2	2	2	17
Englisch . . .	0	0	0	0	0	2	2	2	8
Deutsch . . .	3	3	2	2	2	3	3	3	24
Mathematik	0	0	0	3	4	4	4	4	23
Rechnen . . .	4	4	4	0	0	0	0	0	12
Physik	0	0	0	0	0	2	2	2	8
Geschichte .	0	0	2	2	2	2	2	2	14
Geographie	3	3	2	2	2	0	0	0	12
Naturgesch.	0	0	2	2	0	0	0	0	4
	I 2-jährig								260

	1899—1900									
	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia	zusammen
Religion . . .	2	2	2	2	2	2	2	2	2	18
Latein	9	9	8	8	8	7	7	7	7	70
Griechisch .	0	0	0	6	6	6	6	6	6	36
Französisch	0	0	4	3	3	3	2	2	2	19
Englisch . . .	0	0	0	0	0	0	2	2	2	6
Deutsch . . .	4	4	3	2	2	3	3	3	3	27
Mathematik	0	0	2	3	3	4	4	4	4	24
Rechnen . . .	4	4	2	0	0	0	0	0	0	10
Physik	0	0	0	0	2	2	2	2	2	10
Geschichte . } Geographie	2	2	4	3	3	3	3	3	3	26
Naturgesch.	2	2	2	2	0	0	0	0	0	8
										254

Wir ersehen hieraus eine allmähliche Verringerung der Stundenzahl im ganzen (wohl zugunsten der technischen Fächer); im besonderen büßen Latein, Geschichte und Geographie wesentlich, Griechisch und Englisch ein wenig ein, Französisch gewinnt etwas, beim Deutschen wird das Hauptgewicht auf die oberen Klassen gelegt. Mathematik und Rechnen zusammen genommen bleiben sich ungefähr gleich, Rechnen verschwindet aus den Tertien, Physik und Naturgeschichte gewinnen an Ausdehnung.

Was die Verteilung des mathematischen Lehrstoffes anbetrifft, so sind bis Anfang der 70er Jahre nur wenig Veränderungen zu verzeichnen. Kein Wunder! Hat doch fast 40 Jahre lang derselbe Lehrer den gesamten mathematischen (und physikalischen) Unterricht in der Hand gehabt. Die Mathematik begann in Quarta mit zwei Stunden Arithmetik (Anfangsgründe bis zu den Dezimalbrüchen). Die Geometrie setzte erst in Tertia ein mit Longimetrie (Lehre von den Linien und Linienverbindungen). Die weitere Entwicklung ist im Anfang die noch heute übliche gewesen. Als Lehrstoff der zweijährigen Prima finden wir angegeben in Arithmetik: Proportionen und Progressionen, Zinseszins- und Rentenrechnung, Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten, kubische Gleichungen, unbestimmte Gleichungen, Kombinationslehre, Wahrscheinlichkeitsrechnung, binomischer Lehrsatz für ganze positive Exponenten, ferner Stereometrie, ebene und sphärische Trigonometrie, analytische Geometrie. Von 1867 an verschwindet die Mathematik aus Quarta (zugunsten des Rechnens) und beginnt dann in Untertertia mit vier (später drei, von 1880 an wieder vier) Stunden Geometrie und Arithmetik.

Im Jahre 1899 wurde ein neuer Lehrplan auf Grund der preußischen Lehrpläne von 1892 aufgestellt, der heute noch Geltung hat. Die Verteilung der Stunden auf die verschiedenen Fächer weicht, wie man aus Tabelle A. ersieht, etwas von dem preußischen Muster ab.

Dasselbe gilt für die Verteilung des mathematischen Lehrstoffes auf die verschiedenen Klassen; diese ist folgende:

VI. Wie der preußische Plan und Zeitrechnung.

V. Desgleichen und Dezimalbruchrechnung.

IV Rechnen. Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt; periodische Dezimalbrüche; sonst wie der preußische Plan.

Planimetrie. Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken.

U III. Planimetrie. (Etwa die Hälfte der Stunden). Von den Vierecken und dem Kreise in Verbindung mit Linie und Dreieck.

Arithmetik und Algebra. Addition, Subtraktion und Multiplikation. Leichtere angesetzte Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

O III. Planimetrie. (Etwa zwei Drittel der Stunden). Der Kreis in Verbindung mit Viereck und Polygon; Flächeninhalt geradliniger Figuren, Verwandlungs- und Teilungsaufgaben. Konstruktionsaufgaben nach der Methode der Hilfsfiguren.

Arithmetik und Algebra. Division. Angesetzte Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten, schwierigere mit Zahlen und Buchstaben.

U II. Planimetrie. Proportionalität und Ähnlichkeit geradliniger Figuren; schwierigere Konstruktionsaufgaben nach der Methode der Hilfsfiguren; Konstruktionen nach der Methode der Proportionalität und Ähnlichkeit.

Arithmetik und Algebra. Potenzen und Wurzeln mit ganzen positiven Exponenten; eingekleidete Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten; angesetzte und eingekleidete Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.

O II. Planimetrie. Proportionalität am Kreise und rechnende Geometrie. Konstruktionsaufgaben, schwierigere nach früheren Methoden, neue nach der Methode der algebraischen Analysis.

Arithmetik und Algebra. Potenzen und Wurzeln mit negativen und gebrochenen Exponenten, Logarithmen; Gleichungen ersten Grades mit drei und mehr Unbekannten, zweiten Grades mit einer Unbekannten; angesetzte und eingekleidete Gleichungen höheren Grades, soweit zurückführbar auf den zweiten Grad.

U I. Reihenlehre. Zinseszinsrechnung. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Imaginäre Größen. Trigonometrie: Goniometrie und Auflösung des recht- und schiefwinkligen Dreiecks, einfache Aufgaben. Wiederholungen aus der Planimetrie. Physikalische Aufgaben.

O I. Komplizierte Aufgaben. Koordinatenbegriff. Einige Grundlehren von den Kegelschnitten. Stereometrie: Sätze nach dem Lehrbuche, Rechenaufgaben. Binomischer Satz für ganze positive Exponenten. Wiederholungen aus Arithmetik und Algebra. Physikalische Aufgaben.

Der Plan, der durch die preußischen Pläne von 1901 nicht beeinflußt worden ist, wird in nächster Zeit eine Änderung vor allem insofern erfahren, als der Beginn der Trigonometrie und Stereometrie je eine Klasse früher erfolgen soll.

Im Anschluß hieran sei gleich bemerkt, daß die übrigen vier Gymnasien des Landes die preußischen Pläne hinsichtlich der Stundenverteilung in Mathematik einhalten; wie sich der Lehrstoff auf die verschiedenen Klassen verteilt, darüber habe ich nur von Birkenfeld und Eutin Auskunft erhalten.

Birkenfeld hat den preußischen Lehrplan von 1901 fast rein; nur behandelt es in O II auch die geometrische Potenz, in O I Exponential- und diophantische Gleichungen, Pol und Polare, Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsachsen (im Anschluß daran eventuell Berührungsproblem des Apollonius); in der analytischen Geometrie geht es bis zur Ableitung der Tangentengleichungen für die Kegelschnitte; die Stereometrie beginnt erst in O I. Eutin hat in Mathematik bis O III den preußischen Lehrplan von 1901, das Parallelogramm fällt aber schon nach IV. In U II liegt der Beginn der Trigonometrie (rechtwinklige Dreiecke) und der Stereometrie (einfache Körperdarstellungen und Berechnungen), doch fehlen die Gleichungen zweiten Grades. Für die Oberklassen ist der Plan folgender:

O II. Arithmetik: Ergänzende Wiederholung der Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, Gleichungen zweiten Grades. Geometrie: Potenzen, harmonische Punkte und Strahlen, Anwendung der Algebra auf Konstruktionen. Trigonometrie: Berechnung des allgemeinen Dreiecks, Anwendungen.

I. 1. Jahr. Arithmetik: Gleichungen zweiten Grades und solche, die sich auf den zweiten Grad zurückführen lassen, imaginäre Größen. Analytische Geometrie: Gerade, Kreis und Kegelschnitte im rechtwinkligen Koordinatensystem. Trigonometrie: Schwierigere Aufgaben, Goniometrie, Anwendung auf planimetrische Konstruktionen.

I. 2. Jahr. Arithmetik: Arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung, binomischer Lehrsatz für ganze positive Exponenten, Anwendung der Binominalkoeffizienten auf arithmetische Reihen, logarithmische und goniometrische Reihen. Stereometrie: Erweiternde Wiederholung der Körperberechnungen, Lehre von den Geraden und Ebenen im Raume, Grundlehren der darstellenden Geometrie, Anwendung derselben zu stereometrischen Konstruktionen und Berechnungen.

Aus den Programmen ergibt sich, daß in Jever und Vechta in IV die angesetzten 4 Stunden nur dem Rechnen gewidmet sind. Mit den Gymnasien von Jever und Vechta sind Realabteilungen IIIb, IIIa, IIb verbunden, die für das ausfallende Griechisch Ersatzunterricht haben und zwar außer dem Französischen und Englischen im Rechnen 2, 2, 2 Stunden. Die Realabteilungen von Eutin werden in dem Maße abgebaut, als die in der Entwicklung begriffene Realschule aufsteigt.

B. Die Entwicklung der städtischen höheren Bürgerschule der Stadt Oldenburg zur Realschule und Oberrealschule.

Zunächst noch ein Wort über die Vorschule. Die erste der drei Klassen hatte als Unterrichtsgegenstand bei Begründung Latein (siehe oben). Deshalb machte sich sehr bald die Einrichtung einer vierten Vorschulklasse nötig. Als zugleich mit der Beseitigung des Latein aus der höheren Bügerschule der lateinische Unterricht in der 1. Vorschulklasse fiel (Ostern 1849), wurde in dieser statt dessen Französisch eingeführt und diese Klasse (Ostern 1850) mit der höheren Bürgerschule vereinigt. Die höhere Bürgerschule hatte zunächst (Ostern 1844–50) drei Klassen mit zweijährigen Kursen, in denen 1845/46 von Schreiben, Gesang und Turnen abgesehen, Religion, Geschichte, Geographie, Zeichnen (je 2 Stunden), Mathematik, Deutsch, Französisch (je 4 Stunden), Latein (in I–III 3, 3, 4 Stunden), Englisch, Physik und Chemie (je 3, 2, 0 Stunden), Rechnen (1, 2, 2 Stunden) gelehrt wurden. Latein fiel, wie schon erwähnt, Ostern 1849 nicht ohne Kampf als Lehrgegenstand aus. Es ist zwar später mehrfach von den Rektoren versucht worden, es wieder in den Lehrplan aufzunehmen; die Wiedereinführung scheiterte aber immer an dem Widerstande des Stadtrats. 1881–1891 wurde Latein als Wahlfach in den Oberklassen betrieben.

Wie oben erwähnt, wurde Ostern 1850 die erste Vorschulklasse zur höheren Bürgerschule geschlagen, im folgenden Jahre wurde die dritte Klasse in zwei einjährige Kurse zerlegt, und, da infolge eigentümlicher Umstände der Kursus der sonst zweijährigen zweiten Klasse schon 1855 einjährig geworden war, 1858 eine sechste Klasse hinzugefügt, so daß damit die höhere Bürgerschule als solche ausgebaut war, mit 6 Klassen VI–I, von denen die letzte einen zweijährigen Kursus hatte. Die Entwicklung der Lehrpläne wird durch Tabelle B. veranschaulicht.

B.

	1851–52 I–II 2-jähr.						1861–62 I 2-jährig							1871–72 I 2-jährig						
	V	IV	III	II	I	zusammen	VI	V	IV	III	II	I	zusammen	VI	V	IV	III	II	I	zusammen
Religion . . .	2	2	2	2	2	14	2	2	2	2	2	2	14	2	2	2	2	2	2	14
Geschichte .	2	2	2	2	2	14	2	3	2	2	2	2	15	2	2	2	2	2	2	14
Geographie	2	2	2	2	0	10	2	2	2	2	2	0	12	2	2	2	2	2	0	12
Naturgesch.	0	2	2	2	2	12	0	0	2	2	2	2	10	0	0	0	2	2	2	8
Physik	0	0	0	2	3	10	0	0	0	2	2	3	10	0	0	0	2	2	2	8
Chemie . . .	0	0	0	2	3	10	0	0	0	0	2	3	8	0	0	0	0	2	4	10
Rechnen . . .	4	4	4	2	0	16	4	4	3	3	2	0	16	4	5	4	2	2	0	17
Mathematik	0	4	4	4	6	28	0	0	4	4	6	6	26	0	0	4	4	5	6	25
Deutsch . . .	8	6	4	4	4	34	6	6	4	4	3	4	31	6	6	5	4	3	4	32
Französisch	4	4	4	4	4	28	4	4	4	4	4	4	28	6	6	6	4	4	4	34
Englisch . . .	0	0	2	4	4	18	0	4	3	3	4	4	22	0	0	0	6	4	4	18
Zeichnen . .	2	2	2	2	2	14	2	2	2	2	2	2	14	2	2	1	2	2	3*)	15
						208							206	*) einschl. darst. Geom.						207

Interessant ist die Behandlung des Englischen hinsichtlich des Anfangs. Während es bis 1857 in III begann, beginnt es 1857 in IV, 1858 in V, 1865 wieder in IV, 1870 wieder in III. Die Erfahrung lehrte eben, daß der zu frühe (und mit dem Französischen fast gleichzeitige) Anfang ein Fehler gewesen war. Dem Rückzug des Englischen entspricht eine Verstärkung des Französischen in den unteren Klassen. Dem Rechnen ist – gegenüber der Gegenwart – eine stärkere Betonung in den Mittelklassen eigentümlich; kein Wunder, war doch bis 1872 (Einführung des dezimalen Münz-, Maß- und Gewichtssystems) die Schule verpflichtet, die Schüler in den unbequemen und vielseitigen Umrechnungen der Münzen, Maße und Gewichte der damaligen Zeit und in den deshalb schwierigen Rechnungen des bürgerlichen Lebens mit denselben geschickt zu machen, was sehr zeitraubend war, während wir heute das Schwergewicht im Rechnen auf die Vorbereitung der Arithmetik und Algebra legen. Der Lehrstoff in Rechnen und Mathematik ist um 1870 etwa folgender gewesen:

Rechnen. VI. Wiederholung der vier Spezies mit ganzen benannten und unbenannten Zahlen; Verwandlung gemischter Zahlen in Brüche und umgekehrt; Multiplikation und Division der Brüche, Entstehung und Bezeichnung der Dezimalbrüche.

V. Die vier Spezies mit gemeinen und dezimalen Brüchen.

IV. Vollständige Dezimalbruchrechnung, Prozentrechnung, Rechnen mit Zeiträumen und Terminrechnung. Flächen- und Körperberechnungen.

III. Prozent-, Gesellschaft-, Mischungsrechnung, Kettensatz. Geometrische Rechenaufgaben.

II. Verhältnisse, Proportionen, Kettensatz, abgekürztes Rechnen, Kontokorrenten.

Arithmetik. IV. Rechnen mit absoluten und mit positiven und negativen Zahlen.

III. Die vier Grundoperationen mit gebrochenen Zahlen, Kettenbrüche, Gleichungen vom ersten Grade.

II. Gleichungen vom ersten Grade mit einer und mehreren Unbekannten und Gleichungen vom zweiten Grade. Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

I. 1. Jahrgang. Schwierigere Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit einer und mehreren Unbekannten, diophantische Gleichungen, Progressionen, Zinseszins- und Rentenrechnung, Kettenbrüche, Kombinatorik mit Anwendung auf Wahrscheinlichkeitsrechnung, binomischer Lehrsatz für ganze positive Exponenten, Wurzeleigenschaften.

I. 2. Jahrgang. Konvergenz der Reihen, Entwicklung der Exponentialreihe, der binomischen, logarithmischen und trigonometrischen Reihen, Gleichungen dritten Grades.

Geometrie. IV. Linien, Winkel, Parallelen, Kongruenz.

III. Transversalen des Dreiecks, das Viereck, der Kreis, die Gleichheit und die Verwandlung der Figuren.

II. Planimetrie beendet. Elemente der ebenen Trigonometrie (fünfstellige Tafeln).

I. 1. Jahrgang. Stereometrie, ebene Trigonometrie und die Elemente der sphärischen Trigonometrie.

I. 2. Jahrgang. Die analytische Geometrie der Ebene.

In I kam hierzu noch mathematische Geographie und Astronomie, ferner darstellende Geometrie (zum Teil im Anschluß an das Zeichnen). Gelegentlich werden in I Gleichungen 4. Grades und die Auflösung numerischer Gleichungen durch Näherung, einmal wird neuere Geometrie (nach Paulus, Grundlinien usw.) und einmal Funktionentheorie erwähnt.

Nicht immer wurden alle erwähnten Abschnitte der Mathematik in I durchgenommen, z. B. fehlt manchmal die darstellende Geometrie, oft auch die analytische Geometrie gänzlich. Immerhin sind die hohen Ziele, die sich diese höhere Bürgerschule gesteckt hatte, zu bewundern.

Daß der mathematische Lehrplan übrigens nicht bloß auf dem Papiere stand, dafür bürgt der Name des ersten Mathematikers der Anstalt, Christian Harms, der von ihrer Begründung an (zunächst an der Vorschule) über 40 Jahre den Rechenunterricht und den mathematischen Unterricht besonders der oberen Klassen in der Hand hatte, und dessen Lehrgeschick sehr zum Aufblühen der Anstalt beitrug. Seine Rechenbücher, insbesondere sein Rechenbuch für höhere Schulen (mit Kallius) sind heute noch weit verbreitet. Die Schule hatte übrigens das Glück, in den drei ersten Rektoren Breier (später Gymnasialdirektor in Lübeck), Tycho Mommsen (später Gymnasialdirektor in Frankfurt a. M.) und Strackerjan (bekannt durch seine germanistischen Studien) ganz ausgezeichnete Leiter zu haben. Im Jahre 1868 trat ein Titelwechsel des Leiters ein, der nun Direktor hieß (wie am Gymnasium). In dem folgenden Jahre erhielt die Schule als Realschule II. Ordnung die Berechtigung zur Ausstellung der Zeugnisse über die wissenschaftliche Qualifikation zum einjährig freiwilligen Militärdienst (nach einjährigem Besuche der Prima). Auch andere Berechtigungen besaßen die Abiturienten der höheren Bürgerschule: seit 1846 die Zulassung zum Forstdienst, seit 1858 die Zulassung zur Prüfung in den mathematisch-technischen Fächern.

Eine neue Entwicklungsstufe der Realschule fällt in das Jahr 1880. Schon 1868 war der Leiter der Schule an die Behörden mit dem Ersuchen herangetreten, die Schule zu einer neunklassigen Anstalt auszubauen, und diese zu einer Staatsanstalt zu machen. Als solche war eine Doppelanstalt, Realschule erster Ordnung (mit Latein), eventuell in Verbindung mit einer Realschule zweiter Ordnung, in Vorschlag gebracht worden. Der Plan kam nicht zur Ausführung. Da aber die fortwährend wachsende Schülerzahl die Einrichtung von Parallelklassen und die Teilung der Prima nötig machten, so griff man Ende der 70er Jahre den Plan wieder auf. Man richtete aber jetzt sein Augenmerk auf eine lateinlose Realschule erster Ordnung mit wahlfreiem Latein

in den Oberklassen, und zwar nahm man sich zum Muster die Berliner neunklassigen Gewerbeschulen (Friedrich-Werdersche und Luisenstädtische) und fügte der Schule eine zweijährige Selekta an. 1883 fand das erste Abturientenexamen statt. Mittlerweile (1882) vollzogen sich in Preußen die bekannten bedeutenden Umänderungen auf dem Gebiete des höheren Schulwesens, denen sich Oldenburg anschließen mußte. Ostern 1885 nahm die Realschule den Namen Oberrealschule an und führte die jetzt üblichen Klassenbezeichnungen ein. Ostern 1891 wurde ein ausführlicher Lehrplan im Programm veröffentlicht. Dieser aber wurde schon im nächsten Jahre durch den preußischen Lehrplan von 1892 überholt, der dann in Oldenburg durch Verordnung vom 1. Februar 1893 eingeführt wurde, und nach welchem heute noch an der Oberrealschule unterrichtet wird (die spezifisch brandenburgisch-preußische Geschichte ist jedoch durch die oldenburgische ersetzt). In Prima ist dem Lehrer der Mathematik die Freiheit gelassen, den Lehrstoff beliebig auf Ober- und Unterprima zu verteilen, was dadurch ermöglicht worden ist, daß seit einigen Jahren derselbe Lehrer den Mathematikunterricht von O II bis O I durchführt. So wird jetzt die analytische Geometrie schon in Unterprima getrieben und dabei die synthetische Geometrie der Kegelschnitte eingeflochten. Die Differentialrechnung ist immer Lehrstoff der Prima der Oberrealschule gewesen; zeitweilig sind für sie besondere Stunden angesetzt gewesen. Ein ausführlicher Lehrplan ist für die Oberrealschule in Vorbereitung; er wird die neueren Bestrebungen, soweit ihnen nicht schon bisher Rechnung getragen ist, gebührend berücksichtigen.

An den übrigen 6 Realanstalten, von denen zwei (Oberstein-Idar, Delmenhorst) in der Entwicklung zu Oberrealschulen begriffen sind, sind ebenfalls die preußischen Lehrpläne eingeführt, in Oberstein-Idar der Lehrplan von 1901. An allen diesen Anstalten wird in U III, O III und U II, bezüglich III, II, I der Rechenunterricht fortgesetzt, und zwar wird Gesellschafts-, Rabatt-, Diskont-, Mischungs-, Termin-, Wertpapierrechnung, Kettensatz behandelt.

II. Die Beantwortung der Fragebogen.

Es waren an die sämtlichen höheren Schulen des Großherzogtums mit Erlaubnis des Ministeriums der Kirchen und Schulen, dem ich hierfür pflichtschuldigst meinen Dank ausspreche, die Fragebogen geschickt worden, welche, von dem deutschen Unterausschuß der internationalen mathematischen Unterrichtskommission aufgestellt, auch den Mathematikern an den höheren Schulen anderer Bundesstaaten vorgelegt worden sind. Von drei Schulen ist keine Antwort eingegangen, der Mathematiker einer Schule lehnte die Beantwortung wegen Zeitmangels ab.

1. Lehrpläne.

Diese Frage ist durch Abschnitt I. erledigt.

2. Eingeführte Lehrbücher.

Rechnen. Harms (Rechenbuch für Volksschulen), Harms-Kallius, Schellen, Fölsing, Müller-Pietzker, Heine und Westrick, Rösler und Wilde (kaufmännisches Rechnen). Arithmetik. Vornehmlich Bardey (Bearbeitungen von Pietzker-Presler und Hartenstein); sonst Heinrich Müller (Mathematik auf der Realschule), Müller und Kutnewsky, Mehler-Schulte-Tigges, Focke und Kraß. Geometrie. Vornehmlich Schuster; sonst Heinrich Müller, Müller und Kutnewsky, Mehler-Schulte-Tigges, Hercher, Focke und Kraß, Lange (synthetische Geometrie der Kegelschnitte) Schmehl (Analytische Geometrie), Gandtner (desgl.), letztere drei an der Oberrealschule in Oldenburg. Logarithmen mit einer Ausnahme (Wittstein) vierstellig (Schülke). Als Lehrbuch und Aufgabensammlung der Arithmetik und Algebra wird mehrfach Schwab-Lesser empfohlen. Nach meinem Dafürhalten ist Bardey für die Oberrealschulen, besonders für die Oberklassen, durchaus nicht ausreichend. Statt Schulte-Mehler-Tigges wird Müller-Hupe, statt Hercher und Bardey Kambly-Thaer, statt Bardey-Hartenstein Heis gewünscht.

Benutzung der Lehrbücher. Die Lehrbücher und Aufgabensammlungen der Arithmetik und Algebra werden nur als Aufgabensammlungen benutzt. Auch die Geometriebücher werden zum Teil nur als Aufgabensammlungen benutzt; doch hängt dies sehr von der Methode ab, die in ihnen hauptsächlich zum Ausdruck kommt. Meist wird angegeben, daß die Bücher zur häuslichen Wiederholung benutzt werden, weshalb ein möglichst enger Anschluß an das Lehrbuch erwünscht ist, aber auch zur Wiederholung überhaupt. „Zur Wiederholung, wie es heutzutage wohl allgemein üblich ist. Die Tafelfiguren werden zweckmäßig an die Buchfiguren angeschlossen, besonders anfänglich." „Das Geometriebuch diente zum Nachlesen der wichtigsten Lehrsätze und zur Orientierung bei Wiederholungen." „Das Schustersche Lehrbuch zerlegt den ganzen Stoff in Aufgaben. Dadurch ist die Methode bestimmt. An einzelne Aufgaben wird angeknüpft, um einen Lehrsatz abzuleiten. Der mündliche Unterricht ist also dabei die Hauptsache, das Buch gibt nur den leitenden Faden."

Es dürfte hier der Ort sein, über die Schusterschen Unterrichtsbücher, die an der Hälfte der Oldenburger Schulen eingeführt sind, einige Bemerkungen anzufügen. Die Bedeutung, die Christian Harms für die höhere Bürgerschule und Realschule hinsichtlich des mathematischen Unterrichts hatte, hatte M. Schuster, während seiner mehr als zwanzigjährigen Tätigkeit, für die sich entwickelnde Oberrealschule zu Oldenburg. Rastlos tätig und mit zäher Energie ausgestattet, wußte er seinen Unterricht zum beherrschenden an der Oberrealschule auszugestalten. Die Vielseitigkeit seiner Bücher schon zeigt, daß er nicht

wenig von seinen Schülern verlangte; aber was er verlangte, verstand er auch durchzusetzen. Die Methode, die Schuster in seinen Büchern verwendet, ist an sich nicht neu, und schon vor ihm sind Lehrbücher nach dieser Methode verfaßt. Es ist die konstruktive; es wird erst konstruiert; von den konstruierten Figuren werden Sätze abgeleitet, die wieder zu neuen Konstruktionen führen. Was neu ist, ist die Verbindung dieser Methode mit dem Frage- und Antwortspiel der Unterrichtsstunden, wobei die im Unterricht gestellten Fragen, ich möchte sagen, mit phonographischer Treue, wiedergegeben werden, der Schüler aber die Antworten hinzuzufügen hat. Der Wiederholungen wegen sind deshalb auch die Figuren nicht in den Text geschoben, sondern auf besonderen Blättern am Schlusse des Buches angefügt.

Meiner Ansicht nach liegt gerade in dieser Verbindung die Schwäche der Schusterschen Bücher, die eine Fülle von wohlgeordneten Aufgaben (darin liegt meiner Ansicht nach ihre Stärke) enthalten, aber doch nicht die Verbreitung gefunden haben, die sie sonst in hohem Maße verdienen. Als didaktische Hilfe sind die Schusterschen Bücher wegen dieses Umstandes aber jedem jungen Lehrer der Mathematik aufs angelegentlichste zu empfehlen. Aus folgenden Gründen halte ich die erwähnte Behandlung des Unterrichtsstoffes in einem Lehrbuche nicht für empfehlenswert: 1. Lehrer und Schüler sind durch den Stoff und die Fragestellung so gebunden, daß Freiheit und Frische des Unterrichts darunter leiden müssen. 2. Die Wiederholung von Stunde zu Stunde, noch mehr aber die Wiederholung zurückliegender Kapitel ist sehr erschwert, wenn nicht unmöglich, nicht minder das Nacharbeiten für Schüler, die den Unterricht versäumt haben. 3. Der Zusammenhang der Sätze ist sehr locker und wird am Schlusse jedes Kapitels nur durch die Zusammenfassungen notdürftig hergestellt. „Die Aufgaben und Sätze werden sowohl in der Geometrie als auch in der Algebra (in der Trigonometrie entsprechend die Formeln, möchte ich hinzufügen) gruppenweise durchgenommen und auf die Wiederholung der Gruppen*) Gewicht gelegt," lautet eine sehr richtige Bemerkung in einem Fragebogen. Auch sind die Aufgaben meist an e i n e n Satz angeschlossen; der Schüler hat also keine Gelegenheit, zu untersuchen, welches der vielen Konstruktionsmittel für einen vorliegenden Fall nötig ist. 4. Es ist dieselbe, nämlich die erwähnte Methode durch alle Klassen hindurch in Anwendung gebracht, ohne Rücksichtnahme auf die zunehmende Reife der Schüler. 5. Die Vernachlässigung des streng logischen Beweisverfahrens macht sich in den Oberklassen oft recht fühlbar.

Wenn trotzdem mit den Schusterschen Lehrbüchern ausgezeichnete Erfolge zu erzielen sind, so liegt dies, wie schon erwähnt, an der

*) Vergl. hierzu Böttger, Die ebene Geometrie, für die Realschule bearbeitet, 7. Auflage, Leipzig (Dürr) 1911, wo auf diese Gruppenbildung besonderes Gewicht gelegt ist.

vorzüglichen Aufgabensammlung. Es ist eine wahre Freude, vor allem in IV und U III, nach der Schusterschen Geometrie zu unterrichten. Einen Wunsch möchte ich für weitere Auflagen aussprechen: Mit Veränderungen mäßig zu verfahren. Die starken bisherigen Veränderungen von Auflage zu Auflage haben die nicht zu umgehende gleichzeitige Benutzung verschiedener Auflagen sehr erschwert.*)

3. Verwendung von Apparaten und Modellen. Herstellung durch Schüler.

Einmütig wird die Benutzung von Modellen in der Stereometrie für nötig gehalten, und für besonders wichtig, daß die Schüler sie möglichst selbst herstellen. (Nur ein Kollege ist gegen die Selbstanfertigung, da sie zeitraubend und pädagogisch ohne nennenswerten Gewinn sei). Auf der Oberstufe, möchte ich hinzufügen, soll man aber darin nicht zu weit gehen, vielmehr sollen sich da Modell und Zeichnung ergänzen, damit der Schüler lernt, Zeichnungen von Körpern plastisch zu sehen. In der darstellenden Geometrie macht man fortgesetzt die Erfahrung, wie wenig geübt darin die meisten Schüler sind. In Quarta der O.-R. zu Oldenburg werden die Netze der einfachsten Körper (Würfel, Quader, sechsseitige Säule, vier- und sechsseitige Pyramide, Zylinder und Kegel ohne Deckflächen) gezeichnet, als Einführung in das Messen und Handhaben von Zirkel, Lineal und rechtem Winkel; zu Hause fertigen dann die Schüler die Körper an. Das Ergebnis ist meist überraschend günstig. Für die darstellende Geometrie wurden an der Oberrealschule Oldenburg im letzten Jahre sehr sauber aus Cellulloid hergestellte Modelle von Körpern mit ebenen Schnitten angeschafft (Albert H. Bergh und Co., Hamburg). „Im Anfangsunterricht ist die Veranschaulichung der geometrischen Begriffe durch bewegliche Modelle einfacher Art geradezu grundlegend für den Erfolg. Winkel, Dreiecke usw. soll der Schüler nicht immer nur an der Tafel sehen. Ich benutze z. B. die mit Plastilin zu verbindenden Stäbchen des Eckhardtschen Modellbaukastens.“ „Im trigonometrischen Unterricht verwende ich mit großem Nutzen einen selbstgefertigten Drahtkreis mit zwei aufeinander senkrecht stehenden festen Durchmessern und einem beweglichen Radius, von dessen peripherischem Ende ein Drahtstück als Lot herunterhängt, zur Demonstration der Veränderung der Winkelfunktionen.“ An der Oberrealschule i. E. Oberstein-Idar wird in Trigonometrie der Ohmann'sche Feldwinkelmesser (in Verbindung mit Meßplatten und Visierstäben) benutzt, an der Oberrealschule zu Oldenburg das Winkelfernrohr von Butenschön (Hamburg), ferner für sphärische Trigonometrie eine schwarze um eine Achse drehbare Kugel und eine drehbare Sternkarte.

*) Eine eingehendere Würdigung des leider viel zu früh verstorbenen Fachgenossen findet man in der Zeitschrift für math. und nat. Unterricht, 1911, S. 88, aus der Feder von W. Lietzmann, einen kürzeren Nachruf in den Unterrichtsblättern für math. u. nat. Unterricht. 1910. S. 111.

4. Propädeutischer Unterricht.

„Der propädeutische Unterricht führt, wie heute allgemein üblich, allmählich in den sogenannten (!) wissenschaftlichen Unterricht ein. Anfänglich wird der Unterricht rein anschaulich in Verbindung mit Übungen im Messen und Zeichnen erteilt; Dinge, die dem Schüler anschaulich klar sind, zu beweisen, wird vermieden, weil dies nur zu Verwirrung führt; Beweise werden nur dann entwickelt, wenn auch der Schüler ihre Notwendigkeit empfindet."

„Auf der Quarta bringt man wohl eigentliche Beweise erst im zweiten Halbjahr und dann nur allmählich und mit großer Vorsicht, ohne auf die schematische, herkömmliche Form irgend Gewicht zu legen. Die Pflege der Anschauung und das Vertrautwerden mit den räumlichen Begriffen steht im Vordergrund. Wenn es nicht so ist, so wird schon darin oft ein Grund für die Unfähigkeit mancher Schüler in den höheren Klassen zu suchen sein."

„Ein besonderer geometrisch-propädeutischer Unterricht wird nicht erteilt und scheint mir auch völlig entbehrlich." Über den propädeutischen Unterricht in IV der Oberrealschule Oldenburg siehe oben unter I 3 B.

5. Anwendung der Mathematik. Praktische Übungen.

Anwendungen werden überall berücksichtigt, und zwar hauptsächlich auf den Gebieten der Physik, Chemie, Feldmeßkunde, Nautik, Astronomie, der graphischen Darstellung bezogen auf Vorgänge des bürgerlichen Lebens. „Die Geometrie sollte mehr zur Lösung praktischer Aufgaben (Konstruktionen von Entfernungen, Höhen) herangezogen werden."

„Anwendungen werden in maßvoller Weise berücksichtigt. Es ist aber festzuhalten, daß die Mathematik Selbstzweck ist und nicht bloß zur Dienerin der Physik erniedrigt werden soll. Es ist auch sehr wohl denkbar, daß für den besseren Schüler rein mathematische Aufgaben ebensoviel Interesse haben können wie Anwendungen."

Praktische Übungen werden vielfach abgehalten oder in Aussicht gestellt. Es kommen aber nur Vermessungen im Freien mit Winkelfernrohr, Meßkette usw. in Frage.

6. Stellungnahme zu den traditionellen Zielen und zu der üblichen Methode.

„Wenn unter traditionellen Zielen die im Lehrplan von 1901 angegebenen Ziele zu verstehen sind, so kann ich mich damit teils einverstanden, teils nicht einverstanden erklären. Der Lehrplan gibt vor allem eine unorganische, innerlich unzusammenhängende Zusammenstellung aller möglichen Gebiete. Ich halte es für nötig, durch Streichung gewisser Gebiete, Beschränkung anderer, Ausdehnung und Einfügung wieder anderer Gebiete den mathematischen Lehrplan

organisch sich aufbauend und innerlich einheitlich zu gestalten." – Es werden im Anschluß hieran Vorschläge gemacht, die bei der Betrachtung der folgenden Nummern Erwähnung finden.

„Der Lehrplan ist breitspurig, nicht tiefgehend. Es fehlt der rote Faden, der sich durch das Ganze hindurchziehen und ihm Einheitlichkeit und bestimmte Richtung geben sollte. Die kulturelle Bedeutung der Mathematik sollte mehr zum Bewußtsein gebracht werden. – Besonders in den mittleren Klassen ist eine Reform nötig; vielleicht sollte gerade diesen Klassen die größte Aufmerksamkeit bei den Reformbestrebungen geschenkt werden."

„Wenn auch die logische Schulung das Hauptziel des mathematischen Unterrichts bleiben wird, so wird man doch, ohne dies Ziel zu verrücken, die Ausbildung in der Fähigkeit, Vorgänge in der Natur, der Technik, dem Wirtschaftsleben mathematisch aufzufassen und darzustellen, als eine wesentliche Aufgabe eines modernen Unterrichts ansehen müssen. Von diesem Gesichtspunkte aus ist die Auswahl des Lehrstoffs und die Art seiner Behandlung festzusetzen; daß dabei von dem traditionellen Schema Abweichungen vorkommen, wird unausbleiblich sein. Aber erst die praktische Erfahrung wird wohl hier das Gesunde und Fruchtbringende von dem bloß „Neuernden" scheiden."

Einige Kollegen sind im wesentlichen mit den traditionellen Zielen einverstanden, „denn, sagt der eine, es liegt genug Bildungswert in dem bisher verwendeten Stoffe. Ich habe aber gegen eine stärkere Betonung des Funktionsbegriffes nichts einzuwenden, vorausgesetzt, daß die notwendige Sicherheit im Rechnen mit Zahlen und Buchstaben dadurch nicht leidet. Deshalb sollten graphische Darstellungen von Funktionen auf dem Gymnasium erst von Obersekunda einsetzen. In der Geometrie kann gelegentlich schon früher durch Betonung der Veränderlichkeit der Figuren vorgearbeitet werden."

Die kategorische Antwort auf die Frage nach der üblichen Methode: „Heuristisch-genetisch-induktiv wohl jetzt überall; eine andere Methode, die vorzuziehen wäre, ist mir nicht bekannt" weist darauf hin, daß eine andere (etwa die veraltete rein dedukive) Methode bei der Vorbildung des heutigen Lehrerstandes und bei dem heutigen Stande des Mathematikunterrichts kaum noch an irgend einer Schule zu finden ist.

7. Stellung zu den Reformbestrebungen, insbesondere zu den Vorschlägen der Unterrichtskommission.

a) Die Einschränkung der formalen Operationen der Algebra wird allgemein als möglich anerkannt. Künstliche Aufgaben mit Buchstaben, komplizierte Übungsaufgaben, das Wurzelgestrüpp mancher Aufgabensammlungen, das Umformen von Ausdrücken, die praktisch nicht vorkommen, quadratische Gleichungen mit zwei Un-

bekannten, die nur durch Kunstgriff lösbar sind, sollten vermieden werden.

b) Die Behandlung des Funktionsbegriffs. Der Einführung des Funktionsbegriffs stehen alle Berichterstatter freundlich gegenüber; einer der Herren wünscht die maßvolle Einführung derselben am Gymnasium nicht vor Obersekunda, ein anderer wünscht sie möglichst früh, aber seine Behandlung solle nicht zur Hauptsache werden. Ich bin der Meinung, daß man den Funktionsbegriff mit Nachdruck erst in O III bei der Lösung von Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten einführen und als Überleitung dazu graphische Darstellungen aus der Physik (Barometer- und Thermometerstände), aus der Eisenbahntechnik (Fahrpläne), aus Geographie und Statistik verwenden sollte. In jeder folgenden Klasse sind dann die funktionalen Begriffe (auch in Physik und Chemie) zu erweitern. Die graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen möchte ich der Prima vorbehalten wissen.

c) Einführung der Elemente der Differential- und Integralrechnung. Diese| wird für die Gymnasien abgelehnt. Für die drei Oberrealschulen des Großherzogtums ist Differentialrechnung obligatorisch und als Prüfungsgegenstand in die neue Reifeprüfungsordnung vom 16. Dezember 1910 aufgenommen worden. Ich halte es für wesentlich, nicht zu spät mit der Differentialrechnung zu beginnen. Am geeignetsten scheint mir U I für den Beginn zu sein, doch in der Weise, daß parallel mit der Differentialrechnung die analytische Geometrie geht, deren Anfang aber etwas früher zu setzen ist.

d) Gemeinsame Behandlung der Planimetrie und Stereometrie. Hinsichtlich dieser haben die Herren, die sich darüber äußerten, keine Erfahrung. Ich mache nur einmal Gebrauch davon, nämlich im propädeutischen Unterricht der IV (Siehe oben unter 4). In O II wird beim stereometrischen Unterricht auf die Analogien mit der ebenen Geometrie reichlich hingewiesen.

e) Behandlung der Kegelschnitte (analytisch, synthetisch, projektiv). An den Gymnasien werden die Kegelschnitte nur oder im wesentlichen analytisch behandelt. Ein Berichterstatter schreibt: „Die Kegelschnitte sollten möglichst auf eine Art behandelt werden, schon weil die Zeit mehr nicht gestattet, am besten wohl analytisch mit gelegentlich synthetischer Behandlung, wo diese besser zum Ziele führt, aber nicht erst synthetisch, dann nochmals analytisch. Zu wirklicher Einführung in projektive Behandlung dürfte die Zeit kaum reichen. Ich bezweifle, ob eine wirkliche Beherrschung der projektiven Geometrie durch die Schüler erreicht wird." An der Oberrealschule zu Oldenburg wurde früher in der kombinierten Prima jährlich abwechselnd mit synthetischer und analytischer Geometrie begonnen, und projektive Beziehungen wurden eingeschoben. Nachdem nunmehr die Primen getrennt sind, habe ich folgendes Verfahren eingeschlagen. Zunächst

behandele ich analytische Geometrie bis zum Kreise, dann synthetisch Ellipse, Hyperbel und Parabel nach Lange (§ 2—4), hierauf gemeinsam alle drei analytisch. Hieran schließen sich die Behandlung der drei Kurven als Schnitte am Kegel bzw. als Zentralprojektionen eines Kreises, die Leitlinieneigenschaften, Polaritätsbeziehungen, die Sätze von Pascal und Brianchon nebst ihrer Anwendung auf Erzeugung der Kegelschnitte aus Punkten und Tangenten. Die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Punktreihen und Strahlenbüschel habe ich bis jetzt nicht durchgenommen, einesteils aus Zeitmangel, andernteils aber weil ich der Ansicht bin, daß in projektiver Geometrie nur bei eingehendster Behandlung, die mehr Zeit erfordert, als zur Verfügung steht, etwas Ersprießliches erzielt werden kann.

f) Vertiefung des Geometrieunterrichts nach der erkenntnistheoretischen Seite hin. Es wird von einigen Herren bemerkt, daß gelegentlich hierher gehörige Fragen von ihnen angeschnitten worden sind; doch wird auch die Ansicht ausgesprochen, daß den meisten Primanern für derartige Fragen noch die nötige Reife fehlt. „Ein Primaner steht im allgemeinen den geometrischen Begriffen noch zu naiv gegenüber, als daß er von der Notwendigkeit erkenntnistheoretischer Betrachtungen überzeugt wäre."

g) Das Verhältnis des geometrischen Zeichnens zum Stereometrieunterricht. „Geometrisches Zeichnen und Stereometrieunterricht werden zweckmäßig wohl verbunden." „Sorgfältiges Zeichnen in schräger Parallelprojektion und nach Schnitten notwendig." „Geometrisches Zeichnen in U II müßte obligatorisch sein und von einem Mathematiker gegeben werden."

Es ist auffällig, wie verschieden die Bewertung des Linearzeichnens (der darstellenden Geometrie) im Unterrichtsbetriebe der höheren Schulen der verschiedenen Bundesstaaten ist. In Preußen und den Staaten, die wie Oldenburg die preußischen Pläne haben, ist Linearzeichnen Wahlfach und nach seiner Stellung in den Plänen ein Anhängsel des Zeichenunterrichts.*) In Sachsen und den süddeutschen Staaten ist Linearzeichnen, für welches oder neben welchem die Bezeichnungen darstellende Geometrie, darstellender Unterricht, geometrisches Zeichnen, Projektionszeichnen, technisches Zeichnen gebraucht werden, ein verbindliches Lehrfach. In Preußen wird Linearzeichnen in der Hauptsache von Zeichenlehrern (71,5 %), in Sachsen dagegen, wo die Stellung des Linearzeichnens (der darstellenden Geometrie) im Lehrplan durch Schlömilchs Einfluß eine sichere, nicht leicht zu erschütternde geworden ist, ist dieser Unterricht an den Oberrealschulen

*) Vergl. Zühlke, Mathematiker und Zeichenlehrer im Linearzeichenunterricht der preußischen Realanstalten, Zeitschr. für Math. u. Naturw. Unterricht, 1910, S. 112; ferner, Zühlke, Der Unterricht im Linearzeichnen und der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten (unter der Presse), Band III, Heft 3 der Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland.

von einem Lehrer der Mathematik zu erteilen, an den Realgymnasien, wenn irgend möglich, dem Lehrer zu übertragen, der den stereometrischen Unterricht erteilt. Die Stellung des Linearzeichnens als Wahlfach ist in Oldenburg wie anderwärts in Norddeutschland schon lange als auf die Dauer unhaltbar empfunden worden. Hat doch die Stereometrie, um nur einen Punkt herauszugreifen, von der darstellenden Geometrie, solange nur ein (meist sogar kleiner) Teil der Schüler an letzterem teilnimmt, keinen Gewinn. In Preußen, wo eine Durchsicht der Lehrpläne bevorsteht, scheint die Unterrichtsverwaltung leider nicht die Absicht zu haben, den Unterricht in darstellender Geometrie zu einem verbindlichen zu machen; vielmehr scheint, um Raum für den biologischen Unterricht zu schaffen, ihr Bestreben dahin zu gehen, wie aus den Erlassen vom 14. September 1908, vom 10. März 1910 und vom 4. November 1910 hervorgeht, den theoretischen Teil der darstellenden Geometrie der Mathematik, den mehr praktischen Teil dem Zeichenunterrichte zuweisen zu wollen, ohne aber die Stundenzahl dieser Fächer zu erhöhen. Eine derartige Aufteilung der darstellenden Geometrie, der kein Gewinn für die Mathematik gegenübersteht, würde gewiß mit großem Bedauern von vielen Mathematikern entgegengenommen werden. Die Durchführung der neueren Reformbestrebungen erfordert an sich schon eine so weitgehende Einschränkung des jetzigen Lehrstoffs, daß für die darstellende Geometrie nicht mehr genügend Zeit bleiben wird, um etwas Nennenswertes darin zu leisten, denn die Entwickelungen der darstellenden Geometrie und die Ausführung der Zeichnungen erfordern reichlich Zeit.

Da Oldenburg die preußischen Lehrpläne hat und voraussichtlich auch auf Veränderungen derselben eingehen wird, so kann ich nicht umhin meine Ansicht und meine Wünsche hinsichtlich der zukünftigen Gestaltung der darstellenden Geometrie klarzustellen. Bis O III einschließlich könnte m. E. ein besonderer Unterricht in darstellender Geometrie entbehrt werden, wenn von IV an im geometrischen Unterrichte ein Zeichenheft geführt wird, in das von Zeit zu Zeit die Figuren zu Konstruktionsaufgaben und zu Lehrsätzen (mit Bleistift gezeichnet und mit Tusche ausgezogen) eingetragen werden; daneben könnte der Zeichenlehrer im Zeichenunterrichte jährlich während einiger Wochen Übungen auf dem Reißbrette anstellen lassen. In U II der Realanstalten und zwar vor Beginn des stereometrischen Unterrichts, der in das Winterhalbjahr zu verlegen wäre, müßte die darstellende Geometrie einsetzen (zunächst propädeutisch, wie der erste Geometrieunterricht). Dieser Unterricht müßte an Realanstalten verbindlich sein und in U II mit mindestens einer, in O II bis O I mit zwei zusammenhängenden Stunden bedacht werden. Er müßte in die Hände der Mathematiker gelegt und zwar tunlichst dem Lehrer übertragen werden, der den Mathematikunterricht der betreffenden Klasse erteilt. Sollte es sich nicht ermöglichen lassen (wegen des einzuführenden biologischen

Unterrichts) zwei verbindliche Stunden in den Oberklassen für die darstellende Geometrie frei zu machen, so würde ein gangbarer Weg noch der sein, daß den fünf Mathematikstunden jeder dieser Klassen eine sechste verbindliche angegliedert wird, derart, daß im Stundenplan zwei von diesen zusammenhängen und eine gewisse Zeit des Jahres der darstellenden Geometrie vorbehalten bleiben müßten. Zu wünschen wäre noch, daß die Bezeichnung Linearzeichnen endgültig fiele.

h) und i) Stärkere Betonung der Anwendungen und der geschichtlichen Entwicklung. Nach beiden Richtungen wurden zustimmende Erklärungen abgegeben. „In den mittleren Klassen kurze geschichtliche Einführungen im Anschluß an den Lehrstoff; später Überblick über die Entwicklung." Seit dem Erscheinen von Tropfkes Geschichte der Elementarmathematik ist ja auch die Zusammenstellung historischer Notizen bedeutend erleichtert worden. Für unsere Primaner würde das Interesse für das Geschichtliche in der Mathematik bedeutend wachsen, wenn wir Schulausgaben von sich eignenden Werken unserer bedeutendsten Mathematiker besäßen, die mit historischen und biographischen Einleitungen versehen sein müßten. Solche Bücher würden dann eine gute Überleitung zum Selbststudium der Werke unserer großen Mathematiker an den Universitäten abgeben. Ein Verzeichnis solcher und ähnlicher Schriften, die dem Verständnis der Primaner angepaßt sein müßten, würde gewiß als Ratgeber bei Anschaffungen für die Schul- resp. Schülerbibliothek recht erwünscht sein.

k) Freiere Gestaltung des Unterrichts auf der Oberstufe. Nach Hinsicht des mathematischen Unterrichtsstoffes ist folgende Bemerkung eingelaufen, der man wohl zustimmen kann: „Freiere Gestaltung des Unterrichts auf der Oberstufe ist sehr wünschenswert, insbesondere in dem Sinne, daß dem Lehrer frei steht, die eine oder die andere Gruppe der Lehrziele eingehender zu behandeln. Ich halte es für nützlicher, einige ausgewählte Gebiete gründlich, als sämtliche Gebiete gleichmäßig und dann notgedrungen oberflächlich und enzyklopädisch zu behandeln."

Nach Hinsicht der Organisation ist folgendes geäußert worden: „Freiere Gestaltung des Unterrichts ist wohl von Nutzen für das Gymnasium und vor allem für das Realgymnasium. Die Oberrealschule würde aber ihren Charakter verlieren, d. h. entweder ihre mathematisch-naturwissenschaftliche Grundlage einbüßen oder bei stärkerer Betonung der Mathematik Fachanstalt werden." „Für die große Mehrzahl der Schüler ist Zwang erforderlich. Zudem wird durch die freiere Gestaltung der Übergang eines Schülers von der einen Anstalt zur anderen erschwert. Mittelmäßig begabte Söhne von Beamten, Offizieren usw. können sehr darunter leiden."

8. Entlastung zugunsten des neuen Lehrstoffs.

Eine Beschränkung des Lehrstoffs könnte nach Ansicht einiger Herren eintreten bei den quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, den kubischen Gleichungen, in der Trigonometrie (Wegfall gekünstelter Aufgaben und von Aufgaben der r- und ϱ-Geometrie), in der Zinseszins- und Rentenrechnung, bei Exponentialgleichungen, in der Potenz- und Wurzellehre.

Als entbehrlich werden bezeichnet Reihen höherer Ordnung, Kombinatorik, neuere Geometrie (Berührungsaufgabe des Apollonius) selbst synthetische Geometrie. Gefallen sind wohl schon diophantische Gleichungen und Kettenbrüche.

Es dürfte sich aber sehr empfehlen, bei der Weglassung gewisser Gebiete das Kind nicht mit dem Bade auszuschütten; man könnte leicht erprobtes Altes gegen Neues von unsicherem Werte eintauschen. Man ist z. B. in der Differential- und Integralrechnung, wie sich aus Reifeprüfungsaufgaben mancher Oberrealschulen ergibt, schon in denselben Fehler verfallen, dessen Beseitigung in Frage 7 a. erwähnt ist.

Die Hauptsache ist Bewegungsfreiheit auf der Oberstufe. Es wäre z. B. wohl denkbar, daß ein Mathematiklehrer, der zugleich in Chemie unterrichtet, im Interesse des chemischen Unterrichts einmal wieder diophantische Gleichungen ausgraben möchte. Es wäre gut, wenn ihm dies gestattet werden könnte. In den Lehrplänen müßten eben für die Oberstufe neben unbedingt durchzunehmenden Gebieten eine größere Anzahl von Gebieten aufgeführt werden, deren Durchnahme der Wahl des Lehrers überlassen wird. Ein Anfang hierzu ist schon bei dem preußischen Lehrplan für die Oberrealschulen gemacht. An manchen Schulen wird dies übrigens wohl schon Tradition sein. Um die erwähnte größere Bewegungsfreiheit auf der Oberstufe zu ermöglichen, müßte aus der Oberstufe mancherlei in die Unterstufe aufgenommen, und deren Lehrstoff einer beschränkenden Durchsicht unterzogen werden; ich denke dabei an den Wegfall gewisser planimetrischen Konstruktionsaufgaben (Dreieckskonstruktionen mit $a \pm b$ usw.), an den Wegfall einer Unzahl von gewissen Textaufgaben, nach U III könnten Proportionen und Verhältnisse von Strecken, nach O III Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten, nach U II leichtere Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten, algebraische Analysis genommen werden. Die Methode des mathematischen Unterrichts und die Ausbildung der Mathematiklehrer ist ja auch seit längerer Zeit schon eine so viel bessere geworden, daß den Schülern heute ein gut Teil mehr zugemutet werden kann als früher.

9. Das Interesse des physikalischen und chemischen Unterrichts an der Reform des mathematischen Unterrichts.

„Nicht so sehr die Einführung der Infinitesimalrechnung als vielmehr die Gewöhnung an die Betrachtung funktioneller Zusammenhänge

und die Fähigkeit einer klaren räumlichen, durch gute Zeichnung unterstützten Auffassung ist es, die dem physikalischen Unterricht zugute kommt. Dabei würden physikalische Schülerübungen, bei denen zusammenhängende Werte zweier Veränderlichen stets graphisch dargestellt würden (siehe Alt, Schülerübungen zur Einführung in die Physik, Teubner) schon auf der Mittelstufe auch rückwärts dem mathematischen Unterrichte zugute kommen."

„Die Einführung der Differential- und Integralrechnung schon in U I oder besser noch früher ist im Interesse des physikalischen Unterrichts sehr erwünscht. Freilich müßten dann auch die Lehrbücher entsprechend umgearbeitet werden. Auch in der Chemie wird häufig die Anwendung der neuen Methoden große Vorteile bieten."

10. Reifeprüfung.

Die meisten Stimmen sind dafür, daß die Reifeprüfung aus rein praktischen Gründen unentbehrlich ist. Dagegen: „Wenn die Reifeprüfung den Zweck hat, die wissenschaftliche und moralische Reife der Schüler festzustellen, so scheint sie mir überflüssig, da dieser Zweck auf anderem Wege sicherer erreicht werden kann". „Vom Standpunkt der Schule aus halte ich sie für entbehrlich."

Ende 1910 ist eine neue Prüfungsordnung für die höheren Schulen (Reifeprüfung der Vollanstalten und Schlußprüfung der Realschulen) des Großherzogtums erlassen worden (Ministerialbekanntmachung vom 16. Dezember 1910), und da sie den verschiedenen Schulen vorher zur Begutachtung vorgelegen hat, so kann man wohl annehmen, daß sie im allgemeinen den jetzigen Bedürfnissen der Schulen entspricht. Uns interessiert daraus folgendes:

In der Mathematik hat der Schüler nachzuweisen, a) an Gymnasien, daß er in der Arithmetik bis zur Entwicklung des binomischen Lehrsatzes mit ganzen positiven Exponenten und in der Algebra bis zu den Gleichungen 2. Grades einschließlich, ferner in der ebenen und körperlichen Geometrie und in der ebenen Trigonometrie sichere, geordnete und zusammenhängende Kenntnisse besitzt, mit dem Koordinatenbegriffe und einigen Grundlehren von den Kegelschnitten bekannt ist, und sich ausreichende Übung in der Anwendung seiner Kenntnisse zur Lösung von einfachen Aufgaben erworben hat, b) an Oberrealschulen, daß er in der Arithmetik bis zur Entwicklung der einfacheren unendlichen Reihen und in der Algebra bis zu den Gleichungen 3. Grades einschließlich, in der ebenen und körperlichen Geometrie, in der ebenen und sphärischen Trigonometrie, in den Elementen der analytischen Geometrie der Ebene bis zu den wichtigsten Sätzen der Kegelschnitte einschließlich und in den Anfangsgründen der Differentialrechnung sichere, geordnete und zusammenhängende Kenntnisse besitzt und daß er sich hinreichende Übung in der Lösung von Aufgaben aus den bezeichnenden Gebieten erworben hat. – Zur

schriftlichen Prüfung gehört die Bearbeitung von vier mathematischen Aufgaben aus vier verschiedenen Gebieten. – Die Aufgaben sind so zu bestimmen, daß sie in Art und Schwierigkeit die Klassenaufgaben der Prima in keiner Weise überschreiten; sie dürfen aber nicht einer der bereits bearbeiteten Aufgaben so nahe stehen, daß ihre Bearbeitung aufhört, den Wert einer selbständigen Leistung zu haben. – Für die mathematische Arbeit hat der Fachlehrer drei Gruppen von je vier Aufgaben dem Direktor mit Namensunterschrift vorzulegen. (Dieser übersendet sie dem Regierungskommissar, der eine Gruppe auswählt, aber auch andere Aufgaben stellen kann). – Für die mathematische Arbeit sind $5\frac{1}{2}$ Stunde zu bestimmen. – Für die Bearbeitung der mathematischen Aufgaben darf mit Zustimmung des Regierungskommissars die Benutzung einer Formelsammlung gestattet werden. – Ein Schüler kann von der ganzen mündlichen Prüfung auf Beschluß der Prüfungskommission unter Zustimmung des Regierungskommissars befreit werden, wenn er nach seinen Leistungen in der Klasse und in der schriftlichen Prüfung sowie nach seiner ganzen Persönlichkeit dieser Auszeichnung würdig erscheint. – Befreiung von der mündlichen Prüfung in einzelnen Fächern kann auf einen vom Direktor im Einverständnis mit den betreffenden Fachlehrern gestellten Antrag vom Regierungskommissar zugelassen werden, wenn die Schulleistungen und, soweit solche vorgeschrieben sind, die Prüfungsarbeiten wenigstens als gut bezeichnet sind. – Ein Ausgleich (bei nicht genügenden Leistungen in einem verbindlichen wissenschaftlichen Lehrgegenstande) ist ausnahmsweise zulässig, wenn das Zurückbleiben in einem Gegenstande durch desto befriedigendere Leistungen in einem anderen gedeckt wird. In dem Gegenstande, für den der Ausgleich zugelassen wird, dürfen jedoch die Leistungen keinesfalls unter das Maß hinabgehen, das für die Versetzung nach Prima erfordert wird. Fächer, die nicht Gegenstand der Prüfung gewesen sind, können nicht zum Ausgleiche herangezogen werden, mit Ausnahme des Zeichnens an den Oberrealschulen.

Die Mehrzahl der Berichterstatter ist für die Beibehaltung von vier Prüfungsaufgaben. Doch sollte bei der Zensierung nicht bloß die Zahl der gelösten Aufgaben, sondern auch die Gediegenheit der Ausführung in Rücksicht gezogen werden, so daß für zwei tadellos gelöste Aufgaben noch ein „Genügend" heraussprânge. (Siehe Hamburg.)

Da die neue Prüfungsordnung zum ersten Male Ostern 1911 zur Anwendung gekommen ist, so mußten bisher an den Gymnasien von den vier Reifeprüfungsaufgaben je eine aus der Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie und Algebra genommen werden. Die planimetrischen Aufgaben sind meistens Dreieckskonstruktionen mit komplizierten Bestimmungsstücken oder Konstruktionsaufgaben mit algebraischer Analysis; gelegentlich finden wir eine Aufgabe aus der analytischen Geometrie oder der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte.

In der Trigonometrie finden wir Dreiecksberechnungen mit zum Teil ebenfalls recht komplizierten gegebenen Stücken oder auch Anwendungen der Trigonometrie. Die stereometrischen Aufgaben beziehen sich meist auf die Berechnung von Inhalten, Kantenlängen, Höhen, Oberflächen, Umkugel- und Inkugelhalbmesser usw. In Algebra werden bevorzugt Aufgaben über Gleichungen 2. Grades mit zwei Unbekannten nebst Anwendungen, arithmetischen und geometrischen Reihen, Aufgaben aus der Zinseszins- und Rentenrechnung.

Die Oberrealschule zu Oldenburg (nur diese kommt bis Ostern 1910 in Betracht) war nicht an bestimmte Gebiete für die Prüfungsaufgaben gebunden. Wir finden deshalb Aufgaben aus folgenden Gebieten: ebene und sphärische Trigonometrie (Erd- und Himmelskunde), Stereometrie, synthetische und analytische Geometrie, geometrische Reihen (Anwendung auf Geometrie), arithmetische Reihen höherer Ordnung, Gleichungen 3. Grades, Maximum und Minimum, Kettenbrüche, diophantische Aufgaben, binomische Reihe, Entwicklung in Reihen nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten mit Konvergenzbestimmung.

Beispiele von Reifeprüfungsaufgaben:

a) von einem Gymnasium Ostern 1911. 1. In welchem Punkte schneiden sich die Höhen des Dreiecks von den Eckpunkten $A \equiv 0{,}0$, $B \equiv 3{,}2$, $C \equiv 2{,}6$ und wie lang ist die von C auf AB gefällte Höhe? 2. In eine gegebene Halbkugel vom Radius R ist ein gerader Kegel so einbeschrieben, daß seine Spitze im Mittelpunkte der ebenen Grundfläche der Halbkugel liegt. Die Höhe des Kegels, sein Radius und der Radius der Kugel bilden eine geometrische Reihe. Wie verhalten sich die Volumina der beiden Körper? 3. Von einem gleichschenkligen Dreieck kennt man die Summe s von Schenkel und Basis sowie den Basiswinkel α. Wie groß sind die Seiten? $s = 70{,}64$, $\alpha = 70{,}64^0$. 4. Ein Kapital steht zu einem gewissen Zinsfuß eine gewisse Anzahl von Jahren auf Zinseszinsen. Nach Ablauf dieser Zeit gehen davon 30% des Anfangswertes verloren. Der Rest steht dieselbe Anzahl von Jahren wie bisher zu demselben Zinsfuß weiter, auf Zinseszinsen. Es ist dann angewachsen auf 160% des ursprünglichen Anfangswertes. Wie viele Jahre stand es bis zum Eintritt des Verlustes aus, wenn ein Kapital bei demselben Zinsfuß sich in 21 Jahren verdoppeln würde?

b) an der Oberrealschule zu Oldenburg. Ostern 1910. 1. Von dem Punkte $(-3;\ 1\frac{1}{2})$ sind an die Parabel $y^2 = 6x$ die Tangenten gelegt. a) Die Gleichungen der Tangenten und der Berührungssehne aufzustellen. b) Den Inhalt des Tangentendreiecks und den Inhalt des von der Berührungssehne abgeschnittenen Parabelsegments zu berechnen. 2. Bei welcher Deklination und um wie viel Uhr wahrer Zeit steht die Sonne in Oldenburg ($B = +53{,}14^0$) genau im Osten in einer Höhe von $15{,}68^0$? 3) Entwickle $\sqrt{1+x}$ nach dem binomischen Satze in

eine Reihe und berechne nach dieser $\sqrt{83}$ auf 5 Dezimalen. 4. In den Ausschnitt der Parabel $y^2 = 2px$, welcher in dem Winkel zwischen der Hauptachse und der zur Abszisse a gehörigen Ordinate liegt, soll das größte Trapez eingezeichnet werden, dessen eine parallele Seite die erwähnte Ordinate ist. $2p = 16$; $a = 9$.

11. Die Ausbildung der Lehramtskandidaten.

a) Trennung in eine mathematisch-physikalische und eine chemisch-biologische Gruppe. Ich kann mich für eine scharfe Trennung in diese beiden Gruppen nicht erwärmen, dafür ist der Zusammenhang der Physik und Chemie ein zu inniger. In dieser Meinung werde ich durch einen Kollegen unterstützt, der vier Gruppen wünscht; darunter eine mit Physik und Chemie als Hauptfächern. Es wird jedoch auch der erwähnten Gruppierung zugestimmt. „Aber eine gründliche Durchbildung in allen Fächern einer der beiden Gruppen erfordert so viel Zeit und Arbeit, daß die Gefahr einer Zersplitterung mit oberflächlichem Wissen zu nahe liegt. Und dann ist uns eine philosophische und vor allem bessere pädagogische Bildung auf der Universität sehr notwendig. Das ist um so wichtiger, als das sogenannte Seminarjahr viele Jahre hindurch bei dem Kandidatenmangel fast illusorisch geworden ist." Der hier berührten Zersplitterung soll durch folgende Vorschläge abgeholfen werden: „Warum nicht vollständige Wahlfreiheit der Fächer? Ist für einen Lehrer überhaupt eine allzu einseitige Ausbildung erwünscht? Vertiefung in eines der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer und freie Wahl von zwei Nebenfächern dürfte ausreichend sein." Folgender, nicht neuer Vorschlag dürfte vielfache Zustimmung erfahren: „Bezüglich der Ausbildung der Lehramtskandidaten würde meines Erachtens durch eine Trennung der Lehramtsprüfung in zwei Teile den Anforderungen der Schule und der Wissenschaft etwa in folgender Weise am besten gedient: Die Studienzeit, die de facto fünf Jahre beträgt, wird auch gesetzlich auf fünf Jahre normiert. Nach fünf Semestern kann die erste Prüfung abgelegt werden, nur mündlich außer in Mathematik in Physik, Chemie, Zoologie, Botanik, Geologie, Mineralogie (es sind wohl nicht alle Fächer gemeint, hinzuzufügen wären Philosophie, Pädagogik), nach zehn Semestern die zweite Prüfung schriftlich und mündlich in einem Fache, Mathematik oder Physik oder Biologie oder Chemie (Mineralogie und Geologie). Begründung: Die Schule verlangt Kenntnis möglichst vieler Fächer; dies ermöglichen die fünf ersten Studiensemester. Wissenschaftliches Studium bedingt völlige Vertiefung in ein Fach, das wird durch die zweite Prüfung möglich gemacht."

b) Ausbildung auf der Universität. Vergleiche hierzu den Bericht der Hansestädte, dem für Oldenburg folgendes hinzuzusetzen ist. Da Oldenburg keine Universität besitzt, so ist es für die Ausbildung seiner akademisch gebildeten Lehrer auf die Universitäten anderer Bundesstaaten angewiesen. An diesen wird auch die Staats-

prüfung abgelegt. Es ist aber für Oldenburg heute noch eine Prüfungsvorschrift in Kraft (Ministerialbekanntmachung vom 4. Mai 1859), nach welcher Kandidaten des höheren Schulamts und Privatlehrer der höheren Schulfächer eine Prüfung vor einer Kommission ablegen können, der außer einem vom Großherzog zu ernennenden Schulmanne die Direktoren der Gymnasien von Oldenburg und Vechta und der Oberrealschule als ordentliche Mitglieder angehören. Seit einigen Dezennien haben aber keine Prüfungen mehr stattgefunden.

c) Studium auf technischen Hochschulen. Die meisten Stimmen sind dafür, daß der jetzige Zustand, nach welchem einige Semester auf einer technischen Hochschule zugebracht werden können, genüge. Die einseitige Ausbildung auf einer technischen Hochschule habe den Fehler, daß der Mathematiker einerseits die Fühlung mit den übrigen Philologen und den anderen Fakultäten verliere, andererseits zu sehr Techniker werden könne.

d) Pädagogisch-praktische Ausbildung. Die Ausbildung der Kandidaten des höheren Lehramts erfolgt in Oldenburg nach den durch Bekanntmachung des Staatsministeriums vom 14. VII. 1908 erlassenen Vorschriften, die sich eng an die entsprechenden preußischen Vorschriften vom 15. III. 1908 anschließen. Folgende abweichende Bestimmungen dürften von Interesse sein: Das Seminarjahr heißt in Oldenburg Vorbereitungsjahr. „Abgehalten wird das Vorbereitungsjahr an einem der Gymnasien oder der Oberrealschule (es bestand z. Z. nur eine) unter Leitung des Direktors. Die Schullehrerseminare zu Oldenburg und Vechta können unter Zustimmung des Oberschulkollegiums dafür in Anspruch genommen werden, sofern die Benutzung ihrer Bibliotheken gewünscht wird, oder sofern es ratsam erscheint, einen Kandidaten auch in den Unterrichtsbetrieb des Seminars nähere Einsicht nehmen zu lassen." „Einigemale im Laufe des Jahres, vierteljährlich mindestens einmal, sind einzelne einschlagende Fragen aufzustellen, die der Kandidat in schriftlicher Form kurz zu behandeln hat." „Die Kandidaten, die sich zur Ableistung des Probejahres gemeldet haben, werden vom Ministerium der Kirchen und Schulen einem Gymnasium oder einer Realschule zugewiesen."

Zurzeit wird das Vorbereitungsjahr nur am Gymnasium zu Oldenburg abgehalten. Die Kandidaten, die an verschiedenen höheren Schulen des Herzogtums beschäftigt sind, kommen während des Vorbereitungsjahres wöchentlich einmal zu den Sitzungen im Gymnasium zu Oldenburg zusammen. Gegenstand derselben sind meist Referate über pädagogische Fragen im Anschluß an Schillers Pädagogik.

In den wenigen Jahren, seit welchen die Einrichtung des Vorbereitungsdienstes in Oldenburg de facto besteht, haben überhaupt erst vier Mathematiker, von denen die Mehrzahl zugleich Naturwissenschaftler waren, das Vorbereitungsjahr abgeleistet. Die Themata der schriftlichen Arbeiten waren folgende: 1. Lehrproben. Entwickelung des geometri-

schen Ortes in der analytischen Geometrie. — Einführung in die Lehre der Logarithmen. — Der Sinussatz und seine Anwendung auf die Berechnung der Dreiecke. 2. Der unterrichtliche Wert der Konstruktionsaufgaben.

Einheimische Kandidaten sind äußerst selten vorhanden. Bei dem chronischen Lehrermangel haben die Kandidaten im Vorbereitungsjahre, noch mehr die Probekandidaten meist Hilfslehrerstellen inne. Deshalb ist es kaum angebracht, ein Urteil abzugeben, ob die pädagogisch-praktische Ausbildung hinreichend ist. Außerdem ist ein großer Teil der Oldenburger Philologen gar nicht im Lande ausgebildet. „Für den Erfolg im Einzelfalle ist wohl weniger die Organisation ausschlaggebend als das Vorbild eines pädagogisch hervorragenden Lehrers wenn seine Art und die Natur des Kandidaten einander entsprechen." Wenig günstig urteilt ein Kollege: „Jeder Lehrer muß wohl sein eigener Schullehrer sein. Erfährt er bei der gegenwärtigen Ausbildung einerseits manchen praktischen Fingerzeig, so wird andererseits seine Individualität unterdrückt. Nicht jeder Ausbildner will einsehen, daß es auf andere Weise auch geht. – Niemals sollte die Beurteilung des Kandidaten e i n e m Herrn überlassen sein, wodurch der Kandidat in bewußte Abhängigkeit versetzt werde."

Angeregt wird von einem Herrn die Einrichtung von Fachseminaren in Chemie und Physik unter Leitung von Schulmännern, ferner die Beurlaubung von Lehrern zur Hospitation beim Unterricht hervorragender Fachleute, von welcher Einrichtung er sich mehr verspricht als von den zu kurzen wissenschaftlichen Ferienkursen.

Namen- und Sachregister.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND I HEFT 5

DIE NEUZEITLICHE ENTWICKLUNG DES MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS AN DEN HÖHEREN MÄDCHENSCHULEN DEUTSCHLANDS

INSBESONDERE NORDDEUTSCHLANDS

VON

PROFESSOR DR. J. SCHRÖDER
DIREKTOR DES STAATLICHEN LYZEUMS AM LERCHENFELD IN HAMBURG

MIT EINEM SCHLUSSWORT ZU BAND I VON F. KLEIN

BG

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND I HEFT 5

DIE NEUZEITLICHE ENTWICKLUNG DES MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS AN DEN HÖHEREN MÄDCHENSCHULEN DEUTSCHLANDS

INSBESONDERE NORDDEUTSCHLANDS

VON

PROFESSOR DR. J. SCHRÖDER
DIREKTOR DES STAATLICHEN LYZEUMS AM LERCHENFELD IN HAMBURG

MIT EINEM SCHLUSSWORT ZU BAND I VON F. KLEIN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

Mit dem Hefte 5 schließt der Band I dieser IMUK-Abhandlungen. Titelblatt und Inhalt des Gesamtbandes sind vorgeheftet. Einbanddecken für den Gesamtband werden auf Bestellung abgegeben.

ZUM ABSCHLUSS DES BANDES I DER ABHANDLUNGEN.

Seit ich im Herbst 1909 zu dem ersten Hefte des nunmehr abgeschlossenen ersten Bandes unserer Abhandlungen das Einführungswort schrieb, haben sich die Arbeiten der IMUK und insbesondere ihres deutschen Unterausschusses mächtig entwickelt; der Leser erfährt Näheres aus der beigedruckten Liste der bereits erschienenen und noch geplanten Veröffentlichungen. In den Dank, den wir allen Mitarbeitern des deutschen Unterausschusses zollen, mischt sich die Trauer um das plötzliche Dahinscheiden unseres treuen Freundes P. Treutlein. Ein längerer Nachruf aus der Feder von P. Stäckel ist ihm in Heft VIII unserer „Berichte" gewidmet. Hier liegt mir ob, der Verschiebung zu gedenken, die durch seinen Tod in der Zusammensetzung des deutschen Unterausschusses der IMUK gemäß Beschluß der Deutschen Mathematiker-Vereinigung vom 17. Sept. (Münsterer Tagung) eingetreten ist. Sie besteht darin, daß Hr. Prof. Dr. A. Thaer, Hamburg (Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentore), der seither schon dem „nationalen" Beirat angehörte, an Stelle von P. Treutlein in die Reihe der Delegierten eingetreten und im nationalen Beirat durch Hrn. Prof. Dr. H. E. Timerding von der technischen Hochschule in Braunschweig ersetzt worden ist. Der Leser wolle danach die in den Vorbemerkungen zu Heft 1 dieses Bandes gegebene Liste berichtigen. Übrigens bedarf diese Liste auch insofern der Ergänzung, als in ihr der Name unseres Schriftführers, Hrn. Oberlehrers Dr. W. Lietzmann, Barmen, versehentlich weggeblieben ist; wer irgend den Arbeiten des deutschen Unterausschusses gefolgt ist, weiß, welch besonderen Anteil daran Hr. Lietzmann von Anfang an gehabt hat.

Für den im August abgehaltenen internationalen mathematischen Kongreß in Cambridge wurde seitens der Teubnerschen Buchhandlung ein besonderer Prospekt über die Schriften des deutschen Unterausschusses ausgegeben. Ich schließe hier, indem ich den einführenden Bemerkungen, die ich dazu schrieb, zwei Sätze entnehme, die geeignet scheinen, den Sinn und die Bedeutung unserer Arbeiten allgemein verständlich hervortreten zu lassen.

Erstlich, was das besondere Unternehmen der vorliegenden Abhandlungen angeht:

„Der Inhalt der einzelnen Abhandlungen ist sehr verschiedenartig, und auch die Auffassungsweisen, die hervortreten, sind nicht überall die gleichen. In der Tat konnte sich die Redaktion nur das eine Ziel

setzen, daß jeder Mitarbeiter sein Bestes geben solle. Im übrigen Mannigfaltigkeit! So allein entspricht es dem Wesen des deutschen Unterrichtsbetriebes, in das wir — was Mathematik angeht — dem Inlande und Auslande Einblick gewähren wollen."

Sodann hinsichtlich der Arbeiten der IMUK überhaupt:

„Die Vertreter und Freunde der IMUK tagen in Cambridge zusammen mit den mathematischen Forschern aller Art. Es liegt in der Begrenztheit der menschlichen Leistungsfähigkeit, daß derjenige, der sich mit selbständigen wissenschaftlichen Untersuchungen eines Faches beschäftigt, für die Fragen der Organisation und der Methode des Unterrichts zumeist wenig Sinn hat, und umgekehrt. Der Rahmen unserer großen internationalen Kongresse aber sollte nicht nur weit genug sein, um beiderlei Interessen zu umspannen, sondern er sollte so gefügt sein, daß sie einander näher kommen. Daß die Wissenschaft für allen Unterricht die notwendige Voraussetzung abgibt, wird von niemandem bestritten. Umgekehrt ruht die Bedeutung, welche die wissenschaftliche Mathematik für die allgemeine Kultur besitzt, zu einem guten Teile auf einem zweckmäßig geleiteten mathematischen Unterricht. Aber mehr als das: das Unterrichtswesen kann für den Betrieb der Wissenschaft eine Art Reguliervorrichtung sein. Die Wissenschaft, sich selbst überlassen, strebt ihrer Natur nach immer mehr dazu, sich zu spezialisieren und sich durch gesteigerte Abstraktion dem allgemeinen Verständnis zu entfremden. Dem entgegen bringt eine Betrachtung des Unterrichtswesens, wie sie die IMUK anstrebt, die große Ausdehnung des Gesamtbereichs, auf den die Wissenschaft hinauswirken soll, und die ursprüngliche Art des menschlichen Denkens in den Vordergrund. Und das scheint als Gegengewicht gerade in jetziger Zeit nützlich, ja unentbehrlich."

GÖTTINGEN, Ende Oktober 1912.

F. KLEIN.

VORWORT ZUR NACHFOLGENDEN ABHANDLUNG

Da erst wenige Jahre verflossen sind, seitdem die Mathematik neben den anderen wissenschaftlichen Fächern vollgültiges Bürgerrecht im Lehrplane der höheren Mädchenschulen erlangt hat, so könnte es scheinen, als ob es verfrüht wäre, schon jetzt einen Bericht über den mathematischen Unterricht an den höheren Bildungsanstalten für die weibliche Jugend zu geben. Andererseits aber hat es kein geringes Interesse, die an den höheren Mädchenschulen in den verschiedenen Staaten Deutschlands hinsichtlich des mathematischen Unterrichts vorliegenden Verhältnisse zu schildern, um so klar zu legen, wo und inwieweit noch Abänderungen anzustreben sind.

Die vorliegende Abhandlung gliedert sich in drei Hauptabschnitte:

Im ersten Teil wird zunächst in gedrängter Übersicht ein Bild von den zuerst recht primitiven Zuständen im Mädchenbildungswesen entworfen; es folgt die Würdigung der hauptsächlichen Einflüsse, die vor allem im Norden Deutschlands allmählich zur Besserung der Lage beitrugen.

Der zweite Teil beschäftigt sich ausschließlich mit der tiefgreifenden preußischen Neuordnung von 1908 und versucht zu zeigen, wie es im einzelnen in Preußen betreffs des ganzen inneren Betriebes im Rechen- und Mathematikunterricht und mit der Ausbildung der daran beteiligten Lehrkräfte bestellt ist.

Der dritte Teil behandelt, ohne sich in historische Rückblicke zu verlieren, die gegenwärtige Sachlage in den übrigen deutschen Staaten, soweit sich feste, klare Verhältnisse schildern lassen, und sieht aus der dieser Erwägung davon ab, die Reichslande in den Kreis der Betrachtung einzubeziehen, da von dort etwas Nennenswertes nicht zu berichten ist.

Die Arbeit berücksichtigt, was hier besonders vermerkt sei, die Entwicklung der Dinge bis zum Abschluß des Jahres 1912. Als Quellen sind außer den amtlichen Bestimmungen der verschiedenen Staatsregierungen die bekannten Werke über das höhere weibliche Bildungswesen und zahlreiche Aufsätze aus der pädagogischen Fachliteratur herangezogen worden. Unberücksichtigt sind die Veröffentlichungen in Tageszeitungen und Wochenschriften geblieben. Auch mußten die zahllosen Publikationen über die Bestrebungen der ausländischen Frauenbewegung aus dem Bereich der Betrachtung ausscheiden. Gewiß mögen durch ausländische Tendenzen mancherlei Beeinflussungen der Auffassungen und Wünsche unserer deutschen Frauenwelt bezüglich der Gestaltung der höheren Mädchenbildung hervorgerufen sein. Sobald solche Ein-

wirkungen nachhaltiger gewesen sind, haben sie aber auch entsprechenden Ausdruck in unserer heimischen Literatur gefunden, und deswegen konnte, wenn nicht die Arbeit über einen gewissen Rahmen hinauswachsen sollte, die ganze ausländische Literatur zur Frauenbewegung außer Betracht bleiben.

Nach einer anderen Seite hin aber ist die Darstellung etwas in die Breite gegangen, insofern auch viel Nichtmathematisches zur Sprache gebracht worden ist. Das ist aber immer in der ausgesprochenen Absicht geschehen, zu zeigen, wie sich der eigentliche mathematische Betrieb in das Ganze einordnet. Aus diesem Grunde habe ich mich meist auch nicht damit begnügt, z. B. nur die Stundenzahlen für Rechnen und Mathematik anzuführen; sondern in fast allen Fällen sind die vollständigen Stundentafeln abgedruckt worden, damit u. a. auch der nichtdeutsche Leser sich nach Möglichkeit ein Urteil bilden kann, wie sich an den höheren Mädchenbildungsanstalten die Mathematik (einschl. Rechnen) an die Seite der anderen Fächer stellt.

Bei der Abfassung der Abhandlung durfte ich mich der freundlichen Unterstützung von vielen Seiten erfreuen. In erster Linie danke ich Herrn F. Klein herzlich für das beständige Interesse an der Durchführung meines Planes und für die mannigfaltigen, wertvollen Ratschläge bei der Behandlung von Einzelfragen. Die Lesung der Korrekturen vollzog sich unter freundlicher Mitwirkung der Herren P. Stäckel (Karlsruhe), A. Gutzmer (Halle), W. Lorey (Leipzig), G. Noodt (Berlin), W. Lietzmann (Barmen), M. Kröger (Hamburg) und B. Kröger (Hamburg). Nicht aufzählen kann ich hier die vielen Fachgenossen, die mir bei der Sammlung des Materials auf meine Fragen so bereitwillige Auskunft gaben und dadurch in außerordentlich dankenswerter Weise meine Arbeit gefördert haben.

Indem ich allen, denen ich mich verpflichtet fühle, meinen Dank hiermit ausspreche, übergebe ich meine Ausführungen den Fachgenossen mit der Bitte, sie mit Nachsicht aufnehmen zu wollen. Möchte mein Wunsch sich erfüllen, daß diese Abhandlung, die vor allen Dingen den Vergleich der in den verschiedenen Teilen unseres großen Vaterlandes vorhandenen Regelungen des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenschulen ermöglichen soll, dazu beitragen darf, weiterem gesunden Fortschritt in der Mädchenbildung die Wege zu ebnen.

Hamburg, d. 30. Dezember 1912.

J. SCHRÖDER.

INHALTSVERZEICHNIS

Dritter Teil.

Über den mathematischen Unterricht an den höheren Mädchenschulen in anderen deutschen Staaten.

A. Die norddeutschen Großherzogtümer.

B. Die Hansestädte.

C. Die übrigen nord- und mitteldeutschen Staaten mit Ausnahme von Sachsen.

D. Das Königreich Sachsen.

Seite

H. Das Königreich Bayern.

Erster Teil.

Einführende Angaben über die Entstehung und Einrichtung höherer Mädchenschulen in Deutschland.

1. Entwicklung bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts.

a) Die Zustände bis zum Ende des 16. Jahrhunderts.

Die Geschichte des höheren Mädchenschulwesens[1]) zeigt, daß die „höhere Mädchenschule“ unserer Tage ein noch verhältnismäßig recht junges Gebilde ist, das seine Entstehung und Ausgestaltung nicht zuletzt den tiefgehenden politischen und wirtschaftlichen Umwandlungen, wie sie das 19. Jahrhundert brachte, verdankt. Die früheren Anläufe und Ansätze zur Einrichtung von Schulen für die weibliche Jugend zeitigten durchweg nur Veranstaltungen von einseitiger, unvollkommener Art und geringer Lebensdauer, da es in den früheren Jahrhunderten, wenigstens in Deutschland, fast ganz allgemein an der tieferen und feineren psychologischen Erfassung der Aufgaben und Stellung der Frau und damit auch an der verständnisvollen Pflege der notwendigen allgemeinen Bildungsbedürfnisse des weiblichen Geschlechts fehlte. Im Mittelalter suchten zwar auch Frauen durch klösterliche Erziehung der Gelehrsamkeit teilhaftig zu werden, deren alleinige Pflege damals das Privileg der Geistlichen war. Die Zeit des mehr und mehr aufblühenden Rittertums schuf vermöge des Einflusses des Minnesanges für die Frauen des Ritterstandes das Bedürfnis nach Erweiterung der im Wesentlichen auf Latein, Musik und feine Handarbeit gerichteten Ausbildung im Kloster, und man ergänzte die Bildung der zur „Herrin“ erhobenen Ritterfrau durch Pflege der französischen Sprache und deutscher Literatur sowie durch Ausbildung verfeinerter, höfischer Formen. Doch als der Niedergang des Rittertums einsetzte, und als

1) Vgl. hierzu O. Sommer: Die Entwicklung des höheren Mädchenschulwesens in Deutschland, veröffentlicht in J. Wychgram, Handbuch des höheren Mädchenschulwesens. Leipzig (Voigtländer) 1897. — M. Martin: Die höhere Mädchenschule in Deutschland, 65. Bändchen der Sammlung: Aus Natur und Geisteswelt. Leipzig (Teubner) 1905. — M. Martin, Mädchenerziehung und Mädchenunterricht, veröffentlicht in W. Rein, Enzyklopädisches Handbuch der Pädagogik. Langensalza (Beyer), 5. Bd., S. 703 ff. — H. Lange, Mädchengymnasien, ebenda, S. 718 ff. — H. Lange und G. Bäumer, Handbuch der Frauenbewegung. III. Bd.: Der Stand der Frauenbildung in den Kulturländern. Berlin (Moeser) 1902. — J. Wychgram, Geschichte des höheren Mädchenschulwesens in Deutschland und Frankreich; aus Schmid, Geschichte der Erziehung, Sonderausgabe. Stuttgart (J. G. Cotta) 1901. — H. Gaudig, Höheres Mädchenschulwesen; in: „Die Kultur der Gegenwart“, hrsg. von P. Hinneberg, Leipzig (Teubner), Teil I Abt. I, 2. Aufl. 1912, S. 191 ff.

das Klosterleben sich von den Grundsätzen der Zucht und Sitte abwandte, erloschen auch die durch sie vermittelten Bildungsmöglichkeiten. Das nun in den Vordergrund rückende, mehr und mehr erstarkende Bürgertum schuf aber auch keine neuen Verhältnisse hinsichtlich der schulgemäßen Unterweisung und geistigen Ausbildung der Mädchen. Es wurde gar nicht die Notwendigkeit dafür empfunden; denn die mittelalterliche Bürgersfrau sollte und brauchte nicht mehr zu können und zu wissen, als ihr zur Führung ihres Hauswesens und zur Erfüllung ihrer Pflichten als Gattin und Mutter frommte. Eine besondere höhere Ausrüstung mit Kenntnissen, die den Frauen vielleicht die Entfaltung ihrer Fähigkeiten im Wettbewerbe mit dem Manne ermöglicht hätten, wurde nicht für nötig gehalten. Dadurch sank die Frau in der Allgemeinbewertung auf eine niedere Stufe, und es hat recht lange gedauert, bis man den Frauen einmal wegen der ihnen in der menschlichen Gemeinschaft von der Natur zugewiesenen besonderen Aufgaben, sodann aber auch aus anderen Billigkeitsgründen zur Gewährung einer gründlichen geistigen Durchbildung verholfen hat.

Neue Blüten trieben die Geisteswissenschaften zur Zeit des Humanismus, als der Geist der Antike wieder zur Geltung kam. Den Frauen aber brachte dieser Wandel wenig Segen und Fortschritt, obwohl einzelne erlesene unter ihnen, die es den Männern nachtun wollten, es zu tiefer Gelehrsamkeit brachten, wie Olympia Morata, Renata von Este, Charitas Pirkheimer, die Töchter von Thomas Moore[1]) u. a.

Fast wundersam mutet es uns aus solcher Zeit an, wenn von dem Auslande her der Ruf nach gänzlicher Umgestaltung des Unterrichts der Mädchen laut wurde. Der Spanier Juan Luis Vives[2]) betont, „daß es um den Staat schlecht bestellt sei, der nicht für die Erziehung und sittliche Ausbildung der Mädchen Sorge trage. Er gibt in dem der Königin Katharina von England gewidmeten Werk Anweisung, wie die Mädchen der mittleren und oberen Klassen erzogen werden sollten. Sein Zweck ist Regeneration der Gesellschaft, in der das weibliche Geschlecht noch entarteter sei als das männliche.“ Von dem Bildungsmaß der Frau hängt ihm die Gesundheit der menschlichen Gesellschaft ab; wissenschaftlich vertiefte Bildung fordert er für die Frau mit Rücksicht auf die Charakterbildung. Im übrigen will er, daß die Frau nur durch ihre eigene Vervollkommnung und still im Hause wirken soll.[3]) Erfolgreich sind seine Anregungen in Deutschland jedoch nicht gewesen.

Das gleiche Schicksal teilen die aus dem Geiste der Reformation erwachsenen Bestrebungen, den Mädchenunterricht zu heben. Brachte die

1) Vgl. Thomas Moore, „ein Pionier der höheren Mädchenschule“. Festschrift von Direktor Dr. Gerth, Bromberg 1884.

2) Vgl. Johannes Ludovicus Vives: Institutio feminae christianae, deutsch herausgegeben als: Von Underwysung ayner christlichen frawen. Augsburg 1544. — J. Wychgram, Juan Luis Vives' Schriften zur weiblichen Bildung. Wien 1883.

3) Vgl. M. Martin, Die höhere Mädchenschule in Deutschland, Leipzig (Teubner) 1905, S. 24 u. 25.

Lehre Luthers die Würde der Ehe und damit das Ansehen der Frau auch wieder zu Ehren, so blieben doch die Versuche auf dem Gebiete des Mädchenschulwesens vereinzelte erfolglose Unternehmungen. Desgleichen stellt auch die Art, wie Bugenhagen in seinen Jungfrauenschulen zu Hamburg und Braunschweig die Mädchen unterrichtet wissen wollte, keinerlei Fortschritt dar. Die Hauptsache war Religionslehre (Deutung der 10 Gebote, Lehre vom Glauben, Vaterunser, der Taufe, dem Sakrament des Leibes und Blutes Christi; Auswendiglernen von Sprüchen aus dem Neuen Testament; etliche heilige, den Jungfrauen dienende Historien oder Geschichten zur Übung ihrer Memoiren oder Gedächtnis, dazu auch Erlernung von christlichen Gesängen). Das kann, wie Bugenhagen betont, in der Hauptsache in zwei Jahren gelernt werden.[1])

b) Die Verhältnisse im 17. und 18. Jahrhundert.

Unvollkommen, wie sie waren, blieben die Zustände über das ganze 17. Jahrhundert hinweg, das mit seinem für unser Vaterland so unheilvollen 30jährigen Kriege jede Regung, im Schulwesen zu bessern, niederhielt. Erst dem Pietisten Francke[2]), der Fénelons Schrift: „Sur l'éducation des filles" 1698 in deutscher Sprache erscheinen ließ und so französischen Erziehungsgedanken auch bei uns Eingang verschaffte, gebührt das Verdienst, die erste deutsche Bürgerschule für Knaben und Mädchen ins Leben gerufen zu haben. Die Mädchenschule hatte zum Vorbilde das nach Fénelons Grundsätzen eingerichtete berühmt gewordene Erziehungsinstitut der Frau von Maintenon genommen und gab so den Anfang zur Unsitte der Institutserziehung der Mädchen aus den höheren Ständen. Das charakteristische Kennzeichen der Franckeschen Gründung bestand darin, daß er durch seine Anstalt eine deutsche, christliche Bildung mit realistischem Einschlage vermitteln wollte. Franckes Schüler Hecker gründete 1748 in Berlin in Verbindung mit seiner Realschule für Knaben eine besondere Mädchenabteilung, wo u. a. in der obersten Abschlußklasse Französisch, Geographie und Geschichte getrieben wurden. Diese Schule besteht noch heute, und zwar seit 1827 als königliche Elisabethschule.[3])

Wirksame Anregung kam für die Erziehungsfragen des weiblichen Geschlechts auch von seiten der Philosophen, deren Ansichten sich allerdings zum Teil diametral gegenüber standen. Comenius will der Gefahr, die er in dem geistigen Tiefstande der Frauen erblickt, durch gründliche Ausbildung der Mädchen begegnen. Moscherosch dagegen will alle Bildung, selbst Lesen und Schreiben, vom Frauengeschlechte fernhalten, da er die Meinung vertritt, daß bei den Frauen mit zunehmender Bildung

1) J. Bugenhagen, Braunschweigische Kirchenordnung vom Jahre 1528 (vgl. Keppe, Geschichte des deutschen Volksschulwesens, Bd. III S. 238).

2) Vgl. E. v. Sallwürk, Fénelon und die Literatur der weiblichen Bildung in Frankreich. Langensalza (Beyer) 1886. – Ferner: J. Wychgram, Das weibliche Unterrichtswesen in Frankreich. Leipzig 1886.

3) Vgl. Bachmann, Die königliche Elisabethschule zu Berlin. 1893.

ein Nachlassen in der Erfüllung ihrer Pflichten verbunden sei. Gleichfalls auf wenig hohem Niveau steht allerdings auch die Rousseausche Auffassung vom Lebensinhalt und Zweckdasein der Frau. Sein Grundsatz: „La femme est faite spécialement pour plaire à l'homme" enthält den Frauen geradezu das Anrecht auf höhere Durchbildung vor, obwohl Rousseau übrigens in Anlehnung an die von Locke aufgestellte Individualitätsphilosophie und die daraus sich ergebende Vernunfterziehung aufklärenden Fortschrittsprinzipien huldigte. Indirekt aber stifteten diese Vorgänge auf dem Gebiete der Philosophie doch Nutzen, insofern die öffentliche Meinung durch die allmählich erwachsende Literatur zur Stellungnahme vorbereitet wurde.

Besonders treffend betonte Stuve[1]) die Verpflichtung des Staates, beim weiblichen Geschlechte, ebenso wie beim männlichen, für gründliche Ausbildung seiner Gaben in öffentlichen Mädchenschulen zu sorgen. Er schreibt: „Wenn die Regierung für die Wegeverbesserung, den Brückenbau, die Feueranstalten, die Verhütung der Viehseuchen usw. sorgt, so muß sie auch für die öffentliche Erziehung der Mädchen sorgen. Der weibliche Teil der Untertanen hat ebenso viel Recht auf die Fürsorge des Staates als der männliche." Bestehen blieb hierbei die Anschauung, daß die Frau ihre Ausbildung für den Mann empfangen müsse, und daß in der Schule alles, was der vornehmeren Frau zur Ausfüllung ihrer Stellung dienlich sei, gepflegt werden müsse: Sanftmut, Geduld, Anstand und die Fähigkeit, Haus zu halten.

Nicht unerwähnt darf bleiben der Mädchenschulmann Hensel[2]), der in vierklassigen Schulen für die mittleren Stände die Mädchen vom 5. bis 14. Jahre unterrichtet sehen will. Unterrichtsgegenstände sollen u. a. sein: populäre Philosophie, Logik, philosophische Sittenlehre, Erfahrungsseelenkunde, Naturlehre, diätetische Anfangsgründe, Unterweisung über die Erzeugung und die körperliche und moralische Erziehung des Menschen. In der Schule für die höheren Stände, einer Art Akademie, die auch die künftigen Lehrerinnen vorbilden soll, sollten die Schülerinnen Kenntnisse im Englischen, Italienischen, in der Erziehungslehre, in weiblicher Ökonomie, im Zeichnen, Malen, Reiten, in der Musik und anderen den Einzelneigungen entsprechenden Gegenständen erhalten können. Aber es blieben nur Pläne! Das allgemeine Elend im Schulwesen, wenigstens soweit die Mädchen in Frage kamen, blieb bestehen. Ja, aus der Unterweisung der weiblichen Jugend machten sich vielfach Personen ein Gewerbe, denen von Hause aus jede Berechtigung und Befähigung dazu fehlte, Das wird belegt durch Campes Ausspruch: „Käme ein Mondbürger herab auf unsere Erde, so würde

1) Vgl. J. Stuve, Über die Notwendigkeit der Anlegung öffentlicher Töchterschulen für alle Stände, 1786; auch abgedruckt in Campe, Über einige verkannte, wenigstens ungenützte Mittel zur Beförderung der Industrie der Bevölkerung und des öffentlichen Wohlstandes. Zweites Fragment. Wolfenbüttel 1786.

2) J. D. Hensel, Das System der weiblichen Erziehung, besonders für den mittleren und höheren Stand. 2 Bde. Halle 1787.

das traurige Resultat seiner Beobachtung ungefähr folgendes sein: Was das weibliche Geschlecht, besonders in den gesitteten Ständen, betrifft, so scheint es den besagten Staaten gleichviel zu sein, ob Menschen oder Meerkatzen daraus werden, so wenig bekümmern sie sich darum ... Wenn etwa hier und da eine französische Putzhändlerin, der es in ihrem Vaterlande nicht glücken wollte, oder ein gewesenes Kammermädchen sich in Ermangelung eines bequemen Nahrungszweiges beigehen läßt, das Schild der Erziehung auszuhängen, so kann man das doch nicht öffentliche, zweckmäßige Anstalten nennen?" Typisch ist auch für die Kennzeichnung der damaligen Sachlage der folgende Bescheid Friedrichs des Großen, der einem um Errichtung einer höheren Töchterschule bemühten Schlesier erteilt wurde[1]): „Es ist mir Euer Bericht wegen Errichtung einer Frauenzimmerschule zwar zugekommen, ich muß Euch aber darauf zu erkennen geben, wie ich gar nicht absehe, was daraus herauskommen soll. Es gibt ja vor ein Mädchen Schulen genug und Studien haben sie nicht nötig; sondern was sie zu lernen haben, das können sie genugsam lernen, ohne daß es einer neuen kostbaren Anstalt gebrauche. Übrigens sind das nur Grillen von solchen Leuten, die weiter nichts zu tun haben."

c) Ansätze zu Beginn des 19. Jahrhunderts.

Anders wurde es erst, als Deutschland sich zu Beginn des 19. Jahrhunderts aus seiner politischen Ohnmacht durch Anspannung aller seiner Kräfte befreit sah, als die Gedanken Pestalozzis für Hebung der Volksbildung auch befruchtend auf die Gestaltung der Mädchenbildung wirkten und die aus der französischen Revolution gezogenen Lehren für das Aufblühen des emsig schaffenden Bürgertums von Bedeutung wurden. Das ihrige tat auch die Glanzperiode der deutschen Nationalliteratur, die in den herrlichen Frauengestalten, wie sie Lessing, Schiller und Goethe schufen, den Deutschen erzieherische Ideale von bisher nicht gekannter Art vor Augen stellte.

An die Namen Karoline Rudolphi[2]), Betty Gleim[3]), Ziegenbein[4]) knüpfen sich die nun einsetzenden fortschrittlichen Ansätze auf dem Gebiete der Schulgründungen. B. Gleims Mädchenschule in Bremen, Ziegenbeins Schule in Blankenburg, die Stadttöchterschule in Hannover, die Göttinger und die Heidelberger Universitätstöchterschule, das Stuttgarter Katharinenstift, Bormanns Töchterschule in Berlin (jetzt königl. Augustaschule) in Verbindung mit der ersten preußischen Lehrerinnenbildungsanstalt, die Musterschule in Frankfurt a. M., aus der die spätere

1) Vgl. J. Wychgram, Handbuch des höheren Mädchenschulwesens. Leipzig (Voigtländer) 1897. S. 12.

2) K. Rudolphi, Gemälde weiblicher Erziehung. 2 Tle., 4. Aufl. Leipzig (Winter) 1857.

3) B. Gleim, Erziehung und Unterricht des weiblichen Geschlechts. 2 Bde. Leipzig (Göschen) 1810.

4) J. W. H. Ziegenbein, Über die ursprüngliche Eigentümlichkeit des weiblichen Geschlechtes, Blankenburg 1808.

Elisabethenschule entstand, das sind einige Beispiele für die in den ersten beiden Jahrzehnten erfolgten Neugründungen. Über die Lehrpläne der Mädchenschulen dieser Zeit läßt sich Heyse, der Leiter einer höheren Töchterschule in Nordhausen aus[1]); an jener Anstalt erstreckte sich der Lehrplan auf folgende Gegenstände[2]): „Christliche Religions- und Pflichtenlehre, die gemeinnützigsten Kenntnisse des menschlichen Körpers und seiner Gesunderhaltung (Anthropologie und Diätetik), die Natur-, Gewerbe- und Warenkunde, Erd- und Weltbeschreibung, Geschichte und Mythologie, praktische Logik (Vernunftlehre), Klugheitslehre, ferner richtiges Sprechen, Schreiben und Lesen der deutschen und der französischen Sprache, Rechnen, Zeichnen, Singen, Tanzen nebst allen weiblichen Geschicklichkeiten, welche von gebildeten Töchtern mit Recht verlangt werden können." Im großen und ganzen ist es ein Plan nach dem Muster Hensels. Auch jetzt noch wurde alle Mädchenbildung immer unter dem Gesichtswinkel angesehen und zugeschnitten, daß den Frauen ihrer „besonderen Eigenart gemäß" mehr eine auf Kultur des Gefühlslebens berechnete Ausbildung auf der Schule zu gewähren sei als sie zugleich mit geordneten realen Kenntnissen fürs Leben auszurüsten. Somit haftete den um die Mitte des 19. Jahrhunderts bestehenden Töchterschulen, wie man sie nannte, durchaus das Gepräge der Halbheit an, was abgesehen von allem anderen durch die Auswahl der Lehrgegenstände belegt wird. Daher der Spott „die höhere Tochter".

2. Die weitere Entwicklung bis zu den preußischen „Maibestimmungen" (1894).

a) Bis zur Weimarer Tagung (1872).

Erst in der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts kam die Zeit, die uns eine solche Ausgestaltung und Form der höheren Mädchenschule geben sollte, wie sie im Vergleich zu höheren Knabenbildungsanstalten und mit Rücksicht auf andere in der Zwischenzeit laut gewordene Wünsche wenigstens teilweise berechtigten Ansprüchen genügt. Verschiedene Momente haben diesen Lauf der Dinge begünstigt. Da sind zuerst zu nennen die gewaltigen, zum großen Teil durch den reißenden Fortschritt in Naturwissenschaft und Technik hervorgerufenen Umwälzungen auf wirtschaftlichem und sozialem Gebiet, die bis in die Kreise der häuslichen Wirtschaftsführung wirkten und den Wirkungsbereich der Frau in mannigfacher Weise veränderten. Die neuen Kulturwerte erforderten

1) Heyse, Gesammelte Schriften und Reden über Unterricht und Bildung besonders der weiblichen Jugend. Quedlinburg 1826.

2) J. Wychgram, Analekten zur Geschichte der weiblichen Bildung, Zeitschr. für weibliche Bildung. Bd. XI S. 547ff. und 577ff. — Auch: O. Sommer: Die Entwicklung des höheren Mädchenschulwesens in Deutschland, veröffentl. in J. Wychgram, Handbuch des höheren Mädchenschulwesens, Leipzig (Voigtländer) 1897, S. 16.

auch das entsprechende Verständnis auf Seiten der Frauen, die überdies je ungünstiger das zahlenmäßige Verhältnis zwischen den Individuen beider Geschlechter und je unsicherer damit für viele Mädchen die Aussicht wurde, jemals eine Ehe schließen zu können, um so sehnsüchtiger durch Vertiefung und Erweiterung der Bildungsmöglichkeiten sich zu selbständiger Ausfüllung auch anderer als der rein häuslichen Lebensaufgaben auszubilden wünschten. Mächtigen Einfluß übte auf die Frauen auch die Blüte von Kunst und Wissenschaft aus, und so tauchte, was unter früheren Verhältnissen kaum möglich erschienen wäre, am fernen Horizonte der weiblichen Geistesbildung der sich immer mächtiger regende Wunsch nach gesetzlich gesichertem Zugang zu allen Studien auf.

Der Staat jedoch stand allen diesen Bestrebungen gegenüber noch geraume Zeit Gewehr bei Fuß und ließ den Mädchenschulen nicht die Fürsorge zuteil werden, deren sich die höheren Knabenschulen längst erfreuten. Soweit sich neben allerlei Privatschulen öffentliche höhere Mädchenschulen gebildet hatten, sorgten die städtischen Aufsichtsorgane oder auch die Leiter der Anstalten in Verbindung mit ihren Kollegien für Festsetzung der Lehrziele und Lehrpläne. Eine besonders schwierige Frage war die Gewinnung geeigneter Leiter und Lehrkräfte; nur in dem Maße, wie sich die äußeren und inneren Verhältnisse der öffentlichen Mädchenschulen besserten, verminderten sich auch die Hindernisse, die dem Eintritt trefflicher Männer in den Mädchenschuldienst, der bei vielen demjenigen an den höheren Knabenschulen als nicht ebenbürtig galt, entgegenstanden. Nur vereinzelt waren die Versuche, die Lehrerinnenausbildung in die Wege zu leiten und zu heben. Nachdem das auf Bormann zurückzuführende königliche Augustaseminar in Berlin einen besonderen Ruf erlangt und das Provinzialschulkollegium der Provinz Brandenburg 1837 eine Prüfungsordnung für Lehrerinnen veröffentlicht hatte, folgten 1845 und 1853 ministerielle Erlasse über die Amtsprüfung der Lehrerinnen. Obwohl das preußische Unterrichtsministerium im Jahre 1848 sich für staatsseitige Beaufsichtigung der weiblichen Bildung ausgesprochen hatte, blieb die Lage doch unbefriedigend, weil das Ministerium keine Taten folgen ließ.

In demselben Jahre 1848 erfolgte auf Veranlassung von Direktor Schornstein in Elberfeld die erste Beratung von Mädchenschulpädagogen über wichtige Punkte der Mädchenschulfrage. Man sprach sich aus über die Notwendigkeit innerer und äußerer Einheit der höheren Mädchenschule, über ihr Verhältnis zu anderen Unterrichtsanstalten und über Grundsätze von Mädchenerziehung und Mädchenunterricht.

In den „Blättern für weibliche Bildung", herausgegeben von Friedländer und Schornstein[1]), gründete man das erste Zentralorgan, das

1) Blätter für weibliche Bildung, hrsg. v. Friedlaender und Schornstein, 1849–1852. vgl. auch: Friedlaender, Die Forderungen unserer Zeit hinsichtlich der Erziehung und Bildung des weiblichen Geschlechts, Elberfeld 1847.

den Bildungsfragen des weiblichen Geschlechtes dienen sollte. In die nächsten Jahre fallen schon die ersten Versuche zum Programmaustausch, Ansätze zu Versammlungen innerhalb einer Provinz, wie in den Rheinlanden, und neue Zeitschriftengründungen[1]).

Die Bildungsfragen des weiblichen Geschlechtes ergriffen aber nun auch die Frauen selbst und stellten unter ihnen Kämpferinnen in die erste Linie, die sich durch ihre entschlossene Betätigung und rastlose Einsetzung ihrer besten Kräfte ein bleibendes Verdienst um die Sache der gebildeten Frauen Deutschlands erworben haben[2]). Aus der Bildungsfrage aber wurde mehr, nämlich eine riesigen Umfang annehmende Frauenfrage, die von verschiedenartigen Grundanschauungen aus behandelt, bald von gemäßigteren, bald von radikalsten Vorkämpferinnen erörtert, als Lösung anstrebte, der Frau auf geistigem, wirtschaftlichem und politischem Gebiet zur vollen Selbständigkeit zu verhelfen. 1865 tagte in Leipzig, von Luise Otto berufen, der erste Frauentag, der zur Gründung des Allgemeinen Deutschen Frauenvereins führte mit den Führerinnen Henriette Goldschmidt, Luise Otto[3]) und Auguste Schmidt.

Die nächsten Jahre brachten nach siegreichem Waffengange mit dem westlichen Nachbarn die große politische Einigung Deutschlands unter Preußens Führung und gaben den Auftakt für die überraschend schwungvolle und glänzende Entwicklung vieler Städte. Gerade die Stadtverwaltungen erkannten die für die Mädchenbildung mehr denn je vorliegenden Bedürfnisse und suchten zu bessern, soweit es die Mittel erlaubten. Von den während der zwei Jahrzehnte 1860–1880 ins Leben getretenen 130 neuen Schulen entfällt bei weitem die größere Zahl in das zweite Jahrzehnt.

Ein weiteres Zeugnis für den kräftig erwachenden Sinn, der sich auf den Zusammenschluß der am Mädchenunterricht beteiligten Personen richtet, war die Tat von Direktor Kreyenberg (Iserlohn)[4]), nämlich 1872 an alle Beteiligten seinen Aufruf zum Besuch einer in Weimar geplanten Versammlung zu erlassen. Am 30. September 1872 versammelten sich dort 164 Personen, und zwar 110 Herren und 54 Damen, unter ihnen Vertreter aller möglichen Gattungen von Mädchenschulen, öffentlichen und privaten, größeren und kleineren. Trotzdem wurde erreicht, daß die Beschlüsse, denen die maßvoll begründeten Thesen von Schornstein (Elberfeld) und Luchs (Breslau)[5]) zugrunde lagen, mit bedeutender Mehrheit gefaßt werden konnten; so stark war das allgemeine Verlangen

1) Stoa, Zeitschrift für die Interessen der höheren Töchterschulen, hrsg. von Hermes. – Ferner: Vierteljahrsschrift für höhere Töchterschulen, seit 1868 hrsg. von Prowe und Schultz, später von Hendschke und Schmid, schließlich umgewandelt in ein Monatsheft für das gesamte deutsche Mädchenschulwesen.

2) Vgl. Luise Büchner, Die Frauen und ihr Beruf, Darmstadt 1855. – T. Homberg, Gedanken über Erziehung und Unterricht, Berlin 1845.

3) L. Otto, Das Recht der Frauen auf Erwerb, Hamburg 1866.

4) Vgl. W. Nöldeke, Von Weimar bis Berlin, Berlin 1888.

5) Monatschrift für das gesamte deutsche Mädchenschulwesen, Jahrg. 1873, S. 5ff.

nach größerer Einheitlichkeit. Schon das einzige auf der Hauptversammlung zur Erörterung stehende Thema: „Grundlegende Gedanken über die gesetzliche Normierung der Einrichtung und Stellung der höheren Mädchenschule im Verhältnisse zu dem übrigen Schulwesen und der staatlichen Unterrichtsverwaltung“ enthält seiner Fassung nach alle Probleme, die von da ab nicht mehr von den Tagesordnungen der Mädchenschuldebatten verschwanden. Die Forderungen der damals angenommenen Leitsätze sind die Richtlinien für die Gestaltung des höheren Mädchenschulwesens überhaupt geworden. Sie erstrecken sich auf Aufgaben und Ziele der Schule, die die Schülerinnen vom sechsten bis sechszehnten Jahre durchlaufen sollen. Vorgesehen ist im Prinzip die zehnklassige Anstalt; an ihr sollen wirken ein wissenschaftlich gebildeter Direktor, wissenschaftlich gebildete Lehrer, erprobte Elementarlehrer und geprüfte Lehrerinnen. Im Range und in der Allgemeinwertung wurde Gleichstellung mit den Lehrkräften an den entsprechenden höheren Knabenschulen gefordert. Ein Normallehrplan, dessen Aufstellung als dringend notwendig erachtet wurde, sollte unter Mitwirkung tüchtiger Fachmänner gewonnen werden. Endlich sollte die Berechtigung zur Führung der Bezeichnung „höhere Mädchenschule“ nur Schulen zustehen, die nach obigen Grundsätzen eingerichtet waren.

b) Gründung des Deutschen Vereins für das höhere Mädchenschulwesen.

Die von einem besonderen Ausschusse zur Begründung der Thesen ausgearbeitete, den deutschen Staatsregierungen eingereichte Denkschrift fand so wohlwollende Aufnahme, daß der preußische Kultusminister Falk am 18. August 1873 in Berlin zur gutachtlichen Beratung eine Konferenz, die aus vier Ministerialbeamten, sechs Direktoren öffentlicher Anstalten, zwei Direktoren von Lehrerinnenseminaren, einer Lehrerin, vier Vorsteherinnen und drei Vorstehern von Privatschulen bestand, zusammentreten ließ, an demselben Datum, das durch die genau 35 Jahre später erfolgte Veröffentlichung der großzügigen preußischen Neuordnung für immer den Annalen des höheren Mädchenschulwesens angehört. Obwohl die Konferenz[1]) sich auf den Boden der Weimarer Beschlüsse stellte, geschah wider Erwarten seitens der Regierung nichts zur Durchführung der Ideen. Ein Glück war es daher, daß am 28. und 29. September 1873 die Weimarer Zusammenkunft des Vorjahres in Hannover[2]) ihre Neuauflage erlebte, und daß sich dort der feste Zusammenschluß der Interessenten für das Mädchenschulwesen in Gestalt des „Deutschen Vereins von Dirigenten und Lehrenden höherer Mädchenschulen“ bildete. Dieser Verein kam die ersten Male jedes Jahr, später in regelmäßiger Folge alle zwei Jahre bald im Norden, bald im Süden, im

1) Vgl. Protokolle über die im preußischen Unterrichtsministerium gepflogenen, das mittlere und höhere Mädchenschulwesen betreffenden Verhandlungen, Berlin 1873.

2) Vgl. Zeitschrift für weibliche Bildung, Bd. I, S. 483 ff.

Zentrum oder im Osten wie Westen unseres Vaterlandes zusammen, um die das höhere Mädchenschulwesen berührenden Fragen von allen Seiten her zu erörtern. Es würde an dieser Stelle zu weit führen, im einzelnen auf die glänzende Entwicklung dieses Vereins einzugehen, der heute den Namen „Deutscher Verein für das höhere Mädchenschulwesen" führt und, in zahlreiche Landesvereine zergliedert, sich über ganz Deutschland erstreckt. Die Fachorgane, die über seine großen, immer zahlreicher besuchten Versammlungen berichten, geben darüber zur Genüge Aufschluß.[1]) Aber das muß auch hier festgestellt werden, daß der Verein auf alle entscheidenden Maßnahmen im höheren Mädchenschulwesen vermöge seines wohlverdienten Ansehens immer einen bedeutsamen Einfluß ausgeübt hat, und deswegen hat O. Sommer[2]) Recht mit den Worten, daß „die Geschichte des Vereins zugleich die Geschichte des höheren Mädchenschulwesens geworden ist".

Nur einiges möge hier Platz finden. In der Vereinstätigkeit lassen sich drei Hauptpunkte klar erkennen, um die sich alles gruppiert. Erstens: die beständige Sorge um die gebührende staatliche Wertung der höheren Mädchenschule; zweitens: die Erörterungen bezüglich der Methodik der Lehrfächer; drittens: die Lehrerinnenfrage.

c) Entstehen des Preußischen Vereins für das höhere Mädchenschulwesen.

Im Verfolg des ersten Hauptgedankens wurde 1875 auf der Dresdener Hauptversammlung an die Staatsregierungen eine Denkschrift mit dem Gesuch um gesetzliche Regelung des höheren Mädchenschulwesens beschlossen, wobei zugleich ausgesprochen wurde, daß man auch denjenigen Privatschulen, die dem Normallehrplan gemäß unterrichteten, die Anerkennung als höhere Mädchenschulen zusprechen wolle. Die erfreuliche Wirkung dieses Vorgehens blieb nicht aus; denn im Sinne der vom Verein gegebenen Anregungen erfolgte 1874 (sowie 1876 und 1880) die staatliche Regelung im Großherzogtum Hessen, 1875 und 1876 im Königreich Sachsen, 1876 im Herzogtum Braunschweig, 1877 im Königreich Württemberg und Großherzogtum Baden. Preußen aber, verwickelt in den Kulturkampf, der auch den Minister Dr. Falk beseitigt hatte, verhielt sich noch lange abwartend. Zwar wurde unter dem Ministerium von Goßler im August 1886 plötzlich der „Normallehrplan für höhere Schulen"[3]) veröffentlicht; aber die ihm auf der zehnten Hauptversammlung in Berlin[4]) zu Teil werdende vernichtende Kritik ließ ihn bald wieder in der Versenkung verschwinden. Man hatte besonders Anstoß an der geplanten

1) Vgl. die einzelnen Bände der „Zeitschrift für weibl. Bildung", der Zeitschrift „die höhere Mädchenschule" und der Zeitschrift „Frauenbildung".

2) Vgl. J. Wychgram, Handbuch des höheren Mädchenschulwesens, S. 28.

3) Dieser Lehrplan erhielt später den Namen: „Normallehrplan für die Berliner höheren Mädchenschulen".

4) Vgl. Zeitschrift für weibl. Bildung, S. 517ff.

neunstufigen Organisation der Schulen genommen, die jede Vertiefung in den einzelnen Unterrichtsfächern illusorisch machte. In engstem Zusammenhang mit diesen Dingen steht ein für den Deutschen Verein etwas kritischer Vorgang. Man wollte auf der Berliner Tagung auch Stellung zu der Schaffung eines neuen und besseren Normallehrplans nehmen. Die von Neumann (Danzig) vertretene Auffassung wollte eine nochmalige Eingabe an den Kultusminister des Inhalts durchsetzen, daß der Minister einen besonderen Ausschuß von Mädchenschulfachleuten mit der Abfassung eines Normalplanes betrauen möge. Ein entgegenstehender Antrag, vertreten von Linn (Görlitz), wollte die preußische Regierung nunmehr in diesem Stadium der Angelegenheit ausschalten und dem an der Spitze der Vereinsgeschäftsführung stehenden Engeren Ausschuß den Entwurf des Normallehrplans überweisen. Als die von Linn vertretene Auffassung die Mehrheit erhalten hatte, ließ sich die bestimmte Meinung der an den preußischen höheren Mädchenschulen wirkenden Lehrkräfte, preußische Angelegenheiten selbst im eigenen Hause regeln zu wollen, nicht mehr niederhalten, und es kam im folgenden Jahre (1887) zur Gründung des Preußischen Vereins für das höhere Mädchenschulwesen, der, zunächst in einem bedauerlichen Gegensatz zu dem allgemeinen deutschen Vereine stehend, später unter Ausgleichung der bestehenden Streitpunkte mit dem Deutschen Vereine gemeinsam für die Sache der Mädchenbildung auf gleicher Linie gefochten hat, bis schließlich nach der Preußischen Neuordnung vom Jahre 1908 die völlige Einhelligkeit wiederhergestellt worden ist. Schon 1888 war durch die Kasseler Übereinkunft erreicht worden, daß sich der Preußische Verein als besonderer Landesverein dem Deutschen Verein einfügte mit der Befugnis, seinen Vorsitzenden in den Engeren Ausschuß des Deutschen Vereins zu entsenden.

d) Die Gründung und Stellungnahme des Allgemeinen Deutschen Lehrerinnenvereins.

In den auf das Jahr 1886 zunächst folgenden Zeiten spielte auf den Hauptversammlungen des Deutschen Vereins [1888 Eisenach[1]), 1890 Heidelberg[2]), 1893 Kiel[3])] die methodische Arbeit an den Lehrfächern neben der Erörterung über schulhygienische Fragen und die Lehrerinnenausbildung die Hauptrolle. U. a. erstattete auf der Eisenacher Versammlung Lietzen (Trier) einen Bericht über den Rechenunterricht an der höheren Mädchenschule.

Von besonderer Wichtigkeit wurde, seitdem das Thema zum ersten Male auf der Kölner Versammlung[4]) (1876) von Kippenberg in einem besonderen Vortrage besprochen worden war, die Lehrerinnenfrage und

1) Zeitschrift für weibl. Bildung, Bd. XVI, S. 585ff.
2) Ebenda, Bd. XVIII, S. 511ff. 3) Ebenda, Bd. XXI, S. 314ff. und 365ff.
4) Ebenda, Bd. V, S. 61ff.

ihre Behandlung im Vereine. Von Anfang an stellte sich der Verein auf den Standpunkt, daß die Mitarbeit der Lehrerinnen in den Oberklassen unter der Voraussetzung einer ausreichenden wissenschaftlichen Vorbidung wünschenswert sei. An einer solchen Vorbildung und der Möglichkeit, sie zu erwerben, fehlte es damals noch gänzlich. Die Folge war, daß in jener vorsichtigen Stellungnahme des Vereins von vielen Lehrerinnen Mangel an Wohlwollen für die Arbeit der Frauen im Schuldienste erblickt wurde. So spitzte sich auch von dieser Seite ein Zwiespalt im Vereine zu, der dann gleichfalls zu einer neuen Vereinsgründung geführt hat. Im Jahre 1890 entstand unter Führung von Helene Lange und Marie Loeper-Housselle der „Allgemeine deutsche Lehrerinnenverein", der bald eine große Zahl von Angehörigen des Lehrerinnenberufs zu seinen Mitgliedern zählte. Dieser Verein „verfolgt sein Ziel, den Lehrerinnen die ihnen gebührende Stellung in der höheren Mädchenerziehung zu sichern durch Bildung und Berechtigungen, unermüdlich".[1])

Eine nicht unerhebliche Störung des Gleichgewichts im Deutschen Verein verursachte insbesondere die im Jahre 1887 in Wahrnehmung berechtigter Interessen von den Lehrerinnen an den Preußischen Landtag gerichtete Eingabe durch die feindselige Tonart der beigegebenen Denkschrift[2]) den Lehrern gegenüber. So unerquickliche Nebenerscheinungen mußten naturgemäß hemmend auf die Erfüllung der Wünsche der Lehrerinnen wirken, die darauf abzielten, die Stellung und den Einfluß der Frauen im Mädchenschulwesen zu heben, und die überdies geeignete Maßnahmen zur Ausbildung von wissenschaftlich gebildeten Oberlehrerinnen für die Oberstufe anbahnen wollten.

e) Erste Versuche zur Einrichtung wissenschaftlicher Fortbildungskurse für Lehrerinnen.

Durch die Stellungnahme der Lehrerinnen wurde nun zunächst die Privatinitiative angeregt, helfend einzugreifen, indem schon im Jahre 1888 am Viktoria-Lyzeum zu Berlin[3]) wissenschaftliche Fortbildungskurse für Lehrerinnen geschaffen wurden. Ferner wurden 1893 von Anna Vorwerk die Göttinger Fortbildungskurse ins Leben gerufen. Der Betrieb mathematischer Studien war jedoch zu Anfang an keinem dieser beiden Institute vorgesehen. In Berlin konnte zuerst nur Deutsch und Geschichte studiert werden, während Göttingen Gelegenheit zu Studien in Philosophie, Geschichte, Kirchengeschichte, Deutsch, den neueren Sprachen und Geographie bot. Die Mathematik trat in Berlin 1898, in Göttingen

1) Vgl. M. Martin, Die höhere Mädchenschule in Deutschland; 65. Bändchen der Sammlung: Aus Natur und Geisteswelt. Leipzig (Teubner) 1904, S. 46.

2) Vgl. H. Lange, Die höhere Mädchenschule und ihre Bestimmung, Berlin 1887, S. 38ff.

3) Vgl. K. Windscheid, „Die wissenschaftliche Prüfung der Lehrerinnen" in J. Wychgram, Handbuch des höheren Mädchenschulwesens, Leipzig (Teubner) 1897, S. 395.

1899 hinzu. Nachdem die Berliner Kurse von der preußischen Staatsregierung die Anerkennung erhalten hatten, folgte im ministeriellen Erlaß vom 19. Oktober 1892 die nähere Bestimmung der Zielleistung dieser Kurse: sie sollten „der formalen Befähigung zum Unterrichten in sämtlichen Klassen der Volks- Mittel- und höheren Mädchenschulen durch dreijährigen Studiengang diejenige wissenschaftliche Methode und stoffliche Beherrschung des Gegenstandes hinzufügen, welche eine erhöhte Lehrbefähigung darzustellen geeignet ist."[1]) Auch den Göttinger Kursen wurde die regierungsseitige Anerkennung nicht versagt.

f) Einführung der Oberlehrerinnenprüfung durch die Maibestimmungen.

Von größter Bedeutung aber war für die weitere Förderung der diesen Kursen zugrunde liegenden Bestrebungen die mit dem 31. Mai 1894 verkündete Einführung der sog. Oberlehrerinnenprüfung in Preußen. Damit war den Lehrerinnen in einer ersten Form die Grundlage zu weiterer befriedigender Gestaltung ihrer beruflichen Wirksamkeit gegeben worden. Unter dem gleichen Datum erschienen aber auch die staatsseitig erlassenen „Bestimmungen über das höhere Mädchenschulwesen"[1]), durch die in Preußen zum ersten Male dem höheren Mädchenschulwesen das längst von so vielen gewünschte feste Gefüge gegeben wurde. Wie wenig jedoch diese „Maibestimmungen" die Kreise der Mädchenschullehrer befriedigten, zeigten sehr bald die mit so eigenartiger Wucht auf der ganzen Linie einsetzenden ablehnenden Beurteilungen.

3. Die „Maibestimmungen" von 1894, insbesondere die in ihnen enthaltenen Festsetzungen für den Rechenunterricht.

a) Allgemeines aus den Maibestimmungen.

Die Maibestimmungen wirkten, soweit die Regelung der äußeren Verhältnisse der höheren Mädchenschule in Betracht kam, wie eine große Enttäuschung. Man vermißte nicht nur die Anerkennung der höheren Mädchenschule als „höhere" Lehranstalt, sondern man sah auch in der Normbestimmung des Ministers, daß die höhere Mädchenschule neunstufig organisiert sein solle, eine Verkennung der von dem Deutschen und Preußischen Verein immer mit Nachdruck erhobenen Forderung der zehnstufigen Gliederung. Das kam unzweideutig zum Ausdruck in der 1895 zu Koblenz abgehaltenen 14. Hauptversammlung des Deutschen Vereins nach dem Vortrage von Raßfeld über: „Die Frauenfrage und die höhere Mädchenschule im Anschluß an die preußischen Bestimmungen vom Mai 1894". Dort wurde von allen Seiten anerkannt, daß

1) Vgl. Die Mädchenschule, hrsg. von K. Hessel und F. Dörr, Bonn (Weber), 1894, 7. Jahrg., S. 177 ff. (Die neuen preußischen allgemeinen Vorschriften für mittlere und höhere Mädchenschulen); ferner: „Bestimmungen über das Mädchenschulwesen, die Lehrerinnenbildung und die Lehrerinnenprüfung von 31. Mai 1894. Berlin (Hertz) 1895.

„die höhere Mädchenschule nur bei zehn aufsteigenden Stufenklassen diejenige allgemeine Bildung zu vermitteln vermöge, deren die gebildete Frau bedürfe".[1]) Diese Anschauung stützt sich, wie jeder Sachkundige weiß, darauf, daß gerade den Mädchen gegenüber einmal hinsichtlich der täglichen Unterrichtsdauer, sodann auch hinsichtlich der Anspannung in den einzelnen Fächern besondere Rücksichtnahme aus gesundheitlichen Gründen geboten ist. Demnach muß man, ohne daß der Mädchenschule an sich der Charakter einer Nachahmung einer entsprechenden Knabenanstalt aufgezwängt wird, den Mädchen zur Erlangung einer entsprechenden Allgemeinbildung eine längere Zeitdauer zur Verfügung stellen als den Knaben. Mit gutem Grunde ist daher, die Ausbildung in den drei Klassen der Unterstufe mit eingerechnet, dem neunjährigen Kursus der Knabenschule immer der zehnjährige Kursus der höheren Mädchenschule als notwendig gegenübergestellt worden.

Der Minister Dr. Bosse legte allerdings in den Ausführungen zu seinem Erlasse die Gründe dar, die ihn zur Festlegung des neunstufigen Typus bestimmten. Er meinte, daß „ein junges Mädchen, welches neun Jahre hindurch unter so günstigen Umständen, wie sie den Zöglingen der höheren Mädchenschulen in der Regel zu statten kommen, Schulkenntnisse gesammelt hat, das Bedürfnis empfinden wird, seine weitere Bildung freier und selbständiger zu suchen, als es möglich ist, wenn es unter dem Zwange der Schule in den bisherigen Formen auch in den Lehrgegenständen weiter lernen soll, welchen es weder ausgesprochene Neigung noch besondere Befähigung entgegenbringt."

„Dagegen hat die große Mehrzahl der jungen Mädchen bei ihrem Abgange von der Schule das Bedürfnis, ihre Kenntnisse in einzelnen Lehrgegenständen zu ergänzen und dadurch ihre allgemeine Bildung zu erweitern und zu vertiefen. Es ist als ein Mangel der Mädchenschulerziehung empfunden worden, daß eine Gelegenheit hierzu fehlt. Dieselbe wird sich leicht bieten, wenn sich der höheren Mädchenschule wahlfreie Lehrkurse angliedern, in welchen die aus der Schule entlassenen Mädchen in freierer, vielleicht auch in mehr wissenschaftlicher Form weiteren Unterricht erhalten. Die Gegenstände dieser Kurse werden vorzugsweise Weltgeschichte, die Geschichte der deutschen Dichtung, Kunstgeschichte, fremde Sprachen und Naturwissenschaften zu bilden haben."[2])

Gerade gegen diese wahlfreien Kurse, die die Regierung in Vorschlag bringt und die nach ihrer Meinung sehr geeignet zwischen den Abschluß der höheren Mädchenschule und den Eintritt in eine besondere, der beruflichen Ausbildung dienende Anstalt eingeschoben werden können, macht sich alsbald auch entschiedener Widerstand geltend. Das vermochte aber den Standpunkt der Regierung nicht zu ändern. Sie bestand auf der Durchführung der Bestimmungen; dabei war ein wesentlicher

1) Vgl. Zeitschrift für weibl. Bildung, Bd. XXIII, S. 549ff., und Die Mädchenschule, 8. Jahrg. 1895, S. 254ff.

2) Vgl. Die Mädchenschule, 7. Jahrgang, 1894, S. 178 u. 179.

Punkt, daß immer eine Lehrerin an jeder von einem Manne geleiteten höheren Mädchenschule das Amt der „Gehilfin" des Direktors übernahm. Nur den Schulen, die bei dem Erscheinen des Erlasses schon als zehnklassige Anstalten bestanden, wurde gestattet, die Zehnstufigkeit beizubehalten mit der Maßgabe, daß sie die Lehrstoffe der letzten drei Jahre der neunstufigen Anstalt auf ihre letzten vier Jahre zu verteilen hatten.

b) Die für die neunklassige höhere Mädchenschule vorgeschriebene Stundentafel.

Über den Lehrplan selbst gibt die folgende Stundentafel Aufschluß:

		Unterstufe			Mittelstufe			Oberstufe			Summe
		Klasse			Klasse			Klasse			
		IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I	
1	Religion	3	3	3	3	3	3	2	2	2	24
2	Deutsch	10	9	8	5	5	5	4	4	4	54
3	Französisch	—	—	—	5	5	5	4	4	4	27
4	Englisch	—	—	—	—	—	—	4	4	4	12
5	Rechnen	3	3	3	3	3	3	2	2	2	24
6	Geschichte	—	—	—	—	2	2	2	2	2	10
7	Erdkunde	—	—	2	2	2	2	2	2	2	14
8	Naturwissenschaften	—	—	—	2	2	2	2	2	2	12
9	Zeichnen	—	—	—	—	} 2	2	2	2	2	10 (8)
10	Schreiben	—	3	2	2	}	—	—	—	—	7 (9)
11	Handarbeit	—	—	2	2	2	2	2	2	2	14
12	Singen	} 2	} 2	} 2	2	2	2	2	2	2	12 (18)
13	Turnen	}	}	}	2	2	2	2	2	2	12 (18)
	Summe	18	20	22	28	30	30	30	30	30	238

Das Schwergewicht fiel in dieser Verteilung auf die Gruppe, die die ethischen, sprachlichen und historischen Disziplinen umfaßt. Den Schülerinnen auf religiös-sittlicher Grundlage eine sogenannte allgemeine Bildung zu vermitteln, sollte der Zweck der Schulausbildung bleiben. In der Stundenzahl voran steht das Deutsche, ihm zur Seite treten die Religion und die neueren Fremdsprachen, die ihrerseits die seit jener Zeit erhalten gebliebene ganz einseitige Grundlage für die Stufengliederung der höheren Mädchenschule abgeben. Die Unterrichtsfächer, die berufen sind, vorwiegend die Phantasietätigkeit anzuregen, und denen die Betonung der ethischen und ästhetischen Momente in der Mädchenerziehung zufällt, beherrschten den ganzen Plan von 1894. Ihnen gegenüber traten die Fächer, durch deren verständnisvolle Pflege die Entwicklung des fürs Leben unentbehrlichen Wirklichkeitssinnes hätte geweckt und gefördert werden können, infolge der ihnen zugewiesenen ganz unzureichenden Stundenzahlen stark zurück.

c) Die mißliche Lage des Rechnens.

Typisch und bedenklich zugleich ist in dieser Hinsicht die Wertung des Rechnens, dem selbst auf der Unterstufe nur je drei Wochenstunden zugebilligt waren, so daß die Schülerinnen im günstigsten Falle einen um den anderen Tag eine Rechenstunde haben konnten. Die dem Rechenunterrichte durch die Pläne von 1894 zugewiesene Aufgabe, wie sie das allgemeine Lehrziel angibt, konnte gar keine befriedigende Lösung erfahren, weil die günstigen äußeren Bedingungen zu ihrer Durchführung fehlten. Es ist wohl für jeden Lehrer, der den Rechenunterricht bei Mädchen auf der Mittel- und Oberstufe zu erteilen Gelegenheit hatte, eine der alltäglichen Beobachtungen, daß gerade bei den einfachsten logischen Schlüssen, deren Ausführung jede einzelne Rechenaufgabe erfordert, die Mädchen zunächst leicht versagen. Das wird dann leicht so gedeutet, als ob den Mädchen überhaupt die Befähigung für diese Seite der Verstandestätigkeit abginge, wofür an sich noch niemals ein bündiger Beweis erbracht worden ist. Letzten Endes trifft die Schuld für solche unbefriedigenden Ergebnisse die Beschaffenheit des Lehrplans, insofern angesichts der ganz ungenügenden Stundenzahl die Unmöglichkeit hinreichender Vertiefung und Übung von vornherein mitgegeben war. Zu jeder befriedigenden Zielleistung ist noch immer ein entsprechender Zeitaufwand nötig gewesen. Während die Festsetzungen von 1894, sofern sämtliche Schuljahre berücksichtigt werden, dem Deutschen durchschnittlich 6 $(= \frac{54}{9})$ Wochenstunden, dem Französischen durchschnittlich $4\frac{1}{2}$ $(= \frac{27}{6})$ Wochenstunden und dem Englischen durchschnittlich 4 $(= \frac{12}{3})$ Wochenstunden zur Verfügung stellten, entfielen auf Rechnen nur durchschnittlich $2\frac{2}{3}$ $(= \frac{24}{9})$ Wochenstunden, und dies trotz der außerordentlichen Wichtigkeit, die auch gerade für jedes Mädchen die rechnerische Gewandtheit und Schlagfertigkeit im späteren Leben bei den verschiedenartigsten Gelegenheiten gewinnt.

d) Das Lehrziel, die Lehraufgaben und methodischen Bemerkungen für den Rechenunterricht.

Bei solcher äußeren Lage des Rechenunterrichts auf Grund der Maibestimmungen haben die Formulierung des „allgemeinen Lehrziels", der „Lehraufgaben" und der „methodischen Bemerkungen" großenteils nur theoretischen Wert. Aber der historischen Würdigung halber sollen alle diese Dinge hier doch festgelegt werden, auch schon deswegen, damit die immerhin zutreffenden Grundforderungen für die Gestaltung des Rechenunterrichts an der höheren Mädchenschule den guten Willen für die Tat erkennen lassen.

Die betreffenden Festsetzungen lauten:[1])

a) Allgemeines Lehrziel.

Sicherheit und Gewandheit im Rechnen mit Zahlen und in dessen Anwendungen auf die gewöhnlichen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens, namentlich auf dem

1) Vgl. Die Mädchenschule, 7. Jahrg., 1894, S. 200.

Gebiete der Hauswirtschaft, des Spar- und Versicherungswesens, der einfachen Vermögensverwaltung. Förderung klaren und besonnenen Denkens durch vielseitige Anschauung und Benutzung der Zahl.

Letzter Zweck bleibt die Befähigung der Schülerinnen zu selbständiger und schneller Lösung der ihnen gestellten Aufgaben.

b) Lehraufgaben.

Das Rechnen mit einfach benannten ganzen Zahlen bildet das Pensum der Unterstufe, das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen, mit Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen und leichte angewandte Aufgaben das Pensum der Mittelstufe. Der Oberstufe fällt zu die ausgiebige Anwendung des so erlernten Rechnens auf die im Anschauungskreise der Schülerin liegenden Verhältnisse, sowie der auf Anschauung zu begründende und mit Meß- und Rechenoperationen in beständiger Verbindung zu haltende Unterricht in der elementaren Raumlehre.

Besonderes Gewicht ist zu legen auf die Sicherheit des Kopfrechnens im Zahlenkreise 1–1000, auf das angewandte Rechnen mit Dezimalbrüchen bei Münzen, Maßen und Gewichten, auf die Prozentrechnung in ihren verschiedenen Anwendungen, auf Sicherheit der geometrischen Grundbegriffe und der einfachen Flächenberechnungen. Auf allen Stufen empfiehlt sich bei der Auswahl der Aufgaben die Berücksichtigung des bürgerlichen Haushalts.

c) Methodische Bemerkungen.

Auf der Unterstufe wird regelmäßig nur im Kopfe gerechnet, in den Klassen IX und VIII unter Anwendung einer Rechenmaschine (Rechenkasten). Bei Einführung einer neuen Rechnungsart geht auf allen Stufen das Kopfrechnen dem schriftlichen Rechnen voran, dieses ist zu Gunsten des Kopfrechnens möglichst zu beschränken. Die Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben sind stets so zu wählen, daß die Schülerinnen mit den tatsächlichen hier in Betracht kommenden Verhältnissen bekannt werden; Aufgaben mit unwahrscheinlich großen Zahlen oder unwahrscheinlichen Bruchteilen sind zu vermeiden, ebenso nicht gebräuchliche Formen und Ausdrücke. Schematische Regeln sind besonders auch bei der Bruchrechnung und bei der Anwendung des Dreisatzes und Vielsatzes entbehrlich. Algebraisches Rechnen ist auch in seinen Anfängen ausgeschlossen. Es kommt alles darauf an, die Schülerin zum sicheren Überblick über die in Betracht kommenden Verhältnisse und Beziehungen und zur einfachsten und schnellsten Lösung der Aufgaben zu befähigen.

Die Ausdrucksweise sei kurz und bestimmt.

Das ist alles, was die Maibestimmungen von 1894 über die Gestaltung des Rechenunterrichts sagen. Interessant ist, daß sie sich jeder Bestimmung über die Verteilung des Lehrstoffes auf die einzelnen Klassen enthalten; nur die Umgrenzung des Stoffes in allgemeinster Form für Unter-, Mittel- und Oberstufe wurde vorgesehen. Demnach hatten die Anstalten und ihre Kollegien immerhin eine gewisse Freiheit betreffs der Einzelfestsetzungen, was sicherlich als ein Vorzug zu begrüßen war.

e) Die Ausführungen von Hecht über die Lehrstoffgliederung im Rechnen.

Einen guten Überblick, wie die Stoffgliederung nach den Einzelklassen sich vielfach vollzog, gibt Hecht[1]) in seinem Aufsatze: „Rechnen". Dem ersten Schuljahr war als Arbeitsgebiet zumeist wohl der Zahlenkreis von 1–20 mit allen vier Grundoperationen zugewiesen; im zweiten Schuljahre

1) Vgl. C. Hecht, Rechnen (in J. Wychgram, Handbuch des höheren Mädchenschulwesens, Leipzig (Voigtländer) 1897, S. 262ff.).

folgte der Zahlenkreis von 1—100 in entsprechender Weise, und im dritten Schuljahre war das Naturgemäße die Erweiterung bis zur oberen Grenze 1000. Für die drei Klassen der Mittelstufe kommen dann im vierten Schuljahre der Abschluß des Rechnens mit ganzen benannten und unbenannten Zahlen in dem nach oben hin beliebig erweiterten Zahlenkreis bis zur Million und nötigenfalls auch darüber, ferner Übungen leichterer Art zur Einführung in die Bruchrechnung und Lösung von Aufgaben über Münzen, Maße und Gewichte hinzu. Als Hauptpensum des fünften Schuljahres bezeichnet Hecht das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen dezimaler und nichtdezimaler Währung unter Bevorzugung der Beschränkung auf Zahlen mit zwei verschiedenen Benennungen. In Preußen ist „eine solche Schreibweise der benannten Zahlen, durch welche der dezimale Charakter des neuen (metrischen) Systems zu voller Geltung gelangt", behördlich vorgeschrieben. Hiermit lassen sich auch schon Übungen in der Einführung und Durcharbeitung der dezimalen Schreibweise und somit in mehr formaler Weise Betrachtungen über die Ausdehnung des Zahlenkreises unter Beschränkung auf die ersten drei Dezimalstellen verbinden. Dem sechsten Schuljahre verbleibt dann die planmäßige Bearbeitung der Dezimalbruchrechnung und der gemeinen Bruchrechnung, wobei die „Bestimmungen" gar nichts über die Aufeinanderfolge der beiden Gebiete sagen. Beide hier mögliche Anschauungen sind zu finden. Die einen, die in jedem Dezimalbruch nichts anderes als einen gemeinen Bruch, nur in einem anderen Gewande, sehen, werden immer erst die gemeinen Brüche erledigen, um dann erst zur Behandlung der Dezimalbruchrechnung zu schreiten. Den anderen ist mehr um die Ausnutzung des formalen Prinzips vom Stellenwert zu tun, und sie stellen deshalb die Dezimalbrüche voran. Das mag so lange ohne Schwierigkeiten gehen, als nur die Operationen des Addierens und Subtrahierens in Frage kommen. Sobald aber Multiplikationsaufgaben auftreten, in denen alle (d. h. mindestens zwei Faktoren) Dezimalzahlen sind, wird die Darstellung des Stoffes für die Schülerinnen recht undurchsichtig und mühsam erfaßbar, während, abgesehen von der prinzipiellen Schwierigkeit, die ohnehin betreffs der Multiplikation und Division in der Bruchrechnung vorliegt, bei Vorwegnahme der gemeinen Bruchrechnung sich alles zwanglos und einfach abtun läßt.[1])

Für die Oberstufe der höheren Mädchenschule, die normaler Weise nach den Maibestimmungen drei Klassen, im Ausnahmefalle, wie schon gesagt, vier Klassen umfaßt, soll die Anwendung der in den ersten sechs Schuljahren gewonnenen Grundkenntnisse auf verschiedenartige für die Schülerin bedeutsame Verhältnisse des bürgerlichen Lebens erfolgen, und hinzutreten soll die Unterweisung in den Elementen der Raumanschauung. Von den sog. bürgerlichen Rechnungsarten nennt Hecht[2])

1) Vgl. W. Lietzmann, Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland, diese IMUK-Abhandlungen Bd. V Heft 1, Leipzig (Teubner) 1912, S. 84 u. 85.
2) Vgl. a. a. O. S. 269.

als für die Mädchenschule passend die „Regeldetri, Prozentrechnung, Zinsrechnung, Rabattrechnung, Verteilungsrechnung und Mischungsrechnung“. Dagegen spricht er sich an derselben Stelle gegen die Berücksichtigung solcher Kapitel im Mädchenunterricht aus, die im wesentlichen nur für die Ausbildung der Knaben Wert haben. Dahin gehören die Warenrechnung, Wechselrechnung, Terminrechnung, Mischungsrechnung u. dgl.

Der Schwerpunkt in der Behandlung der für die Mädchenschule wichtigen Stoffe liegt gänzlich in der durchsichtigen Darlegung des Sachverhalts sowie in dem einfachen Aufbau und der gründlichen Festlegung und Erfassung des zur Lösung führenden Schlußverfahrens, dem durchweg der Schluß von der Einheit auf die Vielheit und weiterhin der von der Vielheit auf die Einheit zugrunde liegt. Hierbei kommt es gar nicht darauf an, eine Fülle von Schematen und methodisch verschiedenartig aussehenden Ansätzen zu geben. Das führt lediglich zu einem fruchtlosen Formalismus und zur Verwirrung der Begriffe. Die Hauptsache ist für die Schülerinnen die klare Herausschälung des Kernes aus jeder Aufgabe.

f) Ablehnende Haltung der Maibestimmungen gegenüber der Mathematik.

Was den Unterricht in der Raumlehre auf der Oberstufe betrifft, wie ihn die Maibestimmungen fordern, so kann es sich dabei nur um die allernotwendigsten Dinge handeln, die ohne Heranziehung besonderer theoretischer Auseinandersetzungen im Rahmen eines elementaren rein geometrischen Anschauungsunterrichts behandelt werden sollen; dabei sollen sich die betreffenden Darlegungen in beständiger Verbindung mit Meß- und Rechenoperationen halten. Im Wesentlichen ist dieser Zweig des Rechenunterrichts so ausgestaltet worden, daß die einfachsten Körper (Würfel, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel) auf ihre gestaltlichen Verhältnisse hin durchgenommen wurden, und daß sich Berechnungen einfachster Art von Oberflächen und Rauminhalten daran anschlossen. Natürlich fanden auch an geeigneter Stelle die an den genannten Körpern auftretenden charakteristischen ebenen Gebilde (Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Dreieck, Kreis) gebührende Berücksichtigung.

Ob dieses Bischen an mathematischer Zugabe wohl jemals einen besonderen Reiz auf die Schülerinnen der obersten Klassen ausgeübt hat? Ernste Zweifel nach dieser Richtung sind jedenfalls denkbar und berechtigt. So völlig losgelöst von jedem sorgfältig vorbereiteten Aufbau und lediglich noch angefügt zur Befriedigung notwendiger, nicht abweisbarer praktischer Bedürfnisse, konnte das Anhängsel aus der Raumlehre immer nur ein halbverstandenes Ding bleiben; die Berechnungen, vor allen Dingen an den Gebilden mit krummlinigen und krummflächigen Begrenzungsteilen, konnten zwar schematisch nach gegebenen Formeln und Regeln durchgeführt werden; das tiefere Verständnis aber mußte doch wohl ausbleiben.

Bezeichnend ist überhaupt die völlig ablehnende Haltung der Maibestimmungen gegenüber der Arithmetik und Algebra. Der eine Satz: „Algebraisches Rechnen ist auch in seinen Anfängen ausgeschlossen" sagt genug. Es war offenbar der Wert, den die Beschäftigung mit mathematischen Dingen auch für das weibliche Geschlecht haben kann und muß, damals von den maßgebenden Instanzen noch gar nicht erkannt worden; und so ließ man es inbezug auf die Mathematik im großen und ganzen bei dem früheren Zustande bewenden; abgesehen von dem bischen Geometrie auf der Oberstufe blieb sie auch fürderhin von der höheren Mädchenschule verbannt.

g) Schaffung von Oberlehrerstellen an den höheren Mädchenschulen.

Infolgedessen blieb die höhere Mädchenschule den akademisch gebildeten Lehrern mit mathematischer Lehrbefähigung bis auf weiteres noch verschlossen. Andere Gruppen von akademisch vorgebildeteten Lehrern, vorwiegend mit Lehrbefähigung in Religion, Deutsch und neueren Sprachen, konnten sich, soweit der Bedarf zu decken war, in allmählich zunehmender Zahl um Stellen an höheren Mädchenschulen bewerben. Der Erlaß von 1894 betont ausdrücklich, ohne daß grundsätzlich etwas an der Zusammensetzung der Lehrkörper aus akademisch und seminaristisch gebildeten Lehrern geändert werden soll, „daß im Besoldungsetat für die Lehrer an den öffentlichen höheren Mädchenschulen eine Anzahl – etwa ein Dritteil von sämtlichen – Lehrerstellen als Oberlehrerstellen ausgezeichnet wird, damit hervorragend tüchtige Männer an die Anstalten berufen und an ihnen festgehalten werden können; aber ihre Auswahl soll allein durch das Maß ihrer amtlichen Bewährung und besonderen Befähigung für Mädchenunterricht bedingt werden." [1]) Auf die Möglichkeit, daß auch Männer mit seminaristischer Vorbildung zu Oberlehrern und Direktoren höherer Mädchenschulen ernannt werden könnten, wies der Ministerialerlaß durch die Äußerung hin, daß den Anträgen, „nach welchen die Stellen der Direktoren und der Oberlehrer an den öffentlichen höheren Mädchenschulen nur mit akademisch gebildeten Lehrern zu besetzen wären und die seminaristisch gebildeten Lehrer, soweit sie nicht technische Lehrer sind, nur in den mittleren und unteren Schulklassen beschäftigt werden sollen", keine Folge gegeben werden könnte.[2])

h) Bestimmungen über die künftige Stellung der Lehrerinnen an den höheren Mädchenschulen.

Einen ganz wesentlichen Fortschritt enthielten die Bestimmungen hinsichtlich des den Lehrerinnen an den öffentlichen höheren Mädchenschulen gebührenden Einflusses. Die betreffende Stelle[3]) des ministeriellen Erlasses lautet:

1) Vgl. Die Mädchenschule, 7. Jahrg. 1894, S. 181.
2) Ebenda, S. 180. 3) Ebenda, S. 181 u. 182.

„Was die Stellung der Lehrerinnen an den höheren Mädchenschulen anlangt, so ist dem Wunsche Ausdruck gegeben worden, den Lehrerinnen einen erheblich größeren Anteil an der Leitung der höheren Mädchenschule und an dem Unterrichte in den oberen Klassen derselben zuzuweisen Man hat in dieser Hinsicht das Verlangen gestellt, daß der Unterricht in der Religion, im Deutschen und in der Geschichte möglichst nur von Lehrerinnen erteilt werden solle. Soweit in diesem Antrage ein Zweifel an der erziehlichen Kraft eines von Lehrern erteilten Unterrichts liegt, vermag ich demselben eine Berechtigung nicht zuzuerkennen. Es darf aber die hohe Bedeutung der erziehlichen Aufgabe nicht verkannt werden, welche die höhere Mädchenschule zu lösen hat. Sie hat insbesondere nicht nur ihren Schülerinnen eine innerlich begründete religiös-sittliche Bildung zu geben, sondern sie auch zu echter Weiblichkeit zu erziehen. Für die Lösung dieser Aufgabe werden allerdings die Lehrerinnen in weiterem Umfange, als es bisher bei den öffentlichen höheren Mädchenschulen der Fall zu sein pflegt, in Anspruch zu nehmen sein. Ich bestimme daher, daß an jeder öffentlichen höheren Mädchenschule, welche nicht etwa unter der Leitung einer Direktorin steht, dem Direktor eine Lehrerin als Gehilfin beigegeben wird, die ihn bei Lösung der erziehlichen Aufgabe der Anstalt unterstützt, und daß außerdem das Ordinariat wenigstens einer der drei Oberklassen in die Hand einer Lehrerin zu legen ist.

Auch ist es wünschenswert, darüber hinaus die Lehrerinnen an dem Unterricht in den oberen Klassen in größerem Umfange zu beteiligen. Voraussetzung dafür wird allerdings sein, daß die Lehrerinnen die auf dem Seminar erworbenen Kenntnisse durch weiteres Studium vertiefen und in den von ihnen zu vertretenden Fächern sich die Befähigung erworben haben, in wissenschaftlicher Weise selbständig weiter zu arbeiten.

Wie sehr das Bedürfnis nach wissenschaftlicher Vertiefung ihrer Bildung in den Kreisen der Lehrerinnen selbst empfunden wird, zeigen die aus freier Vereinstätigkeit hervorgegangenen Fortbildungskurse.

Es scheint an der Zeit, diesen Bestrebungen ein festes Ziel zu geben, zugleich aber die Befähigung zur Anstellung als Direktorin oder als Oberlehrerin an einer höheren Mädchenschule auch an den Ausweis über eine wissenschaftliche Bildung zu knüpfen.

Von diesen Gesichtspunkten aus habe ich durch anderweitige Verfügung vom heutigen Tage eine „Ordnung der wissenschaftlichen Prüfung der Lehrerinnen“ [1]) erlassen, welche ihr Ziel, den öffentlichen höheren Mädchenschulen wissenschaftlich durchgebildete weibliche Lehrkräfte zuzuführen, noch besser erreichen wird, wenn gleichzeitig im Besoldungsetat dieser Schulen einige Lehrerinnenstellen als Oberlehrerinnenstellen bezeichnet und nur mit Lehrerinnen besetzt werden, welche ihre Befähigung durch Ablegung der wissenschaftlichen Prüfung nachgewiesen haben“.

i) Aus den Bestimmungen über die Oberlehrerinnenprüfung.

Aus der Prüfungsordnung, die mit dem 1. Januar 1895 in Kraft treten sollte, sind hier besonders hervorzuheben die Bestimmungen, daß die Prüfungen in Berlin vor einer vom Unterrichtsminister ernannten Kommission abzulegen sind, und daß jede Bewerberin zwei Gegenstände zu bezeichnen hätte, in denen sie geprüft zu werden wünschte. Für die Auswahl waren die zur Verfügung gestellten Fächer in zwei Gruppen eingeteilt. § 6 der Prüfungsordnung lautet wörtlich:

Die Prüfung wird in zwei Gegenständen abgelegt:

1) Vgl. Die Mädchenschule, 7. Jahrg. 1894, S. 216–218.

a) Für den ersten Gegenstand steht der Bewerberin die Wahl frei zwischen Religion, Deutsch, Französisch, Englisch.

b) Den zweiten Gegenstand kann sie aus den vorgenannten Fächern oder aus den nachfolgenden wählen: Geschichte, Geographie, mathematische Wissenschaften, Naturwissenschaften.

Die Fassung dieses Paragraphen schuf für diejenigen Lehrerinnen, die beispielsweise auf Grund besonderer Neigung oder Befähigung in der Mathematik eine höhere Lehrbefähigung erwerben wollten, eine eigenartige Zwangslage. Sie mußten neben der Mathematik notgedrungen als zweites Fach einen Gegenstand der ersten Gruppe wählen, so daß es nur die vier Möglichkeiten für folgende Verbindungen gab: 1. Mathematik-Religion, 2. Mathematik-Deutsch, 3. Mathematik-Französisch, 4. Mathematik-Englisch, in jedem Falle also eine Verquickung ganz verschiedenartiger Fächer und Interessen. Wieviel mehr sachgemäß und natürlich wäre es gewesen, für mathematisch interessierte Lehrerinnen von vornherein die Möglichkeit zu schaffen, zwei innerlich mehr verwandten Gegenständen ein besonderes Studium zuzuwenden; vor allen Dingen war es durch die Fassung der Prüfungsordnung ja völlig ausgeschlossen, neben die Mathematik die Naturwissenschaften zu stellen, die gerade dem mathematischen Unterricht so mannigfache und wertvolle Anwendungsmöglichkeiten bieten.

Die übrigen Bestimmungen der Prüfungsordnung sind hier von untergeordneter Bedeutung und können übergangen werden.

Trotz und auch wegen der den Maibestimmungen anhaftenden Mängel wurde diese erste gesetzliche Regelung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen die wertvolle Grundlage für die weitere lebensfrische, energische Behandlung der Probleme des Mädchenschulwesens in ganz Deutschland, wie sie alsbald einsetzte.

4. Die Vorgänge vom Jahre 1894 bis zum Jahre 1908.

a) Stellungnahme des Weiteren Ausschusses des Deutschen Vereins zu den Maibestimmungen.

Sehr bald nach dem Erscheinen der Maibestimmungen trat der Weitere Ausschuß des Deutschen Vereins im Oktober des Jahres 1894 in Berlin zu einer außerordentlichen Sitzung[1]) zwecks Stellungnahme zu der neuen Verordnung zusammen. In dieser Versammlung, an der als Vertreter der preußischen Unterrichtsverwaltung der Wirkl. Geh. Oberregierungsrat Dr. Schneider, Geh. Reg.-Rat Brandi und Seminardirektor Moldehn teilnahmen, ergab sich: 1. das Festhalten an der zehnklassigen höheren Mädchenschule, 2. die Nichtbilligung der wahlfreien Fortbildungskurse, 3. die Anerkennung der Verstärkung des weiblichen Einflusses auf der Oberstufe der höheren Mädchenschule unter Hinweis auf die Gefährdung der Einheitlichkeit in der Schulleitung, wie sie die Zuweisung einer

1) Vgl. Die Mädchenschule, 7. Jahrg. 1894, S. 257 ff.

besonderen Gehilfin für den Direktor bedinge, 4. die Zustimmung zu der Erweiterung der wissenschaftlichen Ausbildung der Lehrerinnen, die aber von dem Staat selbst in die Hand zu nehmen sei, 5. die Hervorhebung des Umstandes, daß in der Vorenthaltung der Anerkennung als höhere Lehranstalt eine Schädigung des Ansehens der höheren Mädchenschule liege.

In den folgenden Jahren war es wieder besonders der Deutsche Verein für das höhere Mädchenschulwesen, der die Frage der zweckmäßigen Gestaltung der höheren Bildungsanstalten für die weibliche Jugend und alle damit zusammenhängenden Probleme, z. B. das der Lehrerinnenbildung, nicht aus dem Auge verlor. Ihm gebührt auch das ganz besondere Verdienst, die sich in Deutschland immer breiter entwickelnde Frauenfrage auf das aufmerksamste verfolgt und die sich daraus ergebenden Erfordernisse in maßvoller Weise zu positiven Anschauungen und Vorschlägen ausgeprägt zu haben.

b) Von der Tagung des Deutschen Vereins zu Koblenz.

Über die im Jahre 1895 zu Koblenz abgehaltene Versammlung ist oben schon einiges gesagt worden. Außer Raßfeld[1]), der über die Frauenfrage und die höhere Mädchenschule im Anschluß an die preußischen Bestimmungen vom Mai 1894 sprach, berichteten Centurier[2]) über die Ressortverhältnisse der höheren Mädchenschulen, während Frl. Ohlsen[3]) sich inbesondere mit der Frage der Oberlehrerinnenausbildung befaßte und u. a. den von der Versammlung gebilligten Satz vertrat: „Die wissenschaftliche Fortbildung muß durch Vertiefung der Fachkenntnisse und durch gründliche lateinische und mathematische Studien sorgfältig vorbereitet werden“. Aber auch der Leitsatz: „Die künftige Oberlehrerin kann eine gründliche methodische, also eine Ausbildung, wie sie ein gutes Seminar gewährt, nicht entbehren“ wurde von der dritten Abteilung des Vereins, vor der Frl. Ohlsen sprach, gebilligt. Von Interesse ist es daher, daß in der ersten Abteilung, wo Schöne[4]) einen Vortrag über „Lehrerinnenbildung und -prüfung nach den preußischen Mai-Verfügungen des Jahres 1894“ gehalten hatte, für die von dem Vortragenden vorgeschlagene These hinsichtlich der Oberlehrerinnen keine Einigung erzielt werden konnte. Schöne's Leitsatz enthielt folgende Gedanken: Die Aufgabe der höheren Mädchenschule kann durch akademisch gebildete Lehrerinnen gefördert werden. Wer aber als akademisch gebildete Lehrkraft an der höheren Mädchenschule wirken will, muß alle vom Staate für diese Lehrkräfte vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt haben, muß also die Reifeprüfung abgelegt, nach mindestens dreijährigem Studium die Prüfung pro facultate docendi bestanden und eine zweijährige Probedienstzeit abgeleistet haben. Das gilt ausdrücklich auch für die Frauen.

1) Vgl. Die Mädchenschule, 8. Jahrg. 1895, S. 254ff.
2) Ebenda, 9. Jahrg. 1896, S. 81ff und S. 121ff.
3) Ebenda, 8. Jahrg. 1895, S. 281ff. 4) Vgl. ebenda, 8. Jahrg. 1895, S. 278.

c) Die Oberlehrerinnenfrage auf der Frankfurter Tagung des Allgemeinen Deutschen Frauenvereins.

Fast gleichzeitig hatte sich im Allgemeinen Deutschen Frauenverein auf der zu Frankfurt a./M. abgehaltenen 18. Generalversammlung Frl. Langerhanß[1]) mit der Oberlehrerinnenfrage beschäftigt und betont, daß an das Oberlehrerinnenexamen ein viel größeres Maß von Wissenschaftlichkeit angelegt werden müsse. „Nur eine möglichst hohe Auffassung von dem Amte der Oberlehrerinnen könne günstige Resultate erzielen. Es bedürfe staatlicher Lehranstalten für Frauen zur Ausbildung der Oberlehrerinnen. Zu untersuchen würde sein, ob die Bedingung des absolvierten Lehrerinnenexamens und einer fünfjährigen Lehrtätigkeit für die Zulassung zur Oberlehrerinnenprüfung beibehalten werden dürfe". Beim Vergleich der beiden Ansichten von Schöne und Frl. Langenhanß lassen sich gewisse Berührungspunkte nicht verkennen.

d) Die Erörterung der Ausbildung der Oberlehrerinnen bei der Tagung des Deutschen Vereins zu Weimar (1897).

Beachtung verdienen in der Oberlehrerinnenfrage nicht minder die feinsinnigen Ausführungen von Frl. Vorwerk[2]) auf der 15. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zu Weimar (1897). Unter Ablehnung des besonders von Frl. H. Lange befürworteten und auch von der Kommission des Allgemeinen Deutschen Lehrerinnenvereins empfohlenen, vom Seminar unabhängigen direkten Weges zur Ausbildung der Oberlehrerin stellt Frl. Vorwerk folgende Forderungen auf: 1. Die Oberlehrerinnenbildung setzt eine gute Seminarbildung, eine durch mehrjährige Berufsausübung gewonnene Erfahrung und Reife, Erweiterung der Fachkenntnisse und die Beherrschung einzelner für das Studium unerläßlicher Hilfswissenschaften voraus. 2. Sie wird am besten, losgelöst von der Berufsarbeit, in besonderen mehrjähigen Kursen erworben, welche mit den Universitäten in Verbindung stehen, Vorlesungen mit wissenschaftlichen Übungen vereinigen und durch eine Prüfung mit wirklich wissenschaftlichen Anforderungen abgeschlossen werden. 3. Die Kurse sind der Regierung zu unterstellen, welche ihnen die allgemeine Richtung gibt, ohne doch ihre Eigenart und eine gewisse Freiheit der Bewegung aufzuheben. Die Dozenten haben das Recht, unter dem Vorsitz eines Regierungskommissars die wissenschaftliche Prüfung selbst abzuhalten. 4. Es liegt im Interesse der Schulen, daß staatliche und städtische Behörden den Urlaubsgesuchen wirklich tüchtiger Lehrerinnen freundlich gegenüberstehen und ihnen das Studium durch Belassung eines Teils ihres Gehalts oder durch Stipendien erleichtern. 5. Es ist nur ein Gebot der Gerechtigkeit, geprüften Oberlehrerinnen für die von ihnen gebrachten Opfer auch eine höhere Gehaltsstufe zuzuerkennen".

1) Vgl. Die Mädchenschule, 8. Jahrgang, 1895, S. 292.
2) Vgl. Die Mädchenschule, 10. Jahrg. 1897, S. 281 ff, besonders auch S. 294.

Mit diesen Leitsätzen verteidigte Frl. Vorwerk die von ihr ins Leben gerufenen und geleiteten Göttinger Kurse, über die oben schon gesprochen wurde.

e) Allgemeine Organisationsfragen des höheren Mädchenschulwesens.

Nach dieser Erörterung über die Oberlehrerinnenfrage wenden wir uns zurück zu den mehr allgemeinen Organisationsfragen des höheren Mädchenschulwesens. Im Jahre 1899 erhielt in Preußen das höhere Mädchenschulwesen seinen ersten besonderen Dezernenten in der Person des feinsinnigen Geh. Reg.-Rat Dr. Waetzold. Im Deutschen Verein folgte ein Vortrag dem anderen. In Hildesheim (1899) sprach Wespy über „Mädchengymnasium und höhere Mädchenschule", in Freiburg i./B. (1901) stand auf der Tagesordnung der Vortrag von Horn über die Frage: „Bedarf die höhree Mädchenschule einer Umgestaltung und Ergänzung, um ihre Schülerinnen für die allgemeinen Lebensaufgaben der gebildeten Frau genügend vorzubereiten?" Zwei Jahre später nahmen zu Danzig Dir. Doblin (Hagen)[1] und Frl. Sprengel Stellung zu dem Thema: „Welche Forderungen der modernen Frauenbewegung in bezug auf die höhere Mädchenschule kann diese als berechtigt anerkennen?" und die Erfurter Versammlung (1905) brachte den Bericht von Luthmer[2]) über: „die weitere Entwickelung der zehnklassigen höheren Mädchenschule". Gerade diese Jahre hielten die Erörterungen um so mehr in Fluß, als besonders die Frauenfrage sich zu einem immer stärkeren Brennpunkt des allgemeinen Interesses ausbildete. Die weit verbreitete Ansicht, daß die von der höheren Mädchenschule in ihrer bisherigen Gestaltung den Mädchen übermittelte Bildung völlig unzureichend sei, ließ angesichts der zunehmenden Unsicherheit für eine spätere Eheschließung und der daraus erwachsenden Notwendigkeit, auch die gebildeten Mädchen zum Eintritt in geeignete Berufszweige durch gründliche und vielseitige Ausbildung fähig zu machen, das Verlangen immer lebendiger hervortreten, einmal eine allgemeine Umgestaltung der höheren Mädchenschule überhaupt in die Wege zu leiten, zum anderen aber mit der allgemeinen höheren Mädchenschule noch weitere Bildungsmöglichkeiten zu schaffen, die geeigneten Persönlichkeiten auch die Wege zum akademischen Studium eröffnen könnten.

f) Private Gründungen von sog. weiterführenden Bildungsanstalten.

Zunächst rief die Privatinitiative[3]) die meisten solcher weiterführenden Bildungsanstalten ins Leben; bald waren es Frauenvereine, bald

1) Vgl. Frauenbildung, 3. Jahrgang 1904, S. 45 ff. und S. 58 ff.

2) Vgl. die vom Bund Deutscher Frauenvereine veranstaltete Übersicht: Gymnasialer Mädchenunterricht in Deutschland; Frauenbildung, 3. Jahrgang 1904, S. 272 ff.

3) Vgl. hierzu u. a.: H. Schmidt, Die Lehrpläne deutscher Mädchengymnasien. Frauenbildung, 2. Jahrgang 1903, S. 387 ff.; ferner: Kase, Von den Realgymnasialklassen in Schöneberg, Frauenbildung, 3. Jahrgang 1904, S. 151 ff.

besondere Kuratorien oder Privatpersonen; nur in vereinzelten Fällen gingen auch Stadtverwaltungen (Breslau, Charlottenburg, Schöneberg u. a.) an die Gründung solcher Anstalten heran. Bis zum Jahre 1904 bestanden in Deutschland im ganzen 20 derartige Anstalten, von denen auf Preußen allein die Hälfte kam. Ihrer inneren Einrichtung nach waren es teils gymnasiale, teils realgymnasiale Kurse mit drei bis sechsjähriger Kursusdauer. Die Lehrpläne waren von Fall zu Fall verschieden, aber, da in allen preußischen und norddeutschen Fällen die Schülerinnen auf die Ablegung der Reifeprüfung vor einer fremden Kommission an entsprechenden Knabenanstalten vorbereitet werden mußten, so mußten die Zielforderungen in den einzelnen Fächern wiederum mit denen der betreffenden höheren Knabenschulen in Einklang gebracht werden. Das gilt besonders auch von den mathematischen Pensen, die den einzelnen Jahresstufen der Kurse zuzumessen waren. Zwar konnte man bei der in den meisten Fällen für die Zwecke des mathematischen Unterrichts nicht ausreichenden Vorbildung der Schülerinnen, die oft erst nach Absolvierung einer höheren Mädchenschule zum Besuch der Kurse zugelassen wurden, nicht daran denken, ein Abbild des mathematischen Knabenunterrichts einfach herüberzunehmen. Das verbot sich auch schon mit Rücksicht auf die nicht selten gefundene Schwierigkeit, bei den Mädchen eine gewisse anfängliche Scheu vor der Mathematik zu beseitigen. Aber schließlich mußte doch zur Reifeprüfung der Standpunkt eines Gymnasiums oder eines Realgymnasiums erreicht sein. So kam es, daß die in Gymnasial- und Realgymnasialkurse vorgebildeten Mädchen beim Abiturientenexamen nach den für die entsprechenden Knabenanstalten geltenden Vorschriften geprüft wurden.

g) Einwirkung des November-Erlasses von 1900 auf die Gestaltung der zum Studium führenden Mädchenkurse.

Aber ein anderes Moment, das allmählich mit Nachdruck den Unterricht an den Knabenanstalten zu beeinflussen begann, kam dabei mittelbar den Mädchenkursen zu gute. Es waren das die in der Schulreform und dem königlichen Erlaß vom 26. November 1900 liegenden Konsequenzen; die dadurch herbeigeführte Gleichwertigkeit und Gleichberechtigung der drei Hauptarten der höheren Knabenschulen (humanistisches Gymnasium, Realgymnasium und Oberrealschule) sowie die weiterhin gewährte Ausdehnung der Studienberechtigungen für die realistischen Anstalten bewirkte von selbst eine Vereinfachung in der Wahl der für Mädchen in Betracht zu ziehenden Wege. Man entschloß sich zumeist für die Realgymnasialkurse, die allen für Frauen in Betracht kommenden Studienmöglichkeiten entsprachen.

h) Doblins Eintreten zu Danzig für die Einführung der Mathematik an den höheren Mädchenschulen.

Die Frauenfrage in Verbindung mit den auch durch sie besonders angeregten Schulfragen mußte, wie schon angedeutet wurde, einen entscheidenden Einfluß auf die Entschließungen des Deutschen Vereins aus-

üben. Das kam deutlich zum Ausdruck in Danzig nach den Vorträgen von Doblin und Frl. Sprengel, wo nach langer Debatte der folgende Wychgramsche Antrag[1]) mit großer Mehrheit angenommen wurde: „Die Frauenbewegung fordert: 1. Vertiefung der Bildung der Frau für ihre allgemeine Bestimmung; 2. Vorbereitung der Frau auf das Universitätsstudium. Der Deutsche Verein für das höhere Mädchenschulwesen teilt diese Forderungen und hält eine Erweiterung bezw. Umgestaltung der höheren Mädchenschule in diesem Sinne für nötig".

Aus den Danziger Verhandlungen ist besonders für unseren vorliegenden Zweck eine Stelle des Vortrages von Doblin[2]) von Interesse; sie bezieht sich auf Erweiterung des Lehrplans der höheren Mädchenschule durch Einführung des mathematischen Unterrichts. Doblin hatte einem seiner Leitsätze die Fassung gegeben: „Die Forderung, eine bessere geistige Schulung durch Vertiefung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts gegenüber der bisher zu einseitig betonten literarisch-ästhetischen Erziehung herbeizuführen, ist anzuerkennen". Zur Begründung dieser These gab er folgende Ausführung: „Daß bisher der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht in den höheren Mädchenschulen eine Vernachlässigung gegenüber den ethisch-sprachlichen Fächern erfuhr, hat mehrere Gründe. Man ging davon aus, daß beim Knaben mehr der Verstand und Wirklichkeitssinn überwiege, beim Mädchen das Gemüt und die Phantasie. Da ferner das Mädchen in erster Linie für die spätere gesellschaftliche Sphäre der gebildeten Hausfrau erzogen wurde, und ihm hierbei die literarisch-ästhetische Bildung weit mehr zu statten kam als die Kenntnisse mathematischer Lehrsätze oder physikalischer und chemischer Vorgänge, glaubte man die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer vernachlässigen zu dürfen. In den preußischen Maibestimmungen von 1894 beschränkt sich das Rechnen auf die bürgerlichen Rechnungsarten; die Berechnung von Flächen und Körpern wird in volksschulmäßig-elementarer Weise vorgenommen, und in der Naturlehre darf man über die dürftigsten Anfangsgründe nicht hinausgehen, da der Mangel an mathematischem Verständnis das Eindringen in diese Wissensgebiete verhindert. Nun schließt die moderne Frau ganz richtig: Wenn die weibliche Natur wegen ihrer starken Anlage zur Gefühlsseite hin im allgemeinen mehr Hindernisse dem folgerichtigen Denken bietet als die männliche, nun, dann betont im Mädchenunterricht die Fächer, die eine straffe Verstandesschulung am ehesten hervorzubringen geeignet sind. Andererseits wünscht die moderne Frau wiederum mit Recht, daß die gemütbildenden Stoffe im Knabenunterricht eine größere Berücksichtigung erführen. Nun stößt man vielfach auf die Meinung, daß das Mädchen für die mathematische Wissenschaft bis auf wenige Ausnahmen keine Anlage hätte, und daß es falsch wäre, einen Boden mit einer Frucht zu bestellen, für die er nicht die genügenden Nährwerte enthielte. Aber ist es nicht ganz natürlich, daß die Mädchen,

1) Vgl. Frauenbildung, 3. Jahrgang 1904, S. 89. 2) Ebenda, S. 49.

die Generationen hindurch von diesem Unterricht ferngehalten worden sind, dafür keine Anlage zu haben scheinen? Die Erfahrungen des Auslandes sprechen dagegen. Auch im Volksschulunterricht ist nicht festgestellt worden, daß die Mädchen hinter den Knaben im Rechnen zurückbleiben; ja, man ist geneigt, das Gegenteil zu behaupten. Man gebe nur den Mädchen in den Unterklassen vermehrten Rechenunterricht und in den Oberklassen wissenschaftlichen mathematischen Unterricht, wähle dazu die besten Lehrkräfte aus, und man wird sich sicherlich der Resultate freuen. Kein Unterricht hat wohl mehr formal bildende Kraft als der mathematische. Die Mathematik ist die Wissenschaft par excellence; ihr Gebäude ist das feinste und doch am festesten gefügte; sie ist die erhabene Führerin in den exakten Wissenschaften; ohne ihre Kenntnis sind unsere gewaltigen Fortschritte auf den technisch-naturwissenschaftlichen Gebieten nicht zu verstehen. So lange die Mädchen nicht in diese vollkommenste Wissenschaft eingeführt werden, müssen sie das Bewußtsein der Rückständigkeit hinter dem männlichen Geschlecht haben und untauglich bleiben für viele Berufszweige, die sie sonst im modernen Kulturleben wohl ausfüllen könnten. Erfreulich ist es, daß Württemberg in seinem neuen Lehrplan für höhere Mädchenschulen vom 9. März d. J. dieser Forderung bereits Rechnung zu tragen sucht".

Treffender konnte wohl die Lage, in der sich die Mathematik damals noch den öffentlichen höheren Mädchenschulen gegenüber befand, nicht gekennzeichnet werden. Auch von anderen Seiten wurde in jener Zeit mehr und mehr auf die Notwendigkeit der Einführung der Mathematik an den Mädchenschulen hingewirkt; genügen möge es, an dieser Stelle hinzuweisen auf die diesem Ziele zustrebenden Arbeiten von C. Hecht[1]), A. Mollberg[2]), A. Gleichen[3]), E. Meyer[4]).

i) Die Denkschrift des Deutschen Vereins (1904).

Nach der Danziger Tagung wurde durch eine dazu berufene Kommission eine Denkschrift[5]) ausgearbeitet, die unter dem 1. Februar 1904 an die Staatsregierungen abging und außer den genau präzisierten Forderungen des Vereins eine den Reformvorschlägen angepaßte Stundentafel enthielt. Die Hauptsätze dieser Denkschrift lauten:

1) Vgl. C. Hecht, Rechnen und Mathematik in der zehnstufigen höheren Mädchenschule; Frauenbildung, 1. Jahrgang 1902, S. 97ff.

2) Vgl. A. Mollberg, Über Zweck und Methode des mathematischen Unterrichts in der höheren Mädchenschule, Frauenbildung, 2. Jahrg. 1903, S. 112ff.

3) Vgl. A. Gleichen, Frauenlogik und Mathematik, Frauenbildung, 3. Jahrgang 1904, S. 269ff.

4) Vgl. E. Meyer, Wie kann die von den höheren Töchterschulen gewährte Bildung zeitgemäß gefördert und erweitert werden? (Vortrag, gehalten zu Koblenz am 15. Mai 1901 in der 28. Hauptversammlung des Rheinischen Provinzialvereins für das höhere Mädchenschulwesen), abgedruckt in „Die Mädchenschule, 14. Jahrg. 1901, S. 109ff., insbesondere S. 116. — Vgl. ferner: Frauenbildung, 2. Jahrg. 1903, S. 561ff. (Die Einführung der Mathematik in die höhere Mädchenschule.)

5) Vgl. Frauenbildung, 3. Jahrg. 1904, S. 445ff.

I. Die zehnjährige höhere Mädchenschule bleibt nach wie vor die Stätte allgemeiner höherer Mädchenbildung, bedarf jedoch einer Umgestaltung ihres Lehrplanes, um zugleich die geeignete Grundlage für weitere Bildungsgänge sein zu können.

II. Diese weiteren Bildungsgänge müssen in festen Schuleinrichtungen bestehen, die wohl Rücksicht nehmen können auf das Lebensalter und die Eigenart des Mädchens, aber weder den Charakter der Schule mit ihrer erziehenden Kraft und Zucht verleugnen, noch die höhere Mädchenschule in ihrer Arbeit aufhalten, stören oder irgendwie beeinflussen dürfen.

III. Die zehnjährige höhere Mädchenschule bleibt nach wie vor eine in sich geschlossene Lehranstalt, vertieft aber die Bildung ihrer Schülerinnen durch Einführung des mathematischen (und demgemäß Umgestaltung des naturwissenschaftlichen) Unterrichts, sowie durch eine strenge Betonung des logischen Gehaltes im Sprachunterrichte und Vertiefung sowie Ausprägung der allgemeinen Werte des Geschichtsunterrichts in den Schuljahren.

IV. Der Oberbau ist dreijährig und führt unter obligatorischer Hinzuziehung des Lateinischen zum Universitätsstudium.

Schülerinnen, welche diese Berechtigung nicht erstreben, sondern nur Vertiefung und Erweiterung ihrer Allgemeinbildung suchen, können auch in einzelnen Fächern teilnehmen. Sie unterstehen der allgemeinen Schulordnung und erhalten über den Erfolg des Besuches eine amtliche Bescheinigung. Die Berechtigung zum Studium wird durch eine Prüfung erworben.

k) Die im Deutschen Verein vorgeschlagene Stundentafel und die Forderung des dreiklassigen Aufbaus.

Der Stundentafel hatte die Kommission folgende Gestalt gegeben:

	Unterstufe			Mittelstufe			Oberstufe				Oberbau		
	Klasse			Klasse			Klasse				Klasse		
	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I	III	II	I
Religion	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Deutsch	10	9	9	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4
Französisch	—	—	—	5	5	5	4	4	4	4	3	3	3
Englich	—	—	—	—	—	—	4	4	4	4	3	3	3
Latein	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	6	6
Rechnen / Mathematik	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Geschichte	—	—	—	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2
Erdkunde	—	—	—	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1
Naturkunde	—	—	—	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Zeichnen	—	—	—	—	2	2	2	2	2	2	—	—	—
Schreiben	—	2	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Handarbeit	—	2	2	2	2	2	1	1	1	—	—	—	—
Singen			2	2	2	2	1	1	1	1	—	—	—
Turnen	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	—	—	—
Summe	18	22	24	30	30	30	30	30	30	30	27	27	27

Stundenplan für zehnklassige höhere Mädchenschulen und Oberbau.

Eine wesentliche Eigenschaft der vorstehenden Stundenverteilung ist der Versuch, dem Rechnen (und der Mathematik) von Anfang an zu einer genügenden Stundenzahl zu verhelfen. Bedeutsam ist auch der Vorschlag betr. des Weges, auf dem nach der Meinung der Kommission des Deutschen Vereins die Frau zum Studium sollte gelangen können. Die Frage, ob diese Aufgabe besser durch schon frühzeitige Abzweigung

einer besonderen Schulform von der höheren Mädchenschule oder durch einen sich geradlinig an die absolvierte zehnklassige höhere Mädchenschule anschließenden Aufbau werde gelöst werden können, hatte sich inzwischen schon zu einem der Hauptstreitpunkte in den Erörterungen der interessierten Kreise ausgebildet. Im Deutschen Verein wurde damals unter Ablehnung der Gabelung der geradlinige Aufbau befürwortet, der, abgesehen von der heutigen Gestaltung des Oberlyzeums, in Preußen keine praktische Bedeutung erlangt hat, wohl aber in Sachsen und Hessen.

l) Befürwortung der Gabelung durch den Allgemeinen Deutschen Lehrerinnenverein (1903).

Nicht lange vor dem Erscheinen dieses Lehrplanentwurfes hatte der Allgemeine Deutsche Lehrerinnenverein auf seiner Bremer Tagung (Pfingsten 1903) einen von Frl. A. Jungk[1]) vorgelegten Lehrplan für höhere Mädchenschulen erörtert. Für die höhere Mädchenschule, die einschließlich eines vierjährigen Volksschulvorkursus eine über 13 Jahre verteilte Ausbildung geben soll, ist neben dem im Mittelpunkt stehenden Deutschunterricht eine Verstärkung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Elements und eine hinreichend starke Betonung der pädagogisch-hauswirtschaftlichen Unterweisung vorgesehen. Die drei obersten Klassen sollen mit Deutsch, Geschichte, Psychologie und Kinderpflege als Pflichtfächern ausgestattet sein, alle anderen Dinge sollen wahlfrei bleiben. Betreffs der Lehrziele will der Plan keine wesentliche Verschiedenheit gegenüber der Knabenrealschule, wohl aber sollen die Methoden des Unterrichts und die Stoffauswahl ihr eigenartiges Gepräge haben. Der hiermit geschilderte Schultypus soll aber irgend eine Berechtigung zum Studium nicht gewähren. Dafür soll ein sechsjähriger, an das siebente Schuljahr angeschlossener Realgymnasiallehrgang bestimmt sein. Also kein Aufbau, sondern Gabelung![2])

m) Von der Erfurter Tagung des Deutschen Vereins (1905).

Aus dem Jahre 1905 vermerken wir den Bericht von Luthmer auf der Erfurter[3]) Versammlung des Deutschen Vereins über den Inhalt der schon oben erwähnten Denkschrift und die sich daran anschließende weit ausgreifende Erörterung, an der so viele auf dem Gebiete des modernen höheren

1) Vgl. Frauenbildung, 2. Jahrg. 1903, S. 340; ferner: M. Poehlmann, Der „Entwurf zu einem Lehrplan für höhere Mädchenschulen" der Sektion für höhere Schulen des Allgemeinen Deutschen Lehrerinnenvereins, ebenda, S. 468ff.

2) Vgl. Lehrplan einer Reformschule für Mädchen mit 13 aufsteigenden Klassen im Auftrage der Sektion für höhere Mädchenschulen herausgegeben von dem Vorstande des Allgemeinen Deutschen Lehrerinnenvereins. Tilsit (Reyländer & Sohn) 1904. – Vgl. dazu auch: Frauenbildung, 4. Jahrg. 1905, S. 1ff., wo gleichfalls das Erforderliche über einen vom Verein katholischer deutscher Lehrerinnen, Fachabteilung für höhere Mädchenbildung aufgestellten „Entwurf zu einem Lehrplan für eine zehnklassige höhere Mädchenschule, Danzig (Raczkiewicz) 1904" berichtet wird. Charakteristisch für diesen letzteren Plan ist auch die der Mathematik beigelegte hohe Bedeutung für den Mädchenunterricht.

3) Vgl. Frauenbildung, 5. Jahrg. 1906, S. 1ff.

Mädchenschulwesens bekannt gewordene Persönlichkeiten sich lebhaft beteiligten. Herausgehoben seien die Namen der Herren Wychgram (Berlin), Raßfeld (Elberfeld), Keim (Karlsruhe), Schmidt (Hannover), Lohmann (Hannover), Gaudig (Leipzig), Keller (Frankfurt a./M.), Horn (Frankfurt a./M.), Tesdorpf (Hildesheim), Siebert (Herford) und der Damen Hilger (Kreuznach), Sprengel (Berlin), Jungk (Karlsruhe). Jene Versammlung stand noch völlig unter dem Eindrucke des schweren Verlustes, den die preußische Unterrichtsverwaltung durch den im Jahre zuvor erfolgten, zu frühen Tod des ersten Dezernenten für das höhere Mädchenschulwesen, des Geh. Oberregierungsrats Waetzoldt, erlitten hatte. In dem überaus warmen, ehrenden Nachruf, den sein Amtsnachfolger, Geh.-Reg.-Rat Meyer[1]) ihm in Erfurt hielt, kamen die bezeichnenden Worte vor: „Sein Erbe! Ja, gestatten Sie darüber noch ein kurzes Wort, um eines hinzuzufügen, das noch nicht ausgesprochen wurde und noch nicht ausgesprochen werden konnte, weil es so nicht bekannt war und nur uns an der Zentralstelle bekannt ist. Von 1901—1904 sind drei Entwürfe für die Neugestaltung des höheren Mädchenschulwesens und der Frauenbildung in Preußen ausgearbeitet, drei Entwürfe, immer von einander verschieden, immer neue Gedanken bringend, einer den anderen ablösend und überholend: gewiß ein Zeichen von der Unermüdlichkeit, mit der der Entschlafene an unserer Sache gearbeitet hat, von der Aufmerksamkeit, mit der er jeder neuen Anregung folgte, allerdings auch ein Zeichen dafür, wie sehr diese Bewegung in Fluß — das wäre zu wenig gesagt — im sausenden Fluge ist und immer neue Wünsche, immer neue Forderungen in unseren Tagen an uns herantreten läßt, und deswegen auch ein Zeichen dafür, daß mit Vorsicht und Ruhe alles geprüft werden muß.“

n) Die Berliner Konferenz von 1906.

Einen schlagenden Beweis für den verhältnismäßig raschen Wechsel der Anschauungen und Entschlüsse an maßgebender Stelle brachten wiederum die allernächsten Jahre. Wie schon einmal im Jahre 1872, so berief auch die preußische Regierung jetzt wieder, nämlich im Januar 1906, eine Konferenz nach Berlin zur Beratung der Frage, wie eine den Zeitbedürfnissen entsprechende Gestaltung des höheren Mädchenschulwesens erfolgen könne.[2]) An der Konferenz nahmen neben Vertretern der Regierung, unter denen Ministerialdirektor Althoff[3]) als zeitweiliger Leiter der Verhandlungen hervortrat, Männer und Frauen in gleicher Zahl aus den verschiedenartigsten Kreisen, Pädagogen und Laien, teil.[4]) Das

1) Vgl. Frauenbildung, 5. Jahrg. 1906, S. 10. — Ferner: J. Wychgram, Stephan Waetzold, Frauenbildung, 4. Jahrg. 1905, S. 193ff.

2) Vgl. F. Kundt, Bericht über die Konferenz für das höhere Mädchenschulwesen, Frauenbildung, 5. Jahrg. 1906, S. 207ff. — Die Mädchenschule, 19. Jahrg. 1906, S. 1ff.

3) Vgl. J. Wychgram, Friedrich Althoff †, Frauenbildung, 7. Jahrg., 1908, S. 532.

4) Vgl. Frauenbildung, 5. Jahrg., das Namenverzeichnis, S. 213.

Wesentliche der vom Vorsitzenden Minister Dr. Studt, bekannt gegebenen Regierungsvorlage bestand in folgendem: 1) Die höheren Mädchenschulen sollten künftig, da schon zwei Drittel aller bestehenden höheren Mädchenschulen als zehnklassige Anstalten eingerichtet waren, zehn einjährige Klassenstufen aufweisen, nämlich 7 Klassen des sog. Lyzeums, denen 3 Vorschuljahre vorausgehen sollten. 2) Im Lehrplan des Lyzeums sollte stärkere Betonung der Verstandesbildung durch Einführung der Mathematik und durch Vermehrung des naturwissenschaftlichen Unterrichts angestrebt werden; in den Sprachen (einschl. Deutsch) wurde gründlichere Berücksichtigung der Grammatik und größere Ausnutzung der formal bildenden Elemente in Aussicht genommen. 3) Eine Abschlußprüfung sollte nicht stattfinden; doch sollte den Schülerinnen die durch das Abgangszeugnis gegebene Bescheinigung über den erfolgreichen Besuch der obersten Klasse diejenigen Berechtigungen gewährleisten, die das Reifezeugnis für Obersekunda den Knaben zuspricht. Für das als Aufbau vorgesehene Oberlyzeum, dem die doppelte Aufgabe zufallen sollte, Gelegenheit zur nachfolgenden Vertiefung der Lyzeumsbildung zu geben und zur Reifeprüfung zu führen, waren sogar vier Jahre geplant; und zwar war es in drei Formen gedacht, analog den drei Haupttypen (Gymnasium, Realgymnasium, Oberrealschule) auf der Knabenseite. Vorherrschen sollte das lateinlose Oberlyzeum, am meisten der Oberrealschule ähnlich, mit Mathematik und Naturwissenschaften im Vordergrunde. Die durch das Oberlyzeum vermittelte Bildung sollte bei Vermeidung mechanischer Nachahmung der durch die neunstufigen höheren Knabenschulen dargebotenen gleichwertig sein. Die am Schlusse der vier Jahre stattfindende Reifeprüfung sollte den Frauen die gleichen Berechtigungen verleihen, die an die Reifezeugnisse der neunstufigen Knabenanstalten geknüpft sind, natürlich soweit sie für Frauen Zweck und Sinn haben. 4) Zum Besuch des Oberlyzeums sollten auch sogenannte Gastschülerinnen mit dem Rechte der Wahlfreiheit bezüglich der Fächer, aber unter der Bedingung einer wöchentlichen Mindeststundenzahl zugelassen werden.

Bis auf den vierjährigen Aufbau und bis auf seine drei Formen entsprach der Regierungsvorschlag, der zu weiterer Durchberatung einer besonderen gemischten Kommission aus Damen und Herren überwiesen wurde, gut den Bestrebungen und Beschlüssen des Deutschen Vereins; war doch vor allem die ungegabelte zehnklassige höhere Mädchenschule zunächst einmal als Normalschule für alle gebildeten Frauen gedacht.

o) Nochmals der Deutsche Verein: Tagung zu Ulm (1907).

Im Deutschen Verein ruhten aber auch die Beratungen über die Organisations- und Lehrplanfragen keineswegs. Nach mannichfachen Verhandlungen einer besonderen Lehrplankommission[1]) und des Weiteren Ausschusses[2]) kamen noch einmal im Jahre 1907 auf der Hauptver-

1) Vgl. Frauenbildung, 6. Jahrg., 1907, S. 89–90; S. 289.
2) Ebenda, 5. Jahrg., 1906, S. 586ff.

sammlung zu Ulm[1]) die großen Streitpunkte zur Erörterung: „1) Zehnjährige Kursusdauer der höheren Mädchenschule, 2) Aufsichtsbehörden wie bei den höheren Knabenschulen, 3) vierjährige Dauer der Studienanstalt, 4) Mädchengymnasium eine besondere Anstalt," in bezug auf die beiden letzten Punkte jedoch, die die Kernfrage, ob Aufbau oder Gabelung, einschlossen, ohne das Ergebnis einer sichtbaren, auf etwa überwiegender Mehrheitsäußerung beruhenden Einigung. Die Meinung der Lehrplankommission aber ging dahin, daß man an dem dreijährigen Aufbau wegen der zu bewältigenden Stoffmenge nicht festhalten könne.

p) Die Anschauungen auf dem Kongreß für höhere Frauenbildung zu Cassel (1907).

Um so bestimmter nahm dagegen der Kongreß für höhere Frauenbildung[2]) zu Cassel (1907), auf dem wiederum die hervorragenden Führerinnen der Frauen: A. Steinmann, H. Lange, G. Bäumer, M. Weber, M. Martin, P. Schlodtmann u. a. in die Erörterungen eingriffen, Stellung zu den schwebenden Fragen, und die Entschließungen[3]) bewiesen klar, wohin diese Frauen den Kurs gesteuert zu sehen wünschten.

Fast auf eine straffe Angleichung des Mädchenunterrichts an die Unterrichtsziele der Knabenanstalten war die Parole eingestellt. Die Mädchenschule sollte in Parallele zur Knabenrealschule treten. Des weiteren sollte für die Mädchen, die das Ziel des Gymnasiums oder Realgymnasiums erreichen wollen, eine Gabelung nach dem 7. Schuljahr stattfinden. Die Vorbereitungsanstalten für die Hochschule sollten nach ihren eigenen Bedürfnissen eingerichtet werden, und daher wurde auch vom Standpunkte des Studiums aus die Abzweigung der gymnasialen und realgymnasialen Anstalten von der höheren Mädchenschule als wünschenswert bezeichnet. Eine Verlängerung der Schulzeit auf 14 Jahre wurde aus sozialen und pädagogischen Gründen abgelehnt. Als selbstverständliche Folge der Reifeberechtigung wurde die Immatrikulation an der Hochschule angesehen. Ferner wurde noch für die Einrichtung von sog. Frauenschulklassen, die der allgemeinen Fortbildung über die allgemeine Mädchenschule hinaus dienen sollten, möglichste Beweglichkeit im Lehrplan und Ausgestaltung nach der allgemeinen, sozialen und pädagogischen Richtung unter Ablehnung ihrer Verbindung mit dem Lehrerinnenseminar gewünscht. Endlich wurde der gemeinsame Unterricht von Knaben und Mädchen (Koedukation) als eines der zweckmäßigsten Mittel sowohl zur Lösung der Frage der höheren Frauenbildung als auch zur Entwicklung verfeinerter Beziehungen der Geschlechter bezeichnet und für die Mädchen die Zulassung zu den höheren Knabenschulen nach dem Vorbilde der in Baden, Württemberg, Hessen, den Reichslanden getroffenen Einrichtungen besonders an solchen Orten gefordert, die den Ausbau der

1) Vgl. Frauenbildung, 7. Jahrg., 1908, S. 1 ff.
2) Ebenda, 6. Jahrg., 1907, S. 512 ff. 3) Ebenda, 6. Jahrg., S. 572 ff.

höheren Mädchenschulen durch die Errichtung von Vorbereitungsklassen für das Universitätsstudium nicht ermöglichen können oder wollen. Die Norm des gemeinsamen Unterrichts wird erst dann als erreicht angesehen, wenn an gemischten Schulen auch Lehrerinnen wirken.

So wogte der Kampf der Meinungen in Vereinen und auf Kongressen hin und her. Eine vollständige Wiedergabe des Widerstreites der verschiedenartigsten Bestrebungen ist im Rahmen dieser Arbeit weder möglich noch beabsichtigt gewesen. Aber vor allem der nichtdeutsche Leser würde die Entwicklung der Dinge an den Mädchenbildungsanstalten auch in bezug auf die Mathematik nicht mit einiger Sicherheit beurteilen können, wenn nicht in großen Zügen der Betrachtung der eigentlichen Spezialfrage, für die nunmehr das Jahr 1908 die Hauptbedeutung gewinnt, die Schilderung der allgemeinen geschichtlichen Gestaltung vorangegangen wäre.

5. Die preußische Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens vom 18. August 1908.

a) Allgemeines über die künftige Gliederung des höheren Mädchenschulwesens und die verschiedenen Schularten.

Die lange ersehnte Regelung des Bildungswesens für die weibliche Jugend in Preußen brachte das Jahr 1908. Der königliche Erlaß vom 15. August 1908 regelte die rechtliche Stellung in dem Sinne, daß die höheren Mädchenschulen und weiterführenden Bildungsanstalten für die weibliche Jugend in den Aufsichtskreis der Provinzialschulkollegien überwiesen wurden und daß die an den Mädchenanstalten wirkenden akademisch gebildeten Direktoren und Oberlehrer hinsichtlich ihrer Rang- und Titelverhältnisse denen der höheren Knabenanstalten gleichgestellt wurden. Am 18. August 1908[1]) wurden unter dem Ministerium Holle die neuen allgemeinen Bestimmungen für die Gliederung und Einrichtung der Bildungsanstalten für die weibliche Jugend erlassen.

Was schuf nun diese Neuordnung in Preußen? Etwas ganz anderes, als man allgemein auf Grund der symptomatischen Ereignisse der allerletzten Jahre hätte erwarten können und dürfen. Es gab wieder eine völlige Überraschung; denn der Standpunkt, den die Unterrichtsverwaltung noch im Jahre 1906 auf der Berliner Konferenz eingenommen hatte, war in wichtigen Punkten wieder verlassen worden.

---

1) Vgl. „Bestimmungen über die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens" vom 18. August 1908 und „die Ausführungsbestimmungen zu dem Erlasse vom 18. August 1908" vom 12. Dezember 1908, Berlin (Cotta) 1908; auch zu finden in Güldner, Die höheren Lehranstalten für die weibliche Jugend in Preußen, Halle 1909, in Schöppa, Das Mädchenschulwesen in Preußen, Leipzig 1909 und in Jantzen, Die höhere Mädchen- und Lehrerinnenbildung in Preußen, Goslar 1909. – S. auch Frauenbildung, 7. Jahrgang, 1908, S. 385ff.

Nur eines war in der Theorie wenigstens zunächst festgehalten worden: die zehnklassige höhere Mädchenschule wurde als die Normalbildungsanstalt für die gebildete Frau eingeführt. Begrifflich wurden die „höheren Mädchenschulen" als solche Schulen definiert, die in bezug auf die Lehrfächer, Stundenzahlen und Lehrpläne den neuen Bestimmungen vom 18. August 1908 entsprechen, und in denen in der Regel wenigstens die Hälfte aller Stunden in den wissenschaftlichen Fächern der Mittel- und Oberstufe von akademisch gebildeten Lehrern und Lehrerinnen erteilt wird. In geradlinigem Zuge schließen sich für diejenigen Mädchen, die die Bescheinigung über den erfolgreichen Besuch der obersten Klasse besitzen und sich für die allgemeinen Aufgaben der gebildeten Frau in der Famile oder im weiteren Gemeinschaftsleben eine vertiefte Bildung aneignen wollen, zwei Frauenschulklassen an; diejenigen, welche sich nach erfolgreichem Besuche der höheren Mädchenschule für den Beruf der Lehrerin an mittleren und höheren Mädchenschulen ausbilden wollen, finden dazu die Möglichkeit in dem sich an die höhere Mädchenschule in geradem Zuge anschließenden vierjährigen Lehrgange des höheren Lehrerinnenseminars, das drei wissenschaftliche Fortbildungsklassen und eine Klasse für das sog. Praktische Jahr aufweist. Frauenschule und höheres Lehrerinnenseminar faßte die Neuordnung als Einrichtungen des sogenannten „Lyzeums" zusammen.

Die jungen Mädchen dagegen, die die Universitätsreife zu erlangen beabsichtigen, müssen sich den „Studienanstalten" zuwenden, die nach dem System der Gabelung von der höheren Mädchenschule in drei Formen abzweigen. Die auf sechs Jahre berechneten gymnasialen und realgymnasialen Kurse zweigen nach dem 7. Schuljahre, die auf fünf Jahre berechneten Oberrealschulkurse dagegen nach dem 8. Schuljahr ab,

b) Charakteristische Grundauffassung der Regierung betr. Ausgestaltung der Lehrpläne.

Für den Lehrplan der höheren Mädchenschule ist bezeichnend die in der Einleitung zu den allgemeinen Bestimmungen gemachte ausdrückliche Bemerkung[1]): „Der Fortschritt und die Besserung wird zunächst von einigen Änderungen im Lehrplan der höheren Mädchenschule selbst ausgehen müssen. Es ist zu verhüten, daß die ästhetische und die Gefühlsbildung zu sehr überwiegen, daß hauptsächlich die Phantasie angeregt und das Gedächtnis in Anspruch genommen wird, während die Verstandesbildung sowie die Erziehung zu selbsttätiger und selbständiger Beurteilung der Wirklichkeit zurücktreten. Es wird daher notwendig sein, dieses im deutschen und fremdsprachlichen Unterricht stärker zu betonen, ohne jedoch die bisherigen Ziele für die Literaturkenntnis und für den mündlichen Gebrauch der fremden Sprachen herabzusetzen. Ebenso werden dem Rechenunterricht durch Einführung von Mathematik in den

1) Vgl. Frauenbildung, 7. Jahrg., 1908, S. 386.

Lehrplan erweiterte Aufgaben zuzuweisen sein. Zugleich ist eine Umgestaltung und Verstärkung des naturwissenschaftlichen Unterrichts in Aussicht genommen. Doch soll durch diese Änderung die weibliche Eigenart in keiner Weise benachteiligt werden. Vielmehr werden Religion und Deutsch nach wie vor im Mittelpunkt der Mädchen- und Frauenbildung stehen."

Indem betreffs der besonderen Aufgaben des Lyzeums[1]) und der Studienanstalten[2]) auf die einschlägigen Stellen der „Einleitung" zu den allgemeinen Bestimmungen vom 18. August 1908 verwiesen sein möge, sei nur noch angeführt, daß für die höhere Mädchenschule keine Abschlußprüfung nach Absolvierung der obersten Klasse vorgesehen ist, sondern der erfolgreiche Besuch soll durch ein besonderes Zeugnis ausgesprochen werden. Prüfungen bestehen nur an den weiterführenden Bildungsanstalten. Am höheren Lehrerinnenseminar findet nach Ablauf des dreijährigen Kursus der wissenschaftlichen Fortbildungsklassen die wissenschaftliche Abschlußprüfung statt[3]), der ein Jahr später nach Beendigung des Praktischen Jahres die praktische Prüfung folgt. Die Studienanstalten lassen nach Absolvierung des Lehrganges ihrer obersten Klasse die Reifeprüfung folgen, die, falls sie bestanden wird, den jungen Mädchen die für sie in Betracht kommenden Berechtigungen der entsprechenden höheren Knabenanstalten, insbesondere also auch die Universitätsreife und damit das Recht auf volle Immatrikulation an der Hochschule gewährt.

c) Die neuen Anstaltsbezeichnungen auf Grund des Erlasses vom 1. Februar 1912.

Im Zusammenhange mit diesen Mitteilungen über die durch die Augustbestimmungen des Jahres 1908 verordnete Neugestaltung muß sogleich eine neue königliche Verfügung vom 18. Dezember 1911 nebst zugehörigem Ministerialerlaß vom 1. Februar 1912[4]) über Bezeichnungsänderungen im höheren Mädchenschulwesen Erwähnung finden. Die zehnklassigen nach den Bestimmungen über die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens vom 18. August 1908 eingerichteten höheren Mädchenschulen heißen künftig „Lyzeum"; die in jenen Bestimmungen als Lyzeen bezeichneten weiterführenden Bildungsanstalten für die weibliche Jugend führen fortan die Bezeichnung „Oberlyzeum". Die Bezeichnung „höheres Lehrerinnenseminar" soll in Zukunft nicht mehr angewandt werden. Die drei Wissenschaftlichen Fortbildungsklassen des bisherigen höheren Lehrerinnenseminars führen künftig die Bezeichnung: „Wissenschaftliche Klassen des Oberlyzeums" (abgekürzt: OLI, OLII, OLIII); das Praktische Jahr heißt für die Folge: „Seminarklasse des Oberlyzeums" (abgekürzt: SKl). Die Frauenschulklassen des Oberlyzeums sind abgekürzt mit FSI und FSII zu bezeichnen.

1) Vgl. Frauenbildung, 7. Jahrg., 1908, S. 387 u. 388. 2) Ebenda, S. 389 u. 390. 3) Ebenda, S. 388. 4) Ebenda, 11. Jahrgang, 1912, S. 113ff.

Die nach den Augustbestimmungen für den Eintritt in das Praktische Jahr (jetzt SKl)erforderliche Schlußprüfung heißt in Zukunft „Reifeprüfung des Oberlyzeums“ und das über sie auszustellende Zeugnis: „Reifezeugnis des Oberlyzeums“. Die Schülerinnen der Frauenschulklassen des Oberlyzeums erhalten nach mindestens zweijährigem erfolgreichen Besuch ein Abgangszeugnis, das die Bezeichnung: „Schlußzeugnis der Frauenschulklassen des Oberlyzeums“ führt.

Das den Schülerinnen eines Lyzeums über den erfolgreichen Besuch der obersten Klasse auszustellende Abgangszeugnis trägt in Zukunft den Namen „Schlußzeugnis des Lyzeums“; in jedem solchen Zeugnis ist ausdrücklich zu vermerken, daß die betreffende Schülerin das Ziel des Lyzeums erreicht hat und ob die Klassen der Oberstufe des betreffenden Lyzeums in getrennten Jahreskursen unterrichtet worden sind.

In allen übrigen Fällen erhalten die Schülerinnen beim Verlassen einer Anstalt ein „Abgangszeugnis“.

d) Übersicht über die Organisation und die Lehrpläne der einzelnen Schulformen.

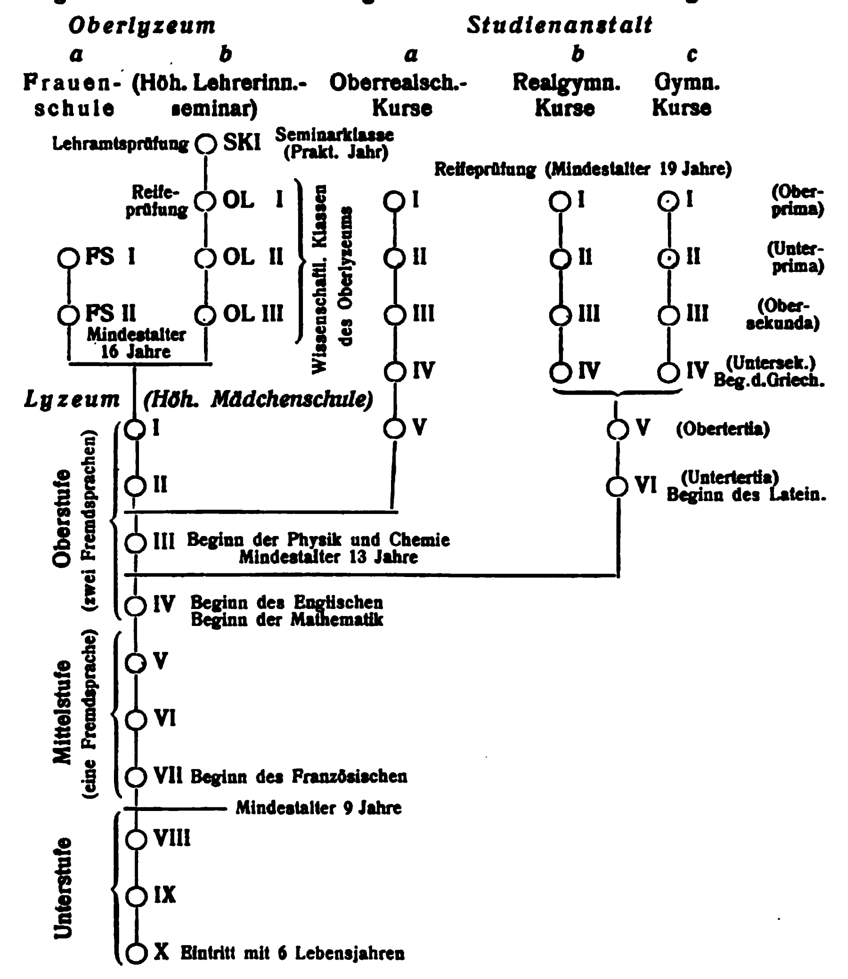
Nach den bisher gemachten Angaben werden jetzt die Tabellen, die nachstehend auf Seite 38, 39 und 40 abgedruckt sind, zur Verdeutlichung der Gliederung des höheren Bildungswesens für die weibliche Jugend und der zugehörigen Lehrpläne, soweit die Stundenzahlen für die einzelnen Fächer in Frage stehen, ohne jede weitere Erläuterung verständlich sein.

e) Gewisse allgemeine Vorschriften.

Von den für alle Anstalten gemeinsamen Vorschriften mögen hier noch folgende Platz finden: Die Anzahl der Schülerinnen in der Klasse eines Lyzeums soll 40 in der Regel nicht übersteigen; für die Schülerinnenzahl in einer Klasse des Oberlyzeums und der Studienanstalt ist als in der Regel geltende Höchstzahl 30 festgesetzt. Der Aufbau von Oberlyzealklassen oder die angegliederte Studienanstalt bilden mit dem Lyzeum eine Anstalt, so daß die Lehrkräfte in den Grenzen ihrer Lehrbefähigung zum Unterricht in allen Abteilungen der Gesamtanstalt verpflichtet sind. An den Lyzeen, Oberlyzeen und Studienanstalten unterrichten männliche und weibliche Lehrkräfte in annähernd gleicher Zahl. In der Regel soll die Zahl der einen nicht unter $^{1}/_{3}$ der Gesamtzahl herabgehen. Dasselbe Zahlenverhältnis soll gelten betreffs der von akademisch gebildeten Lehrern und Lehrerinnen erteilten Stunden. Für die Klassen der Unterstufe können Volksschullehrer und -lehrerinnen angestellt werden. Diese können in den technischen Fächern, soweit hierfür nicht besondere Fachlehrer und -lehrerinnen erforderlich sind, auch in den Klassen der Mittel- und Oberstufe unterrichten. Die übrigen Lehrer und Lehrerinnen ohne akademische Vorbildung („Ordentliche“ Lehrer und Lehrerinnen an Lyzeen) müssen die Prüfung für Mittel- und höhere Mädchenschulen abgelegt haben. In den wissenschaftlichen Klassen des Ober-

Tabellen zu S. 37.

1. Die Organisation der höheren Bildungsanstalten für die weibliche Jugend in Preußen.



2. Lehrplan des Lyzeums.

	Unterstufe (Vorschule)			Mittelstufe			Oberstufe				Zusammen	Die entsprechende Zahl für die Knabenrealschule[2])	
	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I	VII–I	VI–I	
1. Religion	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	17	13	Wissenschaftliche Fächer
2. Deutsch	10	9	8	6	5	5	4	4	4	4	32	29 [22]	
3. Französisch	—	—	—	6	5	5	4	4	4	4	32	31 [35]	
4. Englisch	—	—	—	—	—	—	4	4	4	4	16	13	
5. Geschichte, (Kunstgesch.)	—	—	—	—	2	2	2	2	2	3	13	9	
6. Erdkunde	—	—	2	2	2	2	2	2	2	2	14	12 [11]	
7. Rechnen und Mathematik	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	21	28 [32]	
8. Naturkunde	—	—	—	2	2	2	3	3	3	2	17	18	
9. Schreiben	—	3	2	1	1	1	—	—	—	—	3	6	Technische Fächer
10. Zeichnen	—	—	—	2	2	2	2	2	2	2	14	10+(6)[3])	
11. Nadelarbeit	—	2	2	2	2	2	(2)[1]	(2)[1]	(2)[1]	(2)[1]	6 (14)	—	
12. Singen	2/2	2/2	2/2	2	2	2	2	2	2	2	14	12	
13. Turnen	2/2	2/2	2/2	2	2	2	3	3	3	3	18	18	
Zusammen	18	22	22	31	31	31	31 (33)	31 (33)	31 (33)	31 (33)	217 (225)	199 (205) bez. [199] (205)	

1) Auf der Oberstufe wahlfrei; die Stundenzahlen für wahlfreie Fächer sind in eine ( ) eingeschlossen.

2) Die nicht eine [ ] eingeschlossenen Zahlen sind die Stundenzahlen nach dem Lehrplan D_1 für Realschulen, die in eine [ ] gesetzten dagegen die Stundenzahlen für Realschulen, die nach dem Plane D unterrichten (vgl. Lehrpläne und Lehraufgaben der höheren Schulen in Preußen von 1901, Halle, Buchhandlung des Waisenhauses).

3) Wahlfreies Linearzeichnen von III ab.

3. Lehrplan der Wissenschaftlichen Klassen und der Seminarklasse des Oberlyzeums [1]).

	Wissenschaftliche Klassen			Zusammen	SKl
	OL III	OL II	OL I		
1. Religion	3	3	3	9	1
2. Pädagogik	2	2	2	6	3
3. Deutsch	3	3	3	9	1
4. Französisch	4	4	4	12	} 1
5. Englisch	4	4	4	12	}
6. Geschichte	2	2	2	6	} 1
7. Erdkunde	2	1	1	4	}
8. Mathematik	4	4	4	12	1
9. Naturkunde	2	3	3	8	1
10. Lehranweisung und Lehrproben	—	—	(4)[2])	—	4
11. Unterrichten	—	—	—	—	4—6
12. Wissenschaftliche Übungen	—	—	—	—	8
Zusammen	26	26	26	78	25–27

1) Auf den Lehrplan der Frauenschulklassen des Oberlyzeums, der keinerlei Beziehungen zur Mathematik hat, wird hier weiter nicht eingegangen. Dafür haben sie Physik, die aber gänzlich unmathematisch zu geben ist.

2) Enthalten in der Stundenzahl der einzelnen Fächer.

4. Lehrplan der Studienanstalten.

a) Oberrealschulkurse.

	V	IV	III	II	I	Zusammen	
1. Religion . . .	2	2	2	2	2	10	Verbindliche wissenschaftliche Fächer
2. Deutsch und philosophische Propädeutik	4	4	4	4	4	20	
3. Französisch .	4	4	4	4	4	20	
4. Englisch . .	4	4	4	4	4	20	
5. Geschichte .	2	2	2	2	2	10	
6. Erdkunde . .	1	1	1	1	1	5	
7. Mathematik . .	4	5	5	5	5	24	
8. Naturkunde . .	4	4	4	4	4	20	
9. Zeichnen. . .	2	2	2	2	2	10	Verbindliche technische Fächer
10. Turnen. . . .	3	3	3	3	3	15	
11. Singen	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(5)	Wahlfreies Fach
Zusammen	30 (31)	31 (32)	1 (32)	31 (32)	31 (32)	154 (159)	

b) Realgymnasiale Kurse.

	VI	V	IV	III	II	I	Zusammen	
1. Religion . . .	2	2	2	2	2	2	12	Verbindliche wissenschaftliche Fächer
2. Deutsch und philosophische Propädeutik .	3	3	3	3	3	3	18	
3. Lateinisch . .	6	6	6	6	6	6	36	
4. Französisch .	3	3	3	3	3	3	18	
5. Englisch . . .	3	3	3	3	3	3	18	
6. Geschichte . .	2	2	2	2	2	2	12	
7. Erdkunde . .	1	1	1	1	1	1	6	
8. Mathematik .	4	4	4	4	4	4	24	
9. Naturkunde .	3	3	4	4	4	4	22	
10. Zeichnen . . .	2	2	2	2	2	2	12	Verbindliche technische Fächer
11. Turnen. . . .	3	3	3	3	3	3	18	
12. Singen. .	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(6)	Wahlfr. Fach
Zusammen	32 (33)	32 (33)	33 (34)	33 (34)	33 (34)	33 (34)	196 (202)	

c) Gymnasiale Kurse.

	VI	V	IV	III	II	I	Zusammen	
1. Religion . . .	2	2	2	2	2	2	12	Verbindliche wissenschaftliche Fächer
2. Deutsch und philosophische Propädeutik .	3	3	3	3	3	3	18	
3. Lateinisch . .	6	6	6	6	6	6	36	
4. Griechisch . .	—	—	8	8	8	8	32	
5. Französisch [1]	3	3	2	2	2	2	14	
6. Englisch [1] . .	3	3	—	—	—	—	6	
7. Geschichte . .	2	2	2	2	2	2	12	
8. Erdkunde . .	1	1	1	1	1	1	6	
9. Mathematik. .	4	4	3	3	3	3	20	
10. Naturkunde . .	3	3	2	2	2	2	14	
11. Zeichnen [2] . .	2	2	(2)	(2)	(2)	(2)	4 (12)	
12. Turnen. . . .	3	3	3	3	3	3	18	Verbindlich
13. Singen. . . .	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(6)	Wahlfrei
Zusammen	32 (33)	32 (33)	32 (35)	32 (35)	32 (35)	32 (35)	192 (206)	

1) Statt Französisch kann in den vier oberen Klassen auch Englisch genommen werden. 2) Bis V einschl. verbindlich, dann wahlfrei.

lyzeums sowie in den Klassen IV bis I der Studienanstalten darf der Unterricht in den wissenschaftlichen Fächern nur akademisch gebildeten Oberlehrern und Oberlehrerinnen übertragen werden. Für die Einführung in die Unterrichtspraxis können an den Oberlyzeen nicht akademisch gebildete Lehrer angestellt werden, die zum Unterricht an Volksschullehrerseminaren befähigt sind. Für die Leitung der Lyzeen, Oberlyzeen und Studienanstalten wird bei solchen Lehrern und Lehrerinnen, die zur Bekleidung von Oberlehrer- und Oberlehrerinnenstellen an der betreffenden Anstalt befähigt sind, die Ablegung der Rektor- bzw. Schulvorsteherinnenprüfung nicht gefordert. Leiterinnen erhalten die Amtsbezeichnung „Frau Direktorin". Die Lyzeen, Oberlyzeen und Studienanstalten unterstehen als höhere Lehranstalten der Aufsicht der Provinzialschulkollegien. Seit dem 1. Januar 1910 werden die Angelegenheiten des gesamten höheren Mädchenschulwesens wie die der höheren Knabenlehranstalten innerhalb des Ministeriums von der Unterrichtsabteilung U II bearbeitet, womit die völlige äußere Gleichwertigkeit der höheren Mädchenbildungsanstalten mit den entsprechenden Knabenanstalten durchgeführt ist. Endlich stehen die Direktoren der öffentlichen Lyzeen denen an Nichtvollanstalten, die Direktoren an öffentlichen Oberlyzeen und Studienanstalten denen an Vollanstalten für die männliche Jugend in bezug auf Rang, Titel und Besoldung gleich, während die Oberlehrer an öffentlichen höheren Bildungsanstalten für Mädchen in diesen Dingen den Oberlehrern an den öffentlichen höheren Knabenanstalten gleichgestellt sind.

Auch private Anstalten könnten die Anerkennung als Lyzeen, Oberlyzeen und Studienanstalten erlangen, wenn sie gewissen, hier von der Erörterung ausgeschiedenen Bedingungen entsprechen.

f) Einige statistische Angaben.

Aus der Statistik[1]) ergibt sich, daß im Jahre 1911/12 in Preußen die höheren Bildungsanstalten für Mädchen sich folgendermaßen gruppierten:

a) öffentliche Anstalten: 31 Studienanstalten meist realgymnasialen Charakters, 77 Oberlyzeen (Seminare), 38 Frauenschulen, 231 Lyzeen;

b) nicht öffentliche Anstalten: 4 Studienanstalten (realgymnasial), 35 Oberlyzeen (Seminare), 38 Frauenschulen, 202 Lyzeen.

Dazu kommen im ganzen noch 107 öffentliche und 231 nicht öffentliche sog. gehobene Mädchenschulen; diese Anstalten haben geringere Gliederung als die Lyzeen und unterrichten nach einem Lehrplan, der von dem Lehrplan der gehobenen Volksschule, der sog. Mittelschule für Mädchen, abweicht und höhere Anforderungen im Vergleich zur Mittelschule stellt. Diese Anstalten führen jetzt, soweit sie ihrem Unterricht die Lehrpläne vom 31. Mai 1894 oder vom 12. Dezember 1908 zugrunde

1) Vgl. E. Meyer, Jahrbuch für das höhere Mädchenschulwesen im Königreich Preußen, II. Jahrg., 1911/12, Berlin und Leipzig (Jaegersche Verlagsbuchhandlung), S. 83ff.

legen, nach dem Ministerialerlaß vom 1. Februar 1912 die Bezeichnung „höhere Mädchenschule".

Damit wären in großen Umrissen die Grundlagen der im Jahre 1908 erlassenen Neuordnung dargelegt, die, wenn auch für manchen in unerwarteter Weise, mit einem Male eine durchgreifende Gliederung des höheren Mädchenschulwesens und zugleich wenigstens erst einmal grundsätzlich dem weiblichen Geschlechte so weitgehende Vervollkommnungen seines Bildungswesens brachte, daß das Reformwerk trotz der durch die Kritik sehr bald aufgedeckten Schönheitsfehler bei allen für die ersprießliche Gestaltung der Frauenbildung begeisterten Männern und Frauen reichen Beifall fand.[1])

---

1) Vgl. hierzu u. a.: G. Bäumer, Die preußische Mädchenschulreform, Neue Bahnen, Berlin (Oehmigke) 1908, 43. Jahrg., S. 139ff. u. S. 147ff. – H. Lange, Die preußische Mädchenschulreform, Die Frau, Berlin (Moeser) 1908, 16. Jahrg. Heft 1. – H. Lange, Die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen, Internat. Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik, Berlin (Scherl), 1908, 2. Jahrg., Nr. 40. – B. Irmer, Die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen, ebenda, Nr. 41. – A. Harnack, Die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen, ebenda, Nr. 46. – Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen, Denkschrift der preußischen Zweigvereine des Allgemeinen Deutschen Lehrerinnenvereins, Berlin (Moeser) 1908. – Erklärung vom 4. Oktober 1908 des Deutschen Vereins für das höhere Mädchenschulwesen, Frauenbildung, 7. Jahrg., 1908, S. 520 und 521. – Bericht über die Versammlung des Preußischen Vereins für öffentliche höhere Mädchenschulen (6. Okt. 1908), Frauenbildung, 7. Jahrg., 1908, S. 521ff. – Erklärung des Vereins der Direktoren an preußischen öffentlichen höheren Lehranstalten für Mädchen (vom 5. Okt. 1908), ebenda, S. 526 u. 527. – Raßfeld, Die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen. Rückblick und Ausblicke, ebenda, S. 459ff. – Lohmann, Die Zukunft der einfachen höheren Mädchenschule, ebenda, S. 500ff. – Stellungnahme der Lehrerinnen zur Neuordnung der preußischen höheren Mädchenschule. – M. Martin, Zeit- nnd Streitfragen über die Mädchenbildungsreform, ebenda, S. 491ff. – Schnell, Zur preußischen Mädchenschulreform: Der Kostenpunkt, ebenda, S. 544ff. – Gaudig, Die „Neuordnung" als Gegenstand zukünftiger Meinungen, Frauenbildung, 8. Jahrg., 1909, S. 79ff. – Harnack, Zur Mädchenschulreform, ebenda, S. 3. – Keim, Aus der Südwestecke Deutschlands, ebenda, S. 8ff. – Raßfeld, Die Reform und die Städte, ebenda, S. 29ff. – Schlüter, Über die praktische Wirkung und Bedeutung der neuen Bestimmungen für das höhere Mädchenschulwesen in Preußen, ebenda, S. 453ff. u. S. 506ff. – Wychgram, Bemerkungen zu den neuen preussischen Plänen. ebenda, S. 178ff. – Bericht über die 21. Hauptversammlung des Deutschen Vereins für das höhere Mädchenschulwesen in Stettin vom 4. bis 8. Oktober 1909, Frauenbildung, 8. Jahrg., 1909, S. 549ff.; vgl. darin besonders den Vortrag von Frl. Sprengel über das Thema: Der Deutsche Verein und die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen, S. 563ff. – Elfte Generalversammlung des Allgemeinen Deutschen Lehrerinnenvereins (31. V.–1. VI. 1909), Frauenbildung, 8. Jahrg., 1909, S. 392 ff. – Erklärung des Engeren Ausschusses des Deutschen Vereins für das höhere Mädchenschulwesen, ebenda, S. 65ff. – G. Bäumer, Die Stellung der Lehrerinnen nach der Neuordnung, ebenda, S. 55ff. – G. Noodt, Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen, Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission, II, Leipzig (Teubner) 1909.

Zweiter Teil.

Die Stellung und Ausgestaltung des Unterrichts im Rechnen und in der Mathematik an den preußischen höheren Bildungsanstalten für die weibliche Jugend nach den Augustbestimmungen von 1908.

A. Das allgemeine Lehrziel.

Die Augustbestimmungen treffen folgende Vorschriften[1]:

A. Allgemeines Lehrziel:

„Der Unterricht im Rechnen und in der Mathematik hat die Aufgabe, den Schülerinnen Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen und eine auf klares Verständnis gegründete Kenntnis der Elementarmathematik zu verschaffen. Er soll ferner die Schülerinnen an folgerichtiges Denken und an eine kurze und treffende Ausdrucksweise gewöhnen.“

Den verschiedenen Anstaltstypen wurden folgende allgemeinen Zielleistungen vorgeschrieben:

I. Lyzeum.

„Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen mit bestimmten Zahlen, besonders im Kopfrechnen und in der Anwendung auf die gewöhnlichen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens, namentlich auf dem Gebiete der Hauswirtschaft und der einfachen Vermögensverwaltung. Arithmetik und Algebra bis zu den quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten. Die ebene Geometrie bis zur Lehre von der Berechnung des Umfangs und des Inhalts des Kreises. Berechnung von Oberfläche und Inhalt der einfachen Körper.

II. Oberlyzeum.

Arithmetik und Algebra bis zur Lehre von den komplexen Zahlen und den Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten.

Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten. Planimetrie bis zur Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen. Ebene Trigonometrie, Stereometrie mit Berücksichtigung der mathematischen Grundlagen des projektivischen Zeichnens Die Grundlagen der analytischen Geometrie der Ebene.

Außerdem für die Seminaristinnen Anleitung zur Erteilung von Rechen- und Raumlehreunterricht.

III. Studienanstalt.

Oberrealschulkurse. Arithmetik und Algebra bis zur Lehre von den komplexen Zahlen, den Gleichungen dritten Grades und den wichtigeren unendlichen Reihen. Planimetrie bis zur Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen und von den Ähnlichkeitspunkten. Ebene Trigonometrie. Stereometrie. Die Kegelschnitte in synthetischer und analytischer Behandlung. Von der sphärischen Trigonometrie nur so viel, als für das Verständnis der mathematischen Geographie erforderlich ist.

Realgymnasiale Kurse. Die Lehrziele sind dieselben, wie bei den Oberrealschulkursen, jedoch sind die Kegeschnitte nur analytisch zu behandeln.

---

1) Vgl. Schöppa, Das Mädchenschulwesen in Preußen, Leipzig (Dürr) 1909, S. 167 u. 168.

Gymnasiale Kurse. Arithmetik und Algebra bis zur Lehre von den komplexen Zahlen und den Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Der binomische Lehrsatz. Planimetrie, ebene Trigonometrie und Stereometrie wie im Oberlyzeum. Einfache Sätze von den Kegelschnitten.

Zu diesen Bestimmungen muß schon hier die Bemerkung gemacht werden, daß besonders die für das Oberlyzeum und die Studienanstalt getroffenen Festsetzungen nichts von etwaiger Berücksichtigung moderner Reformgedanken verraten.

B. Rechnen.

1. Die Lehraufgaben im Rechnen. — Die sich auf den Rechenunterricht beziehenden methodischen Bemerkungen.

a) Die Stoffverteilung auf die einzelnen Klassen.

Genauere Einsicht in die für den Rechenunterricht getroffene Stoffverteilung gewährt die Zusammenstellung der Lehraufgaben für die einzelnen Klassen. Sie bezieht sich naturgemäß allein auf das Lyzeum und lautet[1]):

Klasse X bis VIII. Je drei Stunden wöchentlich.

Kopfrechnen mit reinen Zahlen und leichte Anwendungen dazu in allmählich erweiterten Zahlenkreisen bis zur Zahl 1000. Schriftliches Rechnen innerhalb der vier Grundrechnungsarten mit gleichbenannten (unbenannten) und verschieden benannten ganzen Zahlen im maßvoll erweiterten Zahlenraum. Leichte Dreisatzaufgaben und leichte Aufgaben aus der Zeitrechnung.

Klasse VII. 3 Stunden wöchentlich.

Die Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen, benannten und unbenannten. Die deutschen Längen- und Flächenmaße, Gewichte und Münzen mit Anwendungen. Übungen in der dezimalen Schreibweise und in den einfachsten dezimalen Rechnungen. Umrechnungen in höhere und niedere Einheiten. Leichte Dreisatzaufgaben.

Klasse VI. 3 Stunden wöchentlich.

Weitere Übungen im Rechnen mit benannten Dezimalzahlen. Die deutschen Körpermaße. Teilbarkeit der Zahlen. Das größte gemeinschaftliche Maß und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen. Die gemeinen Brüche. Der einfache Dreisatz durch Schluß auf die Einheit oder auf ein gemeinschaftliches Maß.

Klasse V. 3 Stunden wöchentlich.

Dezimalbruchrechnung. Einfache und zusammengesetzte Dreisätze mit ganzen Zahlen und Brüchen. Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben, namentlich aus der Prozent- und Zinsrechnung, auch einfache Flächen- und Körperberechnungen. Wiederholung gelöster Aufgaben unter Verwendung von Buchstaben statt bestimmter Zahlen und Auswertuug von Buchstabenausdrücken durch Einsetzung bestimmter Zahlen.

Über diese Stoffeinteilung darf wohl im allgemeinen gesagt werden, daß sie den im Laufe der Zeit für den Rechenunterricht auch an Knabenschulen für zweckmäßig gehaltenen Grundsätzen entspricht und daß sie im großen und ganzen die Forderung erfüllt, den für irgendeine Klasse festzusetzenden Lehrstoff so auszuwählen, daß auf Grund der früheren Pensen die Möglichkeit ausreichenden Verständnisses bei den Schülerinnen vorliegt.

---

1) Vgl. Schöppa, S. 172 und 173.

b) Charakterisierung der Anforderungen und gewisse Bedenken.

Die Zusammenfassung der Pensenangabe für die Unterstufe in einem einzigen Abschnitt ist gleichfalls zu billigen, da gerade hier die Freiheit in der Anordnung des Lehrstoffs sehr erwünscht ist. Die Hauptsache bleibt eben, daß am Ende des dritten Schuljahres im Kopfrechnen den Plänen gemäß der Zahlenkreis von 1 bis 1000 in allen vier Grundoperationen mit hinreichender Sicherheit von den Schülerinnen beherrscht wird, und daß sie darüber hinaus mit größeren Zahlen, die sich in vernünftigen Grenzen halten, schriftlich zu rechnen verstehen. Gerade der Keim des Rechnens in der untersten Klasse kann auf recht verschiedene Weise mit Erfolg zur Entfaltung gebracht werden, und eine gewisse Unbequemlichkeit für manche Lehrkräfte würde zweifellos vorliegen, wenn für jede einzelne der drei Unterklassen auch die oberen Grenzen der zu bewältigenden Zahlenkreise festgelegt wären. Die einen werden lieber zunächst einmal im Zahlenkreise 1 bis 20 alle vier Operationen (Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren) vornehmen und üben, um dann im zweiten Schuljahre in entsprechender Weise im Zahlengebiet bis 100 vorzugehen. Andere, denen der Zahlenkreis von 1 bis 20 schon für die Übungen in den untersten Klassen zu enge Grenzen zieht, werden zuerst dem Addieren und Subtrahieren im Zahlenkreise 1 bis 100 die ganze Zeit in der untersten Klasse widmen und das Multiplizieren und Dividieren für das zweite Schuljahr zurückstellen. Ob für das dritte Schuljahr nicht der Aufstieg in den über 1000 hinaus erweiterten Zahlenraum etwas zu straffe Anforderungen an die Leistungsfähigkeit der Schülerinnen stellt, mag zum mindesten zweifelhaft bleiben. Es ließe sich meines Erachtens mit gutem Grunde die Meinung rechtfertigen, daß es vollauf genügen würde, wenn mit Abschluß der Unterstufe jede Schülerin schriftlich wie mündlich bis 1000 gut und sicher rechnen kann. Die Erweiterung über 1000 hinaus könnte ruhig der folgenden Klasse (VII) überlassen bleiben, die wegen der größeren Sicherheit der Schülerinnen in den vorangehenden Pensen auch eine raschere und bessere Vornahme der genannten Erweiterung gestattet. Des weiteren halte ich es für einen positiven Fortschritt gegenüber dem Lehrplan vom 31. Mai 1894, daß klar und deutlich die Dezimalbruchrechnung, abgesehen von den aus praktischen Gründen empfehlenswerten Vorübungen in der Dezimalschreibweise (Klasse VII und VI), hinter die gemeinen Brüche gestellt ist. Auf diese Art kann die gemeine Bruchrechnung als unentbehrliches, wertvolles Hilfsmittel bei der Begründung der Verfahrungsweisen in der Dezimalbruchrechnung herangezogen werden.

Ernste Bedenken können sich im wesentlichen nur gegen die Stoffzumessung für Klasse V richten. Da liegt entschieden ein Zuviel vor; aber auch der Beschaffenheit nach ist die Stoffzusammensetzung zu verschiedenartig. Ich weiß sehr wohl, daß gerade das an letzter Stelle Aufgeführte: „Wiederholung gelöster Aufgaben unter Verwendung von Buchstaben statt bestimmter Zahlen und Anwendung von Buchstabenausdrük-

ken durch Einsetzung bestimmter Zahlen" mit der Anschauung zusammenhängt, daß der Rechenunterricht die natürliche Grundlage für den ihm folgenden mathematischen Unterricht abgeben soll. Aber auf diese Weise bereitet man auf jener Stufe, wo man es mit elf- bis zwölfjährigen Mädchen zu tun hat, für die Mathematik nur mäßig vor. Die Schülerinnen erblicken in den Buchstaben zunächst nichts Notwendiges und können daher zum größten Teile den Zweck, warum sie plötzlich auf der Bildfläche erscheinen, nicht begreifen. Daraus aber entspringt nur zu leicht eine bedenkliche Abneigung gegen die Sache und, statt der Mathematik vorzuarbeiten, hat man ihr, allerdings ungewollt, entgegengearbeitet. Man soll alles zu seiner Zeit treiben und vor allen Dingen die nötige Aufnahmefähigkeit für solche den Schülerinnen völlig neuen Dinge abwarten. Unendlich viel besser bereitet man dem eigentlichen Mathematikunterricht den Boden, wenn man von unten auf im Rechenunterricht, gleichviel ob beim Kopfrechnen oder schriftlichen Rechnen, jede einzelne Schülerin, und zwar ganz besonders die Schwächlinge, zum klaren Denken und zur genauen Wiedergabe des Gelernten anhält. Im Rechenunterricht darf eben kein Schematisieren, kein bloßes Operieren nach erlernten Regeln Platz greifen, sondern in jedem Augenblicke muß jede einzelne Schülerin zeigen können, daß sie alles, was bei der Lösung einer einfachen oder schwierigeren Aufgabe erforderlich ist, auch wirklich ganz sicher und klar erfaßt hat. Ein solches Gefühl der Sicherheit erlangen aber die Schülerinnen, wenn sie sich auf Grund eines mit Liebe zur Sache erteilten, geschickt aufgebauten Unterrichts in die durch nichts zu tilgende Überzeugung eingelebt haben, daß in Wirklichkeit alles, was der Rechenunterricht bietet, leicht zu erfassen ist. Dieses Grundgefühl ist auch dem mathematischen Unterricht gegenüber nicht zu entbehren. Wo es nicht besteht, da werden andauernd Schwierigkeiten selbst bei den einfachsten Anlässen gewittert und, anstatt daß der Unterricht in lebendigen Fluß kommt, stellt sich eine Hemmung nach der anderen ein.

c) Die amtlichen methodischen Bemerkungen zum Lehrplan.

Durch die letzten Überlegungen ist unsere Betrachtung schon in das methodische Fahrwasser gelangt. Wäre es da nicht richtiger gewesen, wir hätten zunächst einmal die von der Regierung in den „methodischen Bemerkungen" zu dem Lehrplan gegebenen Äußerungen zur Kenntnis genommen? Wir wollen es sofort nachholen.

Wir lesen[1]):

„Der Rechenunterricht erstrebt Sicherheit und Geläufigkeit im Rechnen mit bestimmten Zahlen. Besonders das Kopfrechnen ist zu pflegen. Auf allen Stufen gehen Übergangsaufgaben, die nur im Kopfe zu lösen sind und daher in kleinen Zahlen gegeben werden, den schriftlichen Aufgaben voran. Dabei sind die Schülerinnen zu gewöhnen, die gegebenen Zahlen festzuhalten, damit rasch zu rechnen und die bekannten Rechenvorteile zu benutzen. Aufgaben mit zu großen Zahlen, ebenso begriff-

1) Vgl. Schöppa, S. 168 u. 169.

lich verwickelte Aufgaben sind auch vom schriftlichen Rechnen auszuschließen. Die Kenntnis der Münzen, Maße und Gewichte, von denen naturgemäß die deutschen an erster Stelle zu berücksichtigen sind, ist durch die Anschauung zu vermitteln. Ebenso ist die Bruchrechnung möglichst anschaulich zu gestalten; es empfiehlt sich, die Schülerinnen zunächst mit Bruchteilen wie mit benannten Zahlen rechnen zu lassen. Der Einführung in eine jede Rechnungsart folgen unmittelbar eingekleidete Aufgaben als Anwendungen; diese sind den verschiedenen Gebieten des bürgerlichen Lebens zu entnehmen unter besonderer Berücksichtigung der im Anschauungskreis der Mädchen liegenden Verhältnisse und der vielseitigen Anforderungen, welche die wirtschaftliche Tätigkeit an die gebildete Frau stellt.

Der Rechenunterricht hat auch die Aufgabe, den arithmetischen Unterricht vorzubereiten; er ist demnach so einzurichten, daß er mit diesem sachlich und auch bezüglich der anzuwendenden Fachausdrücke im Einklang steht. Wo es ohne Schwierigkeit geschehen kann, wird man auch die Regeln, die man aus bestimmten Aufgaben hergeleitet hat, durch Buchstaben ausdrücken und dadurch das Verständnis für die Möglichkeit der Rechnung mit allgemeinen Zahlen zu wecken suchen.

Der selbständige Rechenunterricht findet zwar in der Klasse V seinen Abschluß; die Sicherheit im Rechnen ist aber in den folgenden Klassen bis zum Ende der Schulzeit durch fortgesetzte Übungen, zu denen der mathematische Unterricht reichlich Gelegenheit bietet, zu erhalten und zu vermehren."

Es würde nicht im Sinne dieser Arbeit liegen, wenn man bei der kritischen Prüfung dieser methodischen Bemerkungen zu sehr ins Einzelne gehen würde. Nur das sei betont, daß zweifellos manches leicht in solche summarischen Zusammenfassungen verflochten wird, was an sich selbstverständlich für jede Lehrkraft ist, die es mit dem Unterricht und den Schülerinnen ernst meint. Auch ist manches andere wieder an sich strittig, unterliegt den wechselnden pädagogischen Anschauungen und gehört darum wohl nicht zu dem, was amtlich festgelegt werden sollte. Drittens aber kann in mehr oder minder kurz gefaßten methodischen Bemerkungen leicht etwas ausgelassen werden, was gerade auch im Hinblick auf die derzeitige Beschaffenheit der Lehrbücher und ein gewisses Herkommen der Erwähnung im warnenden Sinne wert gewesen wäre. Dahin gehört meines Erachtens die Forderung, den Rechenunterricht als solchen zu vereinfachen durch Ausscheidung aller der Dinge (z. B. aus der Mischungsrechnung, Gesellschaftsrechnung, Zinsrechnung, Bewegungsaufgaben u. dgl.), die sich ungezwungen nur durch praktische Anwendung von Gleichungen lösen lassen, aber den Schülerinnen viel Kopfzerbrechen machen, wenn sie als reine Rechenaufgaben behandelt werden sollen.

Im übrigen verweise ich betreffs der Methodik des Rechenunterrichts auf den schon von Lietzmann[1]) an anderer Stelle gegebenen Bericht, dessen Inhalt sich mutatis mutandis auf die höheren Mädchenschulen übertragen läßt. Auch sei in diesem Zusammenhange hingewiesen auf einige Werke, die ebenfalls dort angeführt sind und willkommene Gelegenheit zur Orien-

1) Vgl. W. Lietzmann, Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preußen, diese IMUK-Abhandlungen, Leipzig (Teubner) 1909, Bd. I, Heft 1. – Vgl. auch W. Lietzmann, Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland, diese IMUK-Abhandlungen, Leipzig (Teubner) 1912, Bd. V, Heft 1.

tierung über Fragen der Methodik bieten. Es sind das die Werke von H. Gehrig[1]), A. Pabst[2]), W. Wetekamp[3]), G. Kerschensteiner[4]), A. Schülke[5]), F. Reidt[6]), M. Simon[7]), A. Höfler[8]).

d) Vergleich mit den Anforderungen der sechsstufigen Knabenrealschulen.

Am Schluß der Betrachtung über den Rechenunterricht möchte ich noch mit einigen Worten eingehen auf einen Vergleich der Verhältnisse an den Lyzeen mit denen an den Knabenrealschulen. Nach den für die Realschulen geltenden Lehrplänen von 1901 hat die Realschule, sofern der Plan D_1 zum Vergleich herangezogen wird, für den eigentlichen Rechenunterricht der Klassen VI, V, IV einen Lehrstoff vorgeschrieben erhalten, der sich im wesentlichen mit dem der Lyzeen in den Klassen VII, VI, V deckt. Für die Realschule tritt dann in III noch das kaufmännische Rechnen hinzu, das an den Lyzeen außer Betracht bleibt. Während aber die Realschule für die Erledigung der Pensen von VI bis IV einschließlich mindestens insgesamt elf Wochenstunden zur Verfügung hat, muß das Lyzeum sich für die Bewältigung des gleichen Stoffs mit nur neun Wochenstunden begnügen, oder anders ausgedrückt, die Realschule kann im Rechnen über rund 440 Unterrichtsstunden, das Lyzeum nur über rund 360 Unterrichtsstunden verfügen. Darin liegt mit Rücksicht auf den Umstand, daß die Mädchen es im Rechnen ebenso wenig an einer tüchtigen Fertigkeit im späteren Leben fehlen lassen dürfen wie die Knaben, ein bedeutender Ausfall an Unterrichtszeit auf Seiten des Lyzeums. Schon aus diesem Grunde allein ist – von anderen in der weiblichen Eigenart liegenden Ursachen ganz zu schweigen – das allgemeine Verlangen nach Vermehrung der Rechenstunden am Lyzeum ohne weiteres als berechtigt anzuerkennen, und zwar nicht nur für die Klassen VII, VI, V, sondern auch für die Unterstufe, wo doch zu allererst ein auskömmliches Zeitmaß für gründliche technische Übungen im Rechnen vorhanden sein muß. Seit dem Erscheinen der preußischen Neuordnung ist denn auch bisher der Ruf nach der vierten Rechenstunde nicht verstummt, und zu wünschen bleibt nur, daß man sich diesem nicht aus einer einseitigen

1) H. Gehrig, Methodik des Volks- und Mittelschulunterrichts; II. Bd.: Die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer. Leipzig (Teubner) 1906.

2) A. Pabst, Praktische Erziehung, Leipzig (Quelle & Meyer).

3) W. Wetekamp, Selbstbetätigung und Schaffensfreude in Erziehung und Unterricht, 2. Aufl., Leipzig (Teubner) 1910.

4) G. Kerschensteiner, Grundfragen der Schulorganisation, 2. Aufl., Leipzig (Teubner) 1910.

5) A. Schülke, Aufgabensammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie, I. Teil, 1906; 2. Teil, 2. Aufl., Leipzig (Teubner) 1910.

6) F. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen, 2. Aufl. von H. Schotten, Berlin (Grote) 1906.

7) M. Simon, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik, 2. Aufl., München (C. H. Beck) 1908.

8) A. Höfler, Didaktik des mathematischen Unterrichts, Leipzig (Teubner) 1910.

Fachkultur entspringenden Wunsche, den vielmehr die Notlage geboren hat, an maßgebender Stelle nicht lange mehr verschließen möge[1]).

Wenn man den Mädchen weniger Rechnen zumuten will als den Knaben, so soll man nicht die Stundenzahl einschränken, sondern den Stoff. Man hat es aber umgekehrt gemacht.

2. Die Durchführung der Lehrplanvorschriften für den Rechenunterricht in der Praxis.

a) Proben aus den Jahresberichten.

Die Jahresberichte der Lyzeen geben alljährlich Auskunft über die in den einzelnen Klassen durchgenommenen Lehrstoffe der verschiedenen Fächer. Da die Lehrpläne nun einmal in fester Form vorgeschrieben sind, so ist es nicht zu erwarten, daß sich erhebliche Abweichungen von den Lehrplänen finden lassen. Das wird mir durchaus bestätigt durch die mir zugegangenen Jahresberichte von Lyzeen, die Ostern 1912 erschienen sind. Die Aufführung der Lehrstoffe schließt sich meist eng an den Wortlaut der amtlichen Bestimmungen an, ist aber häufig noch ausführlicher. Man erkennt daraus z. B. für den wirklichen Lehrgang, wie er etwa auf der Unterstufe eingehalten wird, den Einzelaufbau. Als Beleg gebe ich folgendes Beispiel (Königin Luise-Lyzeum zu Tilsit, 51. Jahrgang, 1912, S. 43, 41, 39, 35):

Klasse X:

Sommerhalbjahr: Zahlenkreis 1—10. Auffassen der Zahlen, Zuzählen, Abziehen, Zerlegen und Ergänzen. Malnehmen, Teilen und Enthaltensein.

Winterhalbjahr: Zahlenkreis 1—20. Einführung, Zuzählen und Abziehen ohne Überschreiten der 10, dann mit Überschreiten der 10 und beides im Wechsel. Zerlegen und Ergänzen der Zahl. Malnehmen und Teilen. Jahre und Monate. Dutzend und Stück, Mandel und Stück. Das Einmaleins mit zwei, auch in Form des Enthaltenseins und Teilens. — Zahlenkreis 1—100. Einführung. Zuzählen und Abziehen der Grundzahlen ohne Überschreiten des Zehners. Zuzählen und Abziehen unter Berücksichtigung der Einmaleinsreihen. Tage und Stunden. Monate und Tage. Schock und Stück. Stunden, Minuten, Sekunden.

Klasse IX.

Die vier Grundrechnungsarten im Zahlenkreise 1—100. Das kleine Einmaleins

Sommerhalbjahr: Wiederholung und Befestigung des Pensums aus Klasse X. Addieren und Subtrahieren. Reihenbildung als Vorbereitung auf das Einmaleins. Das Einmaleins mit 1—6, Enthaltensein, Teilen. Die Zahl 100: Mark und Pfennig, Meter und Zentimeter, Hektoliter und Liter.

Winterhalbjahr: Wiederholung und Befestigung des Pensums aus dem ersten Halbjahr. Das ganze kleine Einmaleins. Enthaltensein (Messen) und Teilen mit und ohne Rest, Malnehmen und Teilen auch außerhalb des kleinen Einmaleins. Halbe

1) Vgl. dazu: Den Bericht über die Stettiner Verhandlungen des Deutschen Vereins für das höhere Mädchenschulwesen, Frauenbildung, 8. Jahrg., 1909, S. 549ff. — Ferner: E. Meyer, Neue Vorschläge zur Umgestaltung des Rechenunterrichts an den höheren Mädchenschulen, Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Jahrg. XVII, 1911, S. 152ff. — F. Möhle, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht an den preußischen Lyzeen, Oberlyzeen und Studienanstalten nach der Neuordnung von 1908, Schriften des DAMNU, Heft 15, Leipzig und Berlin (Teubner) 1913, S, 7ff.; vgl. überdies die dort angeführte Literatur.

und Viertel. Verwandlung ganzer Zahlen in Brüche zur Anwendung und Befestigung des kleinen Einmaleins.

Klasse VIII.

Sommerhalbjahr: Das Numerieren bis 1000. Die vier Spezies mit Grundzahlen, reinen Zehnern und reinen Hunderten, im Zahlenkreise von 1—1000. Addition und Subtraktion mit gemischten Zehnern und Hunderten, Multiplikation und Division mit einstelligen Zahlen.

Winterhalbjahr: Erweiterung des Zahlenraums bis 10000. Die vier Spezies innerhalb dieser Grenze, zwei und dreistellige Multiplikatoren und Divisoren. Numerieren bis 1000000. Leichte Dreisatzaufgaben und leichte Aufgaben aus der Zeitrechnung. Die Zahl 1000: Kilometer und Meter, Kilogramm und Gramm. Die römischen Ziffern von 1—100. Während des ganzen Jahres Befestigung des Zahlenraumes von 1—100.

Klasse VII.

Das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen. Zwölf Klassenarbeiten.

Sommerhalbjahr: Abschluß der vier Grundrechnungsarten mit ganzen unbenannten Zahlen. Die deutschen Münzen, Längen- und Flächenmaße mit Anwendung. Übungen in der dezimalen Schreibweise. Währungszahl 100.

Winterhalbjahr: Die Währungszahl 1000 (Gewichte). Übungen in den einfachsten dezimalen Rechnungen. Umrechnungen in höhere und niedere Einheiten. Leichte Dreisatzaufgaben.

Klasse VI.

Das Rechnen mit Dezimalzahlen und gemeinen Brüchen. Leichte Dreisatzaufgaben. Zwölf Klassenarbeiten.

Sommerhalbjahr: Das dezimale-, Münz-, Maß- und Gewichtssystem, insbesondere die Flächen und Körpermaße. Einführung in die gemeinen Brüche. Verwandlung ganzer und gemischter Zahlen in unechte Brüche und umgekehrt. Zerlegung der Zahlen in ihre Grundfaktoren. Die Teilbarkeit der Zahlen. Das größte gemeinschaftliche Maß und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Das Erweitern und Kürzen.

Winterhalbjahr: Addieren und Subtrahieren gleich- und ungleichnamiger Brüche. Multiplizieren und Dividieren a) mit ganzen Zahlen, b) mit Brüchen und gemischten Zahlen. Der einfache Dreisatz durch Schluß auf die Einheit oder auf ein gemeinschaftliches Maß.

Klasse V.

Dezimalbrüche. Rechnungsarten aus dem bürgerlichen Leben. Zwölf Klassenarbeiten.

Sommerhalbjahr: Einführung in die Dezimalbruchrechnung. Erweiterung des dezimalen Zahlensystems nach unten. Erweitern, Kürzen und Gleichnamigmachen. Addition und Subtraktion. Multiplikation und Division, zunächst mit dekadischen, dann mit nichtdekadischen ganzen Zahlen und mit Dezimalbrüchen und umgekehrt. Der einfache und zusammengesetzte Dreisatz mit ganzen Zahlen und Brüchen.

Winterhalbjahr: Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben, namentlich aus der Prozent- und Zinsrechnung, auch einfache Körper- und Flächenberechnung. Wiederholung gelöster Aufgaben unter Verwendung von Buchstaben statt bestimmter Zahlen und Auswertung von Buchstabenausdrücken durch Einsetzung bestimmter Zahlen.

Meist allerdings sind die Lehrstoffaufzählungen wesentlich kürzer gehalten; nicht selten finden sich in ihnen aber auch noch weitere Einzelheiten, so z. B. für Klasse IX: die Uhr; für Klasse VII: Papiermaße; für Klasse V: Gewinn-, Verlust-, Tararechnung, Rabatt- und Diskontrechnung, Gesellschaftsrechnung, Mischungsrechnung.

Über den zweifelhaften Wert, den einige der letztgenannten Stoffe für den Rechenunterricht haben, äußerte ich mich vorher schon. Dem Rechnen, was des Rechnens ist! Alles andere aber in die Mathematik!

b) Formen und Zweck der schriftlichen Arbeiten.

Aus den Lehrstoffübersichten erhellt ferner noch die Stellung der einzelnen Anstalten und Kollegien zu der Art und Zahl der schriftlichen Arbeiten. Da sind in der Hauptsache zwei Typen von Arbeiten zu unterscheiden: Haus- und Klassenarbeiten. Die häuslichen Arbeiten können den Charakter von Übungsarbeiten tragen, die, nicht zu lang bemessen, meistens in das Rechenkladdeheft eingetragen werden. Aufgegeben werden sie vielfach von einer Stunde zur andern und dann am Fälligkeitstage in der Klasse geprüft. Daneben bestehen auch häusliche Reinschriftarbeiten, die in ein Reinschriftheft eingetragen und am Fälligkeitstage eingeliefert werden. Die Schülerinnen erhalten sie zu gegebener Zeit nachgesehen und beurteilt zurück. Bei den zu Hause angefertigten Arbeiten soll natürlich besonders auch der Sinn der Schülerinnen für saubere Anfertigung und gute Schrift hervortreten. Mir scheint, daß diese Forderung, richtig verstanden, ebenfalls für alles gelten sollte, was in die Kladde geschrieben wird. Gerade den Mädchen erweist man eine Wohltat für das ganze Leben, wenn man ihnen die oft nicht zur Genüge beachtete Forderung, daß die Handschrift nicht vernachlässigt werden darf, zu etwas ganz Selbstverständlichem macht.

Endlich werden, wie auch in andern Fächern, im Rechnen Klassenarbeiten angefertigt. Darunter sind nicht die Übungen in der Lehrstunde, soweit sie schriftlich ausgeführt werden, zu verstehen, sondern meist in Reinschrifthefte geschriebene, in der Klasse unter Aufsicht der zuständigen Lehrkraft angefertigte Arbeiten, die abgegeben und später nach Durchsicht beurteilt zurückgegeben werden. Oft bearbeiten alle Schülerinnen dieselben Aufgaben, oft werden die Schülerinnen in mindestens zwei Gruppen geteilt, denen verschiedene Aufgaben von gleicher Schwierigkeit gestellt werden, wodurch die Selbständigkeit bei der Anfertigung geschützt werden soll. Betreffs der Zahl dieser Klassenarbeiten, die ein wesentliches Hilfsmittel zur Kennzeichnung des jeweiligen Klassenstandpunktes abgeben, schwanken die Festsetzungen nach den Anstalten und den Klassenstufen. Im allgemeinen geht das Bestreben jetzt wohl dahin, zumal nach nach dem Erlaß des preußischen Unterrichtsministers vom 21. Oktober 1911 betreffs des Extemporale, die Häufigkeitsziffer der Klassenarbeiten etwas herabzusetzen. Dabei muß allerdings beachtet werden, daß man auf der Unter- und Mittelstufe schon im Interesse der noch recht jugendlichen Schülerinnen die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Klassenarbeiten liegende Zeitspanne nicht zu groß werden lassen darf.

c) Veranschaulichungsmittel im Rechenunterricht.

Im Klassenunterricht bringt sich die Forderung, schon in den untersten Klassen recht anschaulich zu unterrichten, durch Benutzung praktischer Hilfsapparate (Rechenmaschinen, Rechenkasten) und anderer Hilfsmittel (Stäbchen, Kugeln, Bohnen) zur Geltung. In den folgenden Klassen kommt die Anschauung dann immer wieder zu ihrem Rechte,

wenn Maße, Gewichte, Münzen den Schülerinnen wirklich gezeigt werden, soweit das möglich ist. Auch empfiehlt es sich, in den Klassenzimmern an geeigneten Stellen das Meter, Quadratmeter mit den Unterteilungen gemalt anbringen zu lassen[1]).

d) Beziehung des Rechenunterrichts zum späteren mathematischen Unterricht.

Die Aufgabe, dem arithmetischen Unterricht die naturgemäße Vorstufe zu sein, kann der Rechenunterricht zum guten Teile schon dadurch erfüllen, daß überall, wo Regeln, Sätze u. dgl. den Schülerinnen zur Einprägung aufgegeben werden, vor allen Dingen die Fassung im Wortlaut durchaus einwandfrei gewählt wird und im übrigen so knapp und genau ausfällt, daß eine restlose logische Erschöpfung des Gedankeninhalts erreicht wird. Wenn der Rechenunterricht jede Aussage so zu fassen sucht, daß sie sozusagen dem Gedankeninhalt entsprechend ein Maximalproblem, der sprachlichen Einkleidung nach zugleich ein Minimalproblem darstellt, dann ist nicht nur für den mathematischen, sondern auch für den deutschen Unterricht etwas überaus Wertvolles erreicht.

3. Die Rechenbücher.

Auf Grund der Durchsicht einer größeren Zahl von diesjährigen Osterprogrammen von Lyzeen aller Teile der preußischen Monarchie habe ich einen Einblick zu gewinnen versucht, welche Rechenbücher zurzeit dem Rechenunterricht zu Grunde gelegt werden. Fast 200 solcher Jahresberichte sind durchgesehen worden, nämlich alle, die mir auf Grund des Programmaustausches, an dem sich die von mir geleitete Anstalt beteiligt, augenblicklich zur Verfügung standen. Da das Ergebnis der Prüfung für die Fachkreise eine gewisse Bedeutung haben dürfte, teile ich es mit. Hinter dem Titel gebe ich die prozentuale Gebrauchsziffer an, die dem betreffenden Buche an den Lyzeen zukommt. Dieser Prozentsatz gibt, was ich ausdrücklich betone, keinen unbedingten Maßstab dafür ab, an wie vielen Anstalten das betreffende Werk überhaupt in Gebrauch ist, sondern besagt nur, wie stark seine Verwendung an solchen preußischen Lyzeen ist, die über ihre Organisation und die an ihnen verwendeten Lehrmittel irgendwelche Berichte herausgeben. Da mir im übrigen die Berichte der meisten Lyzeen zugänglich gewesen sind, so fürchte ich keine allzu große Unsicherheit in meinen Angaben. Es sind in Gebrauch:

1) Becker und Paul, Rechenbuch für Mädchenschulen, bearb. von Hess Frankfurt a./M. (Auffahrt), 2,50 Proz.; 2) Böhme-Gaeding-Weidenhammer, Rechenbuch, Heft 1–6, 3,00 Proz.; 3) Hamburger Schulrechenbuch T. 1, 2, 3, herausgegeben von der Gesellschaft der Freunde des vaterländischen Schul- und Erziehungswesens, Hamburg (Selbstverlag), 0,50 Proz.; 4) Hecht, Rechenbuch für höhere Mädchenschulen, Heft 1–6, Bielefeld (Velhagen & Klasing), 29,30 Proz.; 5) Heinze-Hübner,

1) Vgl. W. Lietzmann, diese IMUK-Abhandlungen, 1910, Bd. I, Heft 2, S. 38; ferner 1912, Bd. V, Heft 1 und Bd. V, Heft 2.

Rechenbuch, Ausg. A, 7 Hefte, Breslau (Goerlich), 0,50 Proz.; 6) Hellermann-Krämer-Schanz, Übungsbuch für Rechnen und Mathematik, Berlin (Oemigke), 4,55 Proz.; 7) Hentschel & Költzch, Aufgaben zum Ziffernrechnen, Ausg. A, Heft 1–3, 0,50 Proz.; 8) Hessenbruch, Rechenbuch für höhere Mädchenschulen, Berlin (Salle), 1,50 Proz.; 9) Hügemeyer & Riethmüller, Rechenbuch, Düsseldorf (Schwann), 0,50 Proz.; 10) Kauer & Salzbacher, Rechenbuch für höhere Mädchenschulen, in 6 Heften, Heuser (Neuwied), 0,50 Proz.; 11) Meyer und Braun, Rechenbücher für höhere Mädchenschulen, Heft 1–6, Münster (Aschendorff), 6,05 Proz.; 12) Möhle-Sewening, Rechenbuch für höhere Mädchenschulen, Heft 1–6, Breslau (Hirt), 2,50 Proz.; 13) Müller und Schmidt, Rechenbuch für höhere Mädchenschulen, Leipzig (Teubner), 18,70 Proz.; 14) Noodt-Wrampelmeyer, Rechenbuch, Ausg. B, Bielefeld (Velhagen & Klasing), 1,50 Proz.; 15) Otto, Rechenbuch für höhere Mädchenschulen, Heft 1–7, Breslau (Hirt), 12,60 Proz.; 16) Räther-Petri-Wohl, Rechenwerk, Ausg. D, Neubearbeitung, Heft 1–8, Breslau (Morgenstern), 5,55 Proz.; 17) Richter und Grönings, Rechenbuch für Volksschulen, bearb. von Mundt, Heft 1 u. 2, Cöln (Schmitz), 0,50 Proz.; 18) Reinemann und Pfundt, Rechenbuch, Heft 1 u. 2, Heuser (Neuwied), 0,50 Proz.; 19) Schellens, Aufgabenbuch zum Gebrauch im Rechenunterricht, bearb. von Pötter und Passavanti, Ausg. C, Heft 1, 2, 3, Münster (Coppenrath), 1,00 Proz.; 20) Seele, Rechenbuch für höhere Mädchenschulen, bearb. von Päschke und Rausch, Heft 1–6, Berlin-Wilmersdorf (Krakau), 5,55 Proz.; 21) Vogels Rechenbuch für die Vorschule, neue Ausg. von Vogel und Splettstösser, Heft 1 u. 2, Berlin (Trowitzsch), 1,00 Proz.; 22) Wolter-Lemcke, Rechenbuch für höhere Mädchenschulen, Heft 1–6, Potsdam (Stein), 1,00 Proz.

In manchen Fällen lag auch schon eine Bemerkung vor, daß der Ersatz des bislang gebrauchten Buches durch ein anderes beantragt werden solle. Indessen glaube ich, daß hier nicht der Ort ist, auf diesen Punkt näher einzugehen, zumal die Gründe für eine derartige Entschließung sich jeder Erörterung entziehen müssen.

4. Die am Rechenunterricht beteiligten Lehrkräfte.

Von Bedeutung erschien mir eine Feststellung darüber, wie der Rechenunterricht an den verschiedenen Anstalten auf die verfügbaren Lehrkräfte verteilt ist. An den Lyzeen unterrichten bekanntlich recht viele verschiedene Arten von Lehrkräften; nämlich außer dem Leiter oder der Leiterin können dort beschäftigt sein akademisch vorgebildete Oberlehrer, seminaristisch vorgebildete Oberlehrer, wissenschaftliche Hilfslehrer, Probekandidaten, ordentliche Lehrer (einschl. Gesang- und Zeichenlehrer), Lehrer, Oberlehrerinnen, ordentliche Lehrerinnen, Elementarlehrerinnen, technische Lehrerinnen, Hilfslehrerinnen, Schulamtsbewerberinnen. Ich habe versucht, festzustellen, in welchem Verhältnis zurzeit die einzelnen Gruppen an der Erteilung des Rechenunterrichts beteiligt sind. Zu dem Zwecke untersuchte ich wiederum an der Hand der diesjährigen Osterjahresberichte auf Grund der in ihnen enthaltenen Stundenverteilungsübersichten für das Winterhalbjahr 1911/12, wer den Rechenunterricht in den einzelnen Klassen gibt. Im ganzen zog ich zur Prüfung 120 Jahresberichte heran. Es stellte sich heraus, daß unter 620 Lehrkräften, die an 2700 Rechenstunden beteiligt waren, 55 Oberlehrer, 18 Oberlehrerinnen, 9 wissenschaftliche Hilfslehrer sowie 201 seminaristisch vor-

gebildete Lehrer mit und ohne Mittelschulprüfung, 255 ordentliche und Elementarlehrerinnen und 82 Hilfslehrerinnen gezählt wurden, also 82 Lehrpersonen mit akademischer Vorbildung und 538 Lehrpersonen mit seminaristischer Vorbildung, oder 13,2 Proz. Akademiker und 86,8 Proz. Nichtakademiker. Unter den Akademikern stellen zurzeit noch die Oberlehrer die überwiegende Mehrzahl, unter den Nichtakademikern dagegen überwiegen die Lehrerinnen. Das erklärt sich natürlich durch die starke Tätigkeit, die den Damen im Unterricht auf der Unterstufe, die hier mitgezählt ist, zufällt. Nach der Mittelstufe hin und auf ihr findet schon eine Verschiebung zugunsten der Lehrer statt.

Die vorstehenden Zahlen beanspruchen selbstredend nicht, mathematisch genau die im Winterhalbjahr 1911/12 vorhandenen Zahlenverhältnisse zu erschöpfen. Das könnte nur der Fall sein, wenn sämtliche Jahresberichte aller preußischen Lyzeen hätten untersucht werden können. Die zahlenmäßige Feststellung habe ich in mehreren Absätzen so weit fortschreiten lassen, bis sich durch noch weitere Hinzunahme neuer Berichte keine nennenswerten Änderungen in der relativen Gruppierung mehr ergaben. Deswegen kann immerhin die Meinung vertreten werden, daß die obigen Zahlen die augenblickliche Lage hinreichend genau wiedergeben. Jedenfalls kann somit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an den Lyzeen der Rechenunterricht die sachgemäße Grundlage des späteren mathematischen Unterrichts wird, nur dann einen annehmbaren Wert erhalten, wenn bei den nichtakademischen Lehrkräften sorgfältig auf eine zweckentsprechende Fachausbildung hingearbeitet wird.

Der Vollständigkeit halber sei noch angeführt, daß unter den hier aufgeführten Lehrkräften mit akademischer Vorbildung auch einige enthalten sind, deren Fachausbildung auf ganz anderer Seite zu liegen scheint als gerade im Rechnen. Mehrfach kam folgende Verbindung in der Stundenverteilung vor: Religion, Deutsch, Geschichte, Erdkunde, Rechnen. Wird das berücksichtigt, so fällt der Prozentsatz der eigentlichen Mathematiker, die Rechenunterricht geben, noch kleiner als angegeben aus.

C. Mathematik.

1. Die Lehraufgaben für den mathematischen Unterricht.

Die Lehraufgaben für den mathematischen Unterricht sind durch die Lehrpläne in folgender Weise vorgeschrieben (s. S. 56 u. 57).[1])

2. Vergleich mit den Zielforderungen in der Mathematik an den entsprechenden höheren Knabenschulen.

Um ein Urteil zu gewinnen, inwieweit die Bildungsanstalten für die weibliche Jugend mit ihrer mathematischen Ausbildung an diejenige der Knabenanstalten heranreichen, muß man die Lehrpläne wenigstens in der

1) Vgl. Schöppa, S. 173ff., doch sind in der von mir gegebenen Anordnung die Lehraufgaben nebeneinander geordnet worden.

Hauptsache mit einander vergleichen. Dabei soll abgesehen werden von einem Vergleich der einzelnen Klassenstufen und nur unter Zugrundelegung der Pläne für die Knabenanstalten festgestellt werden, welche für die Knabenschulen vorgeschriebenen Lehrgebiete an den Mädchenanstalten fehlen oder wesentlich knapper zu behandeln sind.

a) Lyzeum und Knabenrealschule.

Das Lyzeum tritt in Parallele zur sechsstufigen Realschule. Von den Stoffen der Realschule finden sich im Plan des Lyzeums nicht: Grundlegung der Goniometrie, einfache Dreiecksberechnungen; Anwendungen der Algebra auf Geometrie, Konstruktionsaufgaben mit algebraischer Analysis, Lehre von den Logarithmen. Ferner soll augenscheinlich die Stereometrie, die Ähnlichkeitslehre, die Lehre der Potenzen und Wurzeln und die Lehre von den quadratischen Gleichungen auf der Realschule eine erheblich ausgiebigere Behandlung erfahren. Die Realschule hat für die vier Jahre von der Klasse IV bis zur Klasse I einschließlich im ganzen nach dem Plane D_1[1]) 20 Stunden zur Verfügung, wovon für den Rechenunterricht in IV und III drei Stunden in Abzug gebracht werden können. Den dann übrig bleibenden 17 Stunden stehen dem Lyzeum für die Bewältigung seiner Lehraufgaben 12 Stunden gegenüber. Rechnet man – was ich auf Grund meiner zwölfjährigen Erfahrung an einer Oberrealschule für angemessen halte – auf die Stoffe, die die Realschule über die Aufgaben des Lyzeums hinaus oder noch mehr vertiefend zu behandeln hat, volle drei Stunden, also 120 Lehrstunden, so bleibt das Lyzeum immer noch mit zwei Stunden, d. h. 80 Lehrstunden, im Rückstande. Es ergiebt sich somit ganz unzweideutig, daß die dem Lyzeum zugebilligte Unterrichtszeit für die Mathematik viel zu knapp bemessen ist, und daß der Erfolg des Mathematikunterrichts an den Lyzeen so lange nicht genügend gesichert ist, als nicht die Stundenzahl eine angemessene Erhöhung erfährt.

b) Gymnasiale Kurse und Knabengymnasium.

Wenn wir uns jetzt zu den weiterführenden Bildungsanstalten wenden, so seien zuerst die gymnasialen Kurse betrachtet. Ihnen steht auf der Knabenseite das humanistische Gymnasium gegenüber. In den Lehraufgaben sind über die Stoffe der gymnasialen Kurse hinausgehend noch verzeichnet: Die Kombinatorik und ihre nächstliegenden Anwendungen auf die Wahrscheinlichkeitslehre sowie die Anwendung der Algebra auf die Geometrie und die Behandlung von Konstruktionsaufgaben mit algebraischer Analysis. Der für das Knabengymnasium gemachte Zusatz, daß in der Stereometrie auch ihre Anwendung auf die mathematische Erd- und Himmelskunde zu berücksichtigen ist, gilt meines Erachtens, obwohl für

1) Vgl. Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen in Preußen von 1901, Halle (Buchhandlung des Waisenhauses) 1912, S. 7.

Lyzeum	Oberrealschulkurse
Klasse IV. 3 Stunden wöchentlich. Addition, Subtraktion und Multiplikation mit allgemeinen Zahlen. Positive und negative Zahlen. Einfache Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Übungen im Zahlenrechnen im Anschluß an den mathematischen Lehrstoff, hier und in allen folgenden Klassen. Einführung in die Planimetrie durch vielfache Übung mit Lineal, Maßstab, Winkelmesser und Zirkel, Feststellung der Ergebnisse in Form von Erklärungen und Lehrsätzen. Allmählicher Übergang in die streng logische Beweisführung. Die wichtigsten Eigenschaften des Dreiecks.	
Klasse III. 3 Stunden wöchentlich. Division und Bruchrechnung mit allgemeinen Zahlen. Zerlegung in Faktoren. Gleichungen ersten Grades, besonders eingekleidete Gleichungen. Erweiterung der Dreieckslehre, Dreieckskonstruktionen mit Benutzung von Hilfsdreiecken und geometrischen Örtern. Lehre von den Parallelogrammen und vom Trapez.	
Klasse II. 3 Stunden wöchentlich. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten. Graphische Darstellung der Funktion ersten Grades. Die einfachsten Sätze der Proportionslehre. Kreislehre. Gleichheit geradlinig begrenzter Figuren (Pythagoreischer Lehrsatz). Ausmessung geradliniger Figuren.	*Klasse V. 4 Stunden wöchentlich.* Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Proportionen. Ausziehen der Quadratwurzel aus bestimmten Zahlen. Leichte Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten. Kreislehre. Gleichheit und Ausmessung geradlinig begrenzter Figuren.
Klasse I. 3 Stunden wöchentlich. Ausziehen der Quadratwurzel aus bestimmten Zahlen. Einfache Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten. Graphische Lösung der quadratischen Gleichung. Proportionalität von Strecken. Die Gleichheit der Seitenverhältnisse bei Dreiecken, die in zwei Winkeln übereinstimmen. Die regelmäßigen Vielecke. Ausmessung des Umfangs und Inhalts des Kreises. Berechnung des Inhalts und der Oberfläche einfacher Körper.	*Klasse IV. 5 Stunden wöchentlich.* Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Übungen im Rechnen mit Logarithmen. Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten. Leichtere Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Ähnlichkeitslehre. Proportionalität von Linien am Kreise. Die regelmäßigen Vielecke. Ausmessung des Umfangs u. des Inhalts des Kreises. Trigonometrie. Berechnung von Dreiecken und Vielecken.
Oberlyzeum. *Klasse III. 4 Stunden wöchentlich.* Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Gleichungen zweiten Grades. Ähnlichkeitslehre. Proportionalität von Linien am Kreise. Konstruktionsaufgaben, namentlich solche mit algebraischer Analysis.	*Klasse III. 5 Stunden wöchentlich.* Gleichungen zweiten Grades mit zwei und mehreren Unbekannten. Arithm. Reihen erster Ordnung. Geom. Reihen. Zinzeszins- und Rentenrechnung. Fortsetzung trigonometrischer Rechnungen. Stereometrie unter Berücksichtigung der wichtigsten Elemente der Projektionslehre. Berechnung von räumlichen Gebilden. Harmonische Punkte und Strahlen, Transversalen, Chordalen, Ähnlichkeitspunkte, -achsen.
Klasse II. 4 Stunden wöchentlich. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinzeszins- und Rentenrechnung. Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Einiges über harmonische Punkte und Strahlen sowie über Transversalen. Trigonometrie. *Klasse I. 4 Stunden wöchentlich.* Wiederholender Aufbau des arithmetischen Lehrganges (Erweiterung des Zahlenbegriffs durch die algebraischen Operationen von der ganzen positiven bis zur komplexen Zahl). Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten. Stereometrie. Ergänzungen, Zusammenfassungen und Übungen aus dem Gesamtgebiet des mathematischen Schulunterrichts. Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte. Im *vierten Jahre* Methodik des Unterrichts und Einführung in die Literatur des Faches. In den wissenschaftlichen Übungen die Grundlehren der analytischen Geometrie der Ebene.	*Klasse II und I. Je 5 Stunden wöchentlich.* Gleichungen dritten Grades. Kombinatorik und ihre Anwendungen. Binomischer Lehrsatz für beliebige Exponenten und die wichtigeren unendlichen Reihen. Größte und kleinste Werte. Wiederholender Aufbau des arithmetischen Lehrgangs (Erweiterung des Zahlenbegriffs durch die algebraischen Operationen von der ganzen positiven bis zur komplexen Zahl). Konstruktionen, besonders solche mit algebraischer Analysis. Die Kegelschnitte in synthetischer und analytischer Behandlung. Sphär. Trigonom., soweit sie zum Verständnis der mathem. Geographie erforderlich ist. Ergänzungen, Zusammenfassungen und Übungen aus dem Gesamtgebiete des mathem. Schulunterrichts, auch an der Hand größerer Aufgaben, die rechn. und zeichn. durchgeführt werden. Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosoph. Gesichtspunkte.

Realgymnasiale Kurse	Gymnasiale Kurse

Klasse IV. 4 Stunden wöchentlich. Division und Bruchrechnung mit allgemeinen Zahlen, Zerlegung in Faktoren. Gleichungen ersten Grades, besonders eingekleidete Aufgaben.

Erweiterung der Dreieckslehre. Dreieckskonstruktionen mit Benutzung von Hilfsdreiecken und geometrischen Örtern. Lehre von den Parallelogrammen und vom Trapez.

Klasse V. 4 Stunden wöchentlich. Gleichungen ersten Grades mit zwei und mehreren Unbekannten. Graphische Darstellung der Funktion ersten Grades. Die einfachsten Sätze der Proportionslehre. Ausziehen der Quadratwurzel aus bestimmten Zahlen. Leichte Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Kreislehre. Gleichheit und Ausmessung geradlinig begrenzter Figuren.

Realgymnasiale Kurse	Gymnasiale Kurse
Klasse IV bis I. Je 4 Stunden wöchentlich. Die Lehraufgaben in den Klasen IV bis I der realgymnasialen Kurse sind dieselben, wie die in den Oberrealschulkursen, mit der durch die geringere Stundenzahl gebotenen Beschränkung innerhalb der einzelnen Unterrichtsstoffe und unter Fortfall des bei den allgemeinem Lehrziel genannten Kapitels.	*Klasse IV. 3 Stunden wöchentlich.* Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Übungen im Rechnen mit Logarithmen. Ähnlichkeitslehre. Die regelmäßigen Vielecke. Ausmessung des Umfangs und des Inhalts des Kreises.
	Klasse III. 3 Stunden wöchentlich. Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Proportionalität von Linien am Kreise. Transversalen. Harmonische Punkte und Strahlen. Trigonometrie. Berechnung von Dreiecken.
	Klasse II und I. Je 3 Stunden wöchentlich. Arithmetische Reihen erster Ordnung. Geometrische Reihen. Zinzeszins- und Rentenrechnung. Binomischer Lehrsatz für ganze positive Exponenten. Wiederholender Aufbau des arithmetischen Lehrgangs (Erweiterung des Zahlenbegriffs durch die algebraischen Operationen von der ganzen positiven bis zur komplexen Zahl). Stereometrie. Grundlehren von den Kegelschnitten. Ergänzungen, Zusammenfassungen und Übungen aus dem Gesamtgebiet des mathematischen Schulunterrichts, auch an der Hand größerer Aufgaben, die rechnerisch und zeichnerisch durchgeführt werden. Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte.

die gymnasialen Kurse der Mädchen nicht besonders ausgesprochen, doch auch für diese, da in der Klasse I aller Arten von Studienanstalten in der Erdkunde mathematische Geographie zu behandeln ist. Ohne mathematische Vorkenntnisse dürfte dabei nicht viel Erfreuliches herauskommen. Wie man sieht, stimmen im großen und ganzen die Zielforderungen in der Mathematik für die gymnasialen Einrichtungen auf der Knaben- und Mädchenseite überein. Den Knabenanstalten stehen nun für die Erledigung des ganzen Mathematikpensums von IV bis O I, also für sieben Jahre insgesamt 26 Stunden zur Verfügung, wovon für den Rechenunterricht in IV noch zwei Stunden abgesetzt werden mögen, so daß dann noch 24 verbleiben. Den gymnasialen Kursen der Mädchen stehen insgesamt von Klasse IV des Lyzeums bis zum Abschluß der obersten Gymnasialklasse der Studienanstalt 23 Stunden zur Verfügung, wovon wegen des schon mit der Klasse V des Lyzeums erfolgenden Abschlusses im Rechnen für dieses Fach keine Stunden mehr abzusetzen sind. Die eine den Mädchen fehlende Stunde fällt in Anbetracht der oben angeführten Penseneinschränkung nicht stark in die Wagschale, und die Gesamtunterrichtszeit für die Mathematik könnte an den gymnasialen Kursen unter der Voraussetzung, daß die Stundenzahl an den Knabengymnasien als hinreichend angesehen werden könnte[1]), gleichfalls als ausreichend gelten.

c) Realgymnasiale Kurse und Knabenrealgymnasium.

In dem Plan des Realgymnasiums der Knaben findet man folgende Gegenstände, die nicht in den Lehraufgaben der realgymnasialen Kurse der Mädchen vertreten sind: Darstellende Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung; ferner sollen in den realgymnasialen Kursen für Mädchen die Kegelschnitte nur analytisch behandelt werden. Im übrigen stimmen die Pläne stofflich gut überein, ohne daß eine genau übereinstimmende Verteilung der einzelnen Kapitel auf die einzelnen Klassenstufen durchgeführt ist. Die Gesamtstundenzahl am Knabenrealgymnasium beträgt für die sieben Jahre von IV bis O I 34 Stunden; davon gehen für den Rechenunterricht in IV wieder zwei Stunden ab, und es verbleiben für die Erledigung der rein mathematischen Dinge 32 Stunden. An den realgymnasialen Kursen der Mädchen findet man unter Einrechnung der drei Stunden für die Klasse IV des Lyzeums nur 27 Stunden. Bei annähernd gleicher Zielhöhe findet man ein Weniger von fünf Stunden, d. h. von 200 Unterrichtsstunden, zu Ungunsten der Mädchen, was außerordentlich bedenklich ist. Man sollte meinen, daß ganz abgesehen von dem vorher erwähnten kleinen Unterschied in den Lehrplänen das für die Knaben angesetzte Stundenquantum als ein ausreichendes gewählt ist. Wenn das zutrifft, liegt bei den Mädchen eine starke Benachteiligung vor, es sei denn, daß man in den Mädchenkursen im einzelnen bei der tatsächlichen Durchführung

1) Das ist jedoch nicht der Fall; es werden erhebliche Einwendungen gegen die Einschnürung des mathematischen Unterrichts in der Unter- und Obertertia gemacht.

der Lehrpläne noch manche Dinge als für die ganze Ausbildung weniger wichtig streicht oder die Mädchen in nicht zu verantwortender Weise überanstrengt.

d) Oberrealschulkurse und Knabenoberrealschule.

Die Knabenoberrealschule endlich hat ja einen Lehrplan, der im wesentlichen mit dem des Realgymnasiums übereinstimmt. Vermöge der größeren Stundenzahl kann aber bestimmungsgemäß die Oberrealschule je nach den Verhältnissen entweder das arithmetische Pensum durch die Behandlung der allgemeinen Lehre von den Gleichungen sowie der Methoden zur angenäherten Lösung numerischer algebraischer und transzendenter Gleichungen oder das geometrische durch die Weiterführung der darstellenden, synthetischen oder analytischen Geometrie noch mehr vertiefen und ausbauen. Ein ähnlicher Zusatz findet sich in den schon mitgeteilten Bestimmungen für die Mädchenoberrealschulkurse nicht. Die Knabenoberrealschule geht also in der Tat um einiges weiter im Unterricht der Mathematik. An Stunden verfügt die Knabenoberrealschule für die sieben Jahre von IV bis O I über 37; davon gehen ab die zwei Rechenstunden in IV, während noch wieder hinzukommen die etwa zwei Stunden für den propädeutischen geometrischen Anfangsunterricht in V. Die Mädchen, welche in die Oberrealschulkurse gehen und dort nach den Bestimmungen das Pensum der realgymnasialen Kurse in umfassenderer Art unter Hinzutritt der synthetischen Behandlung der Kegelschnitte sich aneignen sollen, haben in sieben Jahren im ganzen 30 Stunden zur Verfügung, wobei die sechs Stunden für Klasse IV und Klasse III des Lyzeums mitgezählt sind. Also auch hier ergibt die angestellte Überlegung den beträchtlichen Ausfall von sieben Stunden zum Nachteile der Mädchen, der zum Teil allerdings, aber nicht ganz durch das niedriger eingestellte Maß der Zielforderungen bei den Mädchen ausgeglichen wird. Immerhin aber bleiben die Mädchen auch dann noch in recht ungünstiger Lage, da nach meiner Oberrealschulerfahrung zur Bewältigung der Mehrleistungen durchaus nicht sieben Stunden, d. h. 280 Unterrichtsstunden, nötig sind.

e) Oberlyzeum.

Es bleibt noch das Oberlyzeum zu besprechen, zu dem wir unter den höheren Knabenanstalten kein eigentliches Gegenstück haben. Seine Zielleistungen in der Mathematik sind denen der gymnasialen Kurse ähnlich; aber die analytische Geometrie ist beim Oberlyzeum in das vierte Jahr, in die Seminarklasse, verlegt worden. Die Stundenzahl des Oberlyzeums beträgt für die sieben Jahre von Klasse IV des Lyzeums bis zur Klasse OL I des Oberlyzeums einschließlich 24 Stunden, denen die 23 Stunden der Gymnasialschülerinnen und die 24 der Gymnasiasten gegenüberstehen. Die Gymnasiastinnen behandeln vermöge der höheren Stundenzahl in den ersten Jahren eine Reihe von Gebieten schon ein Jahr früher

als die Schülerinnen des Oberlyzeums, denen allerdings in den letzten Jahren ihre höhere Stundenzahl wieder etwas zu gute kommt.

3. Die methodischen Bemerkungen zu den mathematischen Plänen der Mädchenanstalten.

a) Die amtliche Fassung.

Die Augustbestimmungen bringen auch für den mathematischen Unterricht eine ganze Reihe methodischer Bemerkungen, die hier im Wortlaut wiedergegeben sein mögen[1]):

„Die wichtigste Aufgabe des mathematischen Unterrichts besteht in einer Schulung des Geistes, welche die Schülerinnen befähigt, die erworbenen Anschauungen und Kenntnisse in selbständiger Arbeit richtig anzuwenden. Auf allen Gebieten dieses Lehrfachs ist daher klares Verständnis, feste Aneignung des Verfahrens und Sicherheit in der Anwendung zu erzielen. Den Schülerinnen soll je nach ihrer geistigen Reife unausgesetzt Gelegenheit zu selbständiger Arbeit gegeben werden; allzu reichlich dargebotene Hilfe untergräbt leicht das Zutrauen in die eigene Kraft.

Wie jeder andere Unterricht, so muß auch der mathematische sich die Pflege der Sprache angelegen sein lassen. Jede Weitschweifigkeit ist zu vermeiden; doch darf das Streben nach Kürze nicht zu Sprachwidrigkeiten im mündlichen oder schriftlichen Ausdruck führen. Auch auf sorgfältige Schrift und auf saubere Ausführung der Zeichnungen ist mit Nachdruck zu halten.

Der arithmetische Unterricht ist, wie er durch den Rechenunterricht vorbereitet wird, mit diesem auch stets in enger Verbindung zu erhalten. Die Arithmetik soll als eine Verallgemeinerung des Rechnens mit bestimmten Zahlen und als eine Zusammenfassung beliebiger Sonderfälle in gemeinsamen Formeln erscheinen. Daher empfiehlt es sich auch, umgekehrt die allgemeine Formel unter Ersatz der Buchstaben durch bestimmte Zahlen auf einzelne Fälle anzuwenden.

Bei der Einführung in die Buchstabenrechnung ist möglichst anschaulich zu verfahren und insbesondere auch die graphische Darstellung zu benutzen, um den algebraischen Ausdruck dem Verständnis der Schülerinnen näher zu bringen. Auch im weiteren Verlaufe des Unterrichts, bei der Erklärung negativer Größen, bei der Einführung in die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, bei der Auflösung der verschiedenen Arten von Gleichungen usw. ist von der graphischen Darstellung unter Anwendung eines Koordinatensystems ausgiebiger Gebrauch zu machen. Hierzu kann den Schülerinnen die Benutzung des Millimeterpapiers empfohlen werden. Mit solchen graphischen Darstellungen leben sich die Schülerinnen allmählich auch in den Funktionsbegriff ein.

Auf das Lösen von Gleichungen ist besondere Sorgfalt zu verwenden. Gleichungen einfachster Art werden bereits in den ersten Wochen des arithmetischen Unterrichts im Zusammenhang mit diesem behandelt. Auch später bilden sie einen Hauptbestandteil des Übungsstoffes. Dabei ist Wert darauf zu legen, daß die Schülerinnen die einzelnen Umformungen nicht mechanisch, sondern mit Verständnis vornehmen. Gekünstelte Aufgaben, deren Lösung sich nicht aus der Anwendung allgemeiner Methoden folgerichtig ergibt, sind auszuschließen, ebenso solche, bei denen Verhältnisse des geschäftlichen Lebens, des Handels und der Technik verwendet werden, die dem Verständnis der Schülerinnen fern liegen.

Umständlichere Rechnungen, wie Divisionen mit längeren Polynomen, das Ausziehen von Wurzeln aus Polynomen und dergleichen, sind nur in beschränktem Maße und nur insoweit zulässig, als sie zur Aufklärung der zu erörternden arithmetischen Methoden beitragen können.

---

1) Vgl. Schöppa, S. 168ff.

Der erste geometrische Unterricht soll induktiver Art sein. Durch reichliche Übungen im Zeichnen, an denen die ganze Klasse zu beteiligen ist, sind die Schülerinnen in die geometrischen Anschauungen und in die Handhabung von Lineal und Zirkel einzuführen. Die gewonnenen Ergebnisse werden in die Form von Lehrsätzen und Konstruktionsaufgaben gekleidet. Das mechanische Erlernen von Definitionen ist zu vermeiden oder doch auf das unbedingt Notwendige zu beschränken. Mit deduktiven Beweisen sollen erst dann Versuche gemacht werden, wenn im Laufe des Unterrichts das Verständnis dafür bei den Schülerinnen erkennbar geworden ist. Der streng systematische Aufbau des Pensums des untersten Jahrgangs ist erst bei der Wiederholung herzustellen. Die Behandlung schwierigerer Fragen, namentlich solcher, welche die Grundlagen der Geometrie betreffen, muß den obersten Klassen des Oberlyzeums und der Studienanstalt vorbehalten bleiben.

Der Lehrstoff in der Geometrie ist in jeder Klasse auf die für den Aufbau des Lehrgebäudes unentbehrlichen Sätze zu beschränken, damit für die Anwendungen ein reichlich bemessener Teil des Schuljahres übrig bleibt. Einer Erweiterung des Lehrstoffs in Form von Übungsaufgaben steht nichts entgegen. Den (meist indirekten) Beweisen der Umkehrungen von Lehrsätzen viel Zeit zu widmen, empfiehlt sich nicht; wichtiger ist es, in den Schülerinnen die Erkenntnis zu wecken, daß die Umkehrungen in den Hauptsätzen bereits enthalten sind. Der Nachweis von Sätzen, deren Richtigkeit sich aus der unmittelbaren Anschauung ergiebt, bildet namentlich in den oberen Klassen keinen anregenden Stoff für eine ausführliche Beweisführung und ist deshalb möglichst kurz zu erledigen (z. B. eine Reihe von Sätzen aus der Stereometrie).

Bei der ersten Durchnahme des Stoffes ist von der heuristischen Lehrweise, bei der der Lehrsatz als Ergebnis der Untersuchung erscheint, ausgiebig Gebrauch zu machen.

Sachgemäße Zeichnungen in richtiger und sauberer Ausführung bilden in allen Klassen ein wesentliches Förderungsmittel des Unterrichts. Schraffierungen, Farben und dergleichen sind oft geeignet, die Übersichtlichkeit zu erhöhen. Skizzenhafte Zeichnungen sind nur da zuzulassen, wo besondere, in der Sache liegende Rücksichten sie rechtfertigen.

Ein breiter Raum ist auf allen Stufen den Anwendungen unter möglichster Selbstbetätigung der Schülerinnen zu widmen. Soweit es sich dabei um Konstruktionen handelt, sind die Aufgaben so zu wählen, daß sie sich eng an den Lehrgang anschließen und daß ihre Lösung keine besonderen Kunstgriffe erfordert, sondern nach allgemeinen Methoden erfolgen kann. So weit als möglich, auch schon auf der untersten Stufe, sind die Aufgaben an konkrete Vorkommnisse anzuschließen, um den Schülerinnen auch die praktische Verwendbarkeit der Mathematik zum Bewußtsein zu bringen und ihren mathematischen Sinn durch die Anwendungen zu üben. In den oberen Klassen werden besondere Beispiele aus der Naturlehre berücksichtigt. Auch die umfangreichen deduktiven Herleitungen physikalischer Gesetze können den Mathematikstunden zugewiesen werden.

Bei dem Auffinden der Lösung muß den Schülerinnen so viel Zeit und Freiheit gelassen werden, daß in ihnen das Bewußtsein selbständigen Könnens und der Trieb zum freiwilligen Weiterarbeiten geweckt und gefördert werden.

Ein wesentliches Mittel, die Gewandtheit im Auffinden von Lösungen zu steigern, ist die Kenntnis gewisser Formeln, Lehrsätze und Konstruktionen, die bei Aufgaben immer wieder zur Anwendung kommen; es ist daher notwendig, diesen Besitz von der untersten Stufe an zu begründen und zu befestigen.

Bei den Konstruktionsaufgaben ist auf die Determination Wert zu legen. Die Betrachtung der Änderungen, welche die geometrischen Gebilde durch Größen- oder Lagenänderung einzelner Teile erleiden, sowie die Behandlung von Grenzfällen, von größten und kleinsten Werten und dergleichen bieten ein weiteres Mittel, in den Funktionsbegriff einzuführen.

Die Trigonometrie wird zunächst anschaulich, also geometrisch behandelt. Mit der Auflösung von Aufgaben ist zu beginnen, sobald die ersten und notwendigsten

Begriffe festgelegt sind. Auf Umformungen geometrischer Ausdrücke, die keine unmittelbare Anwendung finden, und auf allzu schwierige Rechnungen ist zu verzichten.

Von der sphärischen Trigonometrie wird nur das behandelt, was für das Verständnis der mathematischen Erd- und Himmelskunde erforderlich ist. Es steht nichts entgegen, die betreffenden Lehrsätze an die Behandlung der dreiseitigen Ecke anzuschließen.

Die mathematische Behandlung der funktionalen Beziehungen bildet keinen besonderen Stoff des Schulunterrichts; es soll aber in der Algebra wie in der Geometrie jede Gelegenheit auch außer den bereits erwähnten Fällen benutzt werden, die Schülerinnen in diese Art des mathematischen Denkens einzuführen, um dadurch das Verständnis zu erleichtern, das Interesse zu beleben und den Unterricht zu vertiefen.

Für die Lehrgänge im Oberlyzeum und in den drei Zweigen der Studienanstalt ist wegen der ungleichen Anzahl der zugewiesenen Unterrichtsstunden teilweise eine Verschiedenheit der Lehraufgaben geboten; doch ist darauf zu achten, daß der Lehrgang auch bei einer geringeren Stundenzahl sich als ein lückenloses Ganzes darstellt."

b) Einige charakteristische Züge der „Bemerkungen".

Diesen regierungsseitig den Lehrplänen beigegebenen methodischen Bemerkungen lassen sich verschiedenartige charakteristische Züge abgewinnen.

Alle die Stellen zunächst, die sich darauf beziehen, daß klares Verständnis zu erzielen sei, daß auf irgendwelche besondere Kapitel bei der Durchnahme besondere Sorgfalt zu verwenden sei, daß in der Algebra die Umformungen von den Schülerinnen nicht mechanisch, sondern mit Verständnis vorgenommen werden sollen, daß die Trigonometrie anschaulich begonnen werden soll u. a. m., sind nach meinem Empfinden auf solche Lehrkräfte gemünzt, für deren pädagogische Betätigung besondere Hinweise zeitweise nötig sein können. Für diese Lehrkräfte würden derartige Fingerzeige aber besser von geeigneten Stellen ihrer Anstalt, also mehr intern, ausgehen können, als von der höchsten Instanz selbst; denn mit Hinweisen der bezeichneten Art ist nur etwas schwarz auf weiß zum Ausdruck gebracht, was für gute Lehrer, die ihren Unterricht völlig auf die Fassungskraft der Schülerinnen einstellen, ganz selbstverständlich ist und daher für sie ebenso gut gar nicht gesagt zu werden brauchte.

Eine andere Seite der methodischen Bemerkungen ist aber um so wertvoller, weil sie uns zeigt, von welchem Geiste die Regierung den mathematischen Unterricht an den höheren Mädchenanstalten getragen wissen will, und das ist die Gesamtheit der Stellen, die sich anschließen an die vielseitigen Bestrebungen, die es im Sinne der zu Meran und Stuttgart gefaßten Beschlüsse der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte abgesehen haben auf eine zeitgemäße Reform des mathematischen Unterrichts überhaupt.

4. Der Einfluß der modernen Reformbestrebungen auf die Gestaltung der Lehrpläne.

a) Allgemeine Vorbemerkungen.

Hiermit sind wir an einem Punkte angelangt, der im Rahmen unserer Betrachtung einer, wenn auch nur kurzen Würdigung bedarf.

Mit Beginn dieses Jahrhunderts faßte bei uns in Deutschland eine Bewegung Wurzel, die immer weiter um sich griff und von Jahr zu Jahr neue Anhänger gewann. Es war die Reformbewegung im mathematischen Unterricht. Auf die Vorgeschichte dieser Bewegung einzugehen, würde zu weit führen; es ist das auch schon deshalb nicht notwendig, weil von anderer Seite, nämlich von Schimmack[1]), eine ausführliche, zusammenhängende Darstellung über die Ursprünge der Reformbestrebungen und ihre weitere Entfaltung gegeben worden ist. Aber für unsere Zwecke muß dasjenige aus der Reform herausgehoben werden, was für die höheren Mädchenschulen von Interesse und Bedeutung ist.

Als die Biologen auf der Hamburger Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte im Jahre 1901 ihre bekannten Hamburger Thesen[2]) zur Hebung des biologischen Unterrichts einbrachten und den Erfolg hatten, daß ihre Leitsätze zwei Jahre später auf der Versammlung in Cassel[3]) Gegenstand einer eingehenden Erörterung wurden, schloß diese Verhandlung damit, daß die Gesellschaft auf Anregung von F. Klein beschloß, die Hamburger Thesen einstimmig anzunehmen mit dem Vorbehalt, die Gesamtheit der Fragen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts bei nächster Gelegenheit zum Gegenstand einer umfassenden Verhandlung zu machen.

Schon ein Jahr später folgten in Breslau[4]) die ausführlichen Berichte von K. Fricke über die allgemeine Lage des mathematisch- naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen seit der Schulreform von 1900, von F. Merkel über die Biologie, von F. Leubuscher über schulhygienische Fragen und von F. Klein ein besonderer Bericht über den mathematischen und physikalischen Unterricht. Bei diesem Anlaß setzte sich F. Klein im Sinne seiner erst kurz zuvor veröffentlichten Abhandlung: „Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen"[5]) dafür ein, dem geometrisch gefaßten Funktionsbegriff die Zentralstelle im ganzen mathematischen Unterricht anzuweisen und in logischer Konsequenz

1) Vgl. dazu: R. Schimmack, Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland, diese IMUK-Abhandlungen Bd. III, Heft 1, Leipzig (Teubner) 1911.

2) Vgl. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, 73. Versammlung zu Hamburg, 22.–28. September 1901, Teil II_1, Leipzig (Vogel) 1902, S. 274ff.

3) Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, 75. Versammlung zu Cassel, 20.–26. September 1903, Teil I, Leipzig (Vogel) S. 145ff. Abgedruckt in: Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, Gesamtbericht, herausgegeben von A. Gutzmer, Leipzig (Teubner) 1908, S. 1ff.

4) Vgl. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, 76. Versammlung zu Breslau, 18.–24. September 1904, Teil I, Leipzig (Vogel) 1905, S. 107. Abgedruckt im Gesamtbericht von Gutzmer, S. 19ff.

5) Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen, Vorträge, herausgegeben von F. Klein und E. Riecke, Leipzig (Teubner) 1904, S. 1ff.

dieses Grundgedankens die grundlegenden Anfänge der Differential- und Intregalrechnung in den Lehrplan aller höheren Schulen aufzunehmen.

b) Die Breslauer Unterrichtskommission und ihre Meraner Vorschläge.

Die Breslauer Versammlung setzte unter Billigung der vorgetragenen Gedanken eine besondere „Unterrichtskommission" ein, die unter dem Vorsitz von A. Gutzmer in den folgenden Jahren die den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht betreffenden Verhältnisse auf das eingehendste erörterte[1]) und in ihrem der 77. Naturforscherversammlung zu Meran[2]) vorgelegten Bericht zunächst einmal Vorschläge für die Gestaltung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts an den neunstufigen höheren Knabenanstalten machte. Bei dieser Reform[3]) sollte es sich in der Hauptsache darum handeln, den mathematischen Unterricht durch Voranstellung der anschaulichen Momente und praktische Übung des Zeichnens, Messens und numerischen Rechnens so zu gestalten, daß eine lebendige Fähigkeit zur selbständigen Handhabung des mathematischen Apparates herauskommt, wobei die logische Seite in keiner Weise vernachlässigt, aber doch erst im Laufe des Unterrichts und allmählich hervorgekehrt werden soll. Zu dem Zwecke bringen die Meraner Vorschläge eine neue Homogenisierung des ganzen mathematischen Lehrbetriebes unter besonderer Betonung der Notwendigkeit, die Schüler von unten herauf mehr und mehr zur Fähigkeit der Erfassung aller möglichen Arten von Abhängigkeitsbeziehungen, oder wie auch wohl gesagt wird, zum funktionalen Denken anzuleiten. Das kann geschehen durch ausgiebige Heranziehung der graphischen Darstellung. Als Ziel schwebt den Meraner Vorschlägen der Gedanke vor, unter Ausscheidung aller irgendwie gekünstelten Dinge aus dem Lehrstoff auf allen höheren Schulen in naturgemäßer Weise bis zur Schwelle der Differential- und Integralrechnung hinzuleiten, soweit sie bei akademischen Studien vorausgesetzt werden müssen.

c) Die Stuttgarter Vorschläge für den mathematischen Unterricht an den höheren Mädchenschulen.

In dem zweiten, im Jahre 1906 der Stuttgarter Versammlung[4]) erstatteten Berichte befaßte sich die Kommission u. a. mit dem mathematisch-

1) Über die Zusammensetzung der Kommission vgl. R. Schimmack, diese IMUK-Abhandlungen Bd. III, Heft 1, S. 28 und den Gesamtbericht von Gutzmer, S. 93ff.

2) Vgl. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. 77. Versammlung zu Meran, 24.–30. September 1905, Teil I, Leipzig (Vogel) 1906, S. 142ff. Abgedruckt im Gesamtbericht von Gutzmer, S. 104ff. und S. 115ff.

3) Vgl. dazu auch J. Schröder: „Verhandlungen beim Göttinger Ferienkurs (Ostern 1906) über die Reform des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen. Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht, XXXVII, S. 564, Leipzig (Teubner) 1906.

4) Vgl. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, 78. Versammlung in Stuttgart, 16.–22. September 1906, Teil I, Vogel (Leipzig) 1907, S. 27ff. – Abgedruckt im Gesamtbericht von Gutzmer S. 147ff.

naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Mädchenschulen. Obgleich im Besonderen für den mathematischen Unterricht, der ja bis dahin noch an diesen Anstalten fehlte, praktische Erfahrungen nicht vorlagen, nahm die Kommission doch schon Stellung zu den Plänen, die dem Vernehmen nach die Grundlage der Beratungen in der Berliner Januarkonferenz von 1906 gewesen sein sollten. Unter Billigung der Einrichtung von Lyzeen und Oberlyzeen, an denen auch der eigentliche mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht hinsichtlich seiner Bedeutung für die gebildete Frau zur Geltung kommen müßte, erklärte die Kommission, daß für die Lyzeen die Zielhöhe und das Zeitmaß der mathematischen Leistungen an den sechsklassigen Realschulen, für die Oberlyzeen in entsprechender Weise die Zielforderungen und Zeitbemessung der entsprechenden Formen der neunklassigen höheren Knabenanstalten maßgebend sein müßten. Doch denkt sich die Kommission den mathematischen Unterricht an den Mädchenschulen „nicht als eine Kopie des entsprechenden Unterrichts auf der Knabenschule", sondern sie spricht sich dafür aus, „daß durch die Verschiedenheit der Beanlagung bei beiden Geschlechtern eine Unterscheidung in der Auswahl wie in der Art der Darbietung des Lehrstoffs von selbst bedingt sei"[1]). Im übrigen wird befürwortet, auch an den Mädchenschulen im Sinne der Meraner Vorschläge zu verfahren; darüber hinaus wird empfohlen, die Ausbildung der Raumanschauung etwa durch praktische Betätigung, wie Herstellung von Modellen, ferner die Erziehung zur „instinktiven Verknüpfung dessen, was zusammengehört, noch um eine Nuance stärker zu betonen, als im Knabenunterricht, wo dem logischen Element in der Beweisführung ein breiterer Raum gewährt werden muß." Ferner warnt der Stuttgarter Bericht davor, „durch pedantische Beweisführung die Dinge, die dem natürlichen Gefühl als selbstverständlich erscheinen, dem Verständnis zu entfremden." Verstärkte Berücksichtigung gebührt dagegen auf der Mädchenschule „der ästhetischen Schulung, welche ein die Raumanschauung systematisch pflegender Unterricht in der Geometrie von selbst mit sich bringt."[2])

Hinsichtlich des mathematischen Unterrichts an dem damals geplan-Oberlyzeum, das auf verschiedenen Wegen die Schülerinnen zum Studium und damit zur Erlangung der bisher nur den Männern zustehenden Berechtigungen führen sollte, hält die Kommission es nicht für bedenklich, wenn sich dort der Unterricht nach Stoff und Form an die höheren Knabenanstalten anschließt, da die geistige Veranlagung einer Frau, die es zu den gelehrten Studien hinzieht, derjenigen des studierenden Mannes nahe stehen dürfte.

d) Niederschlag in den neuen preußischen Bestimmungen.

Die Ausführungen des Stuttgarter Berichts haben offenbar einen nennenswerten Einfluß auf die Gestaltung der preußischen Lehrpläne für

1) Vgl. Gesamtbericht von Gutzmer S. 194. 2) Ebenda, S. 199.

den mathematischen Unterricht an den Mädchenbildungsanstalten gehabt. Recht wenig tritt das zwar in der Formulierung der Lehraufgaben hervor, wohl aber in den methodischen Bemerkungen, die sich gut an die Meraner und Stuttgarter Ausführungen betreffs der inneren Ausgestaltung des Unterrichts anschließen. Bezüglich des dem mathematischen Unterricht an den Mädchenanstalten nötigen Zeitmaßes bleiben die preußischen Festsetzungen allerdings stark zurück hinter demjenigen, welches die Breslauer Unterrichtskommission für notwendig erklärte. Darüber hat sich bereits ausführlicher G. Noodt in einem besonderen Aufsatze ausgesprochen.[1]) Dort ist (S. 31) der Befürchtung Ausdruck verliehen, daß bei der geringeren Stundenzahl für die Mathematik in dem Lyzeum eine Einschränkung des Pensums nach oben hin kaum genügen wird, sondern daß nur einigen begabteren Schülerinnen die Bewältigung des Pensums ohne Überbürdungsgefahr glücken dürfte; auch fehle die Zeit zu den erforderlichen Wiederholungen und Erweiterungen der bereits durchgenommenen Stoffe.

Trotz des hiermit erwähnten Mangels des preußischen Planes kann es die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte mit Genugtuung erfüllen, daß die von ihrer Unterrichtskommission aufgestellten Grundsätze, die den ganzen mathematischen Unterricht auf ein modernes, zeitgemäßes Niveau heben wollen, auch, soweit die methodische Behand- des Stoffes in Frage steht, bei der preußischen Regierung die erwünschte Beachtung im Mädchenschulwesen gefunden haben. Durch die verordnungsmäßige Festlegung sind jene Grundsätze im Mädchenschulunterrichte feste Bestandteile geworden, die nicht nur beachtet sein können, sondern beachtet werden müssen. Im höheren Knabenschulwesen sind die Lehrpläne von 1901 in ihrer Fassung noch nicht nach dieser Richtung hin ausgestaltet worden, wenngleich bei der den Lehrern eingeräumten Freiheit in der Gestaltung ihres Unterrichts die Berücksichtigung der Meraner Vorschläge allerdings möglich, indessen nicht notwendig ist. Das Mädchenschulwesen ist demnach mit seinen Lehrplänen für Mathematik in diesem wichtigen Punkte den höheren Knabenschulen voraus.

5. Über die praktische Gestaltung des Unterrichts in der Mathematik.

a) Stimmen aus Fachkreisen vor der Neuordnung.

Nachdem dargelegt worden ist, nach welchen Grundsätzen der mathematische Unterricht an den Mädchenanstalten erteilt werden soll, wollen wir jetzt auf die tatsächliche Gestaltung der Verhältnisse in der Praxis eingehen.

---

1) Vgl. dazu G. Noodt, Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen, Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission, II, Leipzig (Teubner) 1909.

Schon bald nach dem Erscheinen der Meraner Vorschläge, also noch vor der Neuordnung des Mädchenschulwesens in Preußen, gingen für die mathematische Sache begeisterte Lehrer an das Studium der Frage heran, wie sich die Meraner Vorschläge für den Mädchenunterricht würden verwenden und verwerten lassen. Zuerst nenne ich wieder Noodt[1]), der 1906 in drei Aufsätzen die mathematische Unterrichtsfrage behandelte. In dem ersten Aufsatze wurde allgemein untersucht, wie auf der höheren Mädchenschule das Interesse für den mathematischen Unterricht geweckt werden kann. Lebendige Beziehungen zu den Zwecken des späteren Lebens muß der mathematische Unterricht in vielseitiger Weise schaffen, wenn er die richtige Teilnahme erwecken soll. Die Ausgangspunkte für seine Betrachtungen müssen möglichst in der Praxis des täglichen Lebens liegen, und das, was die Schülerinnen bis zu einem gewissen Grade an rechnerischem und zeichnerischem Können mitbringen für den Beginn des Unterrichts, muß sorgfältig weiter entwickelt und beständig dem mathematischen Unterricht dienstbar gemacht werden. Für die den Unterricht belebenden Beispiele sind möglichst viele, verschiedenartige Anwendungsgebiete zu wählen; die Biologie, die Erdkunde, die mathematische Geographie und insbesondere die Physik bieten in reicher Fülle Gelegenheit zur Anwendung der mathematischen Kenntnisse, besonders für die Anfertigung und das Lesen graphischer Darstellungen.

Die beiden anderen Aufsätze befassen sich mit der Erörterung, wie sich die Meraner Vorschläge über die Reform des mathematischen Unterrichts 1. für den algebraischen[2]), 2. für den geometrischen[3]) Unterricht an den Lyzeen verwerten lassen und bieten eine ganze Reihe von Anregungen in ausgeführten Beispielen, die aus der Unterrichtspraxis erwachsen sind. In dem Zweigverein Brandenburg des Deutschen Vereins für das höhere Mädchenschulwesen hielt die Oberlehrerin F. Kundt[4]) einen Vortrag über das Thema: „Der mathematische Unterricht auf der zehnklassigen höheren Mädchenschule", der gleichfalls gedruckt vorliegt und in dem die Notwendigkeit des mathematischen Unterrichts auch für Mädchen mit einer ganzen Reihe von Gründen belegt wird. Es werden erörtert die in dem mathematischen Unterricht liegenden vielfachen formellen Bildungsmöglichkeiten, sein auch für die Frauen bedeutender Nutzen für Erschließung

1) Vgl. G. Noodt, Wie ist auf der höheren Mädchenschule das Interesse für den mathematischen Unterricht zu wecken? Frauenbildung, 5. Jahrg., Leipzig (Teubner) 1906, S. 255 ff.

2) Vgl. G. Noodt, Wie lassen sich die Meraner Vorschläge über die Reform des mathematischen Unterrichts für den algebraischen Unterricht an den Lyzeen verwerten? Frauenbildung, 5. Jahrgang 1906, Leipzig (Teubner), S. 302 ff.

3) Vgl. G. Noodt, Wie lassen sich die Meraner Vorschläge über die Reform des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen für den geometrischen Unterricht an den Lyzeen verwerten? Frauenbildung, 5. Jahrgang, 1906, Leipzig (Teubner), S. 351 ff.

4) Vgl. F. Kundt, Der mathematische Unterricht auf den zehnklassigen höheren Mädchenschulen, Frauenbildung, 6. Jahrgang, 1907, Leipzig (Teubner), S. 152 ff.

des Verständnisses der heutigen Gesamtkultur, seine wichtige Rolle bei der Ausbildung eines gesunden Gefühls- und Willenslebens und rein praktische Motive. Dann folgen Vorschläge für seine Ausgestaltung und methodische Winke.

Ganz auf dem Boden der Meraner und Stuttgarter Forderungen steht auch die Arbeit von Hupfeld[1]): „Methodische und teleologische Bemerkungen zu Physik, Chemie und Mathematik", wo noch besonders die Forderung aufgestellt wird, daß der geometrisch gewonnene Funktionsbegriff auf der Mädchenschule vor allen Dingen in der Physik anzuwenden ist, da er dort erst seinen vollen Ausbau erhalten kann. Anregend sind auch die Gedankengänge Hupfelds über die Art, wie die Psyche des Mädchens im allgemeinen der Erfassung von naturwissenschaftlichen oder mathematischen Materien gegenübersteht (a. a. O. S. 162 und S. 168.)

Endlich sei noch einer Arbeit von R. Tiemann[2]) Erwähnung getan, in der der Verfasser die Erfahrungen schildert, die man an der zehnklassigen höheren Mädchenschule zu Kottbus in dem dort seit Ostern 1905 für die beiden obersten Klassen eingeführten dreistündigen Mathematikunterricht gemacht hat. In diesen zwei Jahren wurde der Geometrieunterricht bis zur Lehre von der mittleren Proportionale einschließlich der Flächensätze, der Algebraunterricht bis zu den quadratischen Gleichungen geführt. Außerdem wurden noch Körperberechnungen ausgeführt und das Ausziehen von Kubikwurzeln (?) geübt. Trotz der nicht sehr günstigen Verhältnisse, unter denen die Einführung des mathematischen Unterrichts erfolgte, glaubt Tiemann, doch zu der Äußerung berechtigt zu sein, daß der mathematische Unterricht nach mehr als einer Richtung einen wohltuenden Erziehungseinfluß auf die Schülerinnen ausübt. Die Gewöhnung an folgerichtiges Denken erzielt größere Sicherheit im Behaupten, größere Bescheidenheit in der Überzeugung des Wissens, mehr Vorsicht beim Fürwahrhalten; er bewirkt Abwendung von Vorstellungsreihen mit unklaren schwankenden Begriffen.[3]) Im übrigen enthält die Arbeit beachtenswerte, feinsinnige Gedanken über die Bedingungen, die der Unterricht in der Mathematik seiner Gestaltung nach an der Mädchenschule erfüllen muß, wenn er erfolgreich sein soll.

b) Angaben in den Jahresberichten der Schulen.

Übrig bleibt noch die Feststellung, wie sich der Ablauf des Unterrichts, soweit darüber die Jahresberichte der Schulen etwas sagen, den Festsetzungen der Lehrpläne gegenüber verhält.

---

1) Vgl. Hupfeld, Methodische und teleologische Bemerkungen zur Physik und Mathematik, Die höhere Mädchenschule, Bonn (Marcus und Weber) 1908, S. 161 ff.

2) Vgl. R. Tiemann, Der mathematische Unterricht an der Augustaschule zu Kottbus, Frauenbildung, 8. Jahrgang 1909, Leipzig (Teubner), S. 133 ff.

3) Vgl. ebenda S. 135.

α) Lyzeen.

An den Lyzeen ist der Anschluß an die amtlichen Lehrpläne in den letzten Jahren mehr und mehr vollzogen worden. Die Pensenangaben der Anstalten sind jedoch recht verschieden gehalten, bald kurz und im Wortlaut den Vorschriften der Lehrpläne sehr genau angepaßt, bald aber wesentlich ausführlicher mit Angabe aller hauptsächlichen Einzelheiten, die zum durchgenommenen Stoffe gehören. Besonderer Proben dafür wird es hier nicht bedürfen. Bei manchen Anstalten findet sich ausdrücklich die Notiz, daß in den obersten Klassen noch Lehraufgaben früherer Klassen zu erledigen waren und daß dadurch ein gewisser Stoffausfall motiviert ist. Das ist bei der Kürze der Zeit, die seit Veröffentlichung der Augustbestimmungen erst verstrichen ist, außerordentlich erklärlich und natürlich. In derartigen Fällen hat man es mit Übergangszuständen zu tun, die immer solche Klassen betreffen müssen, denen bis zum Abschluß der obersten Klasse nicht mehr die volle Zeit zur Verfügung stand.

β) Oberlyzeen.

Ähnlich liegen die Verhältnisse an manchen Oberlyzeen, insofern die mitgeteilten Stoffübersichten recht erhebliche Abweichungen von den amtlichen Plänen aufweisen. Auch dafür fehlt es nicht an den zutreffenden Begründungen. Aus einem Berichte (des städtischen Oberlyzeums zu Elberfeld, Ostern 1912) teile ich folgende Stelle mit. Bei der Oberlyzealklasse III wird betont: „Die Schülerinnen sind 2 Jahre im Lyzeum und 1 Jahr im Oberlyzeum unterrichtet worden. Sie zeigten dieselbe ungleichmäßige Vorbildung wie die jetzige 2. Klasse des Oberlyzeums. Daher mußte auch hier das Pensum noch einmal von Anfang an durchgenommen werden. Im Oberlyzeum wurde das Pensum der Klassen V, IV, III und ein Teil des Pensums der Klasse II des Lyzeums erledigt." Immerhin eine ganz achtbare Leistung: in einem Jahre bei 4 Wochenstunden, wenn auch mit gereifteren Schülerinnen ca. $3\frac{1}{2}$ Jahrespensen durchzunehmen, für die im Normalfalle zusammen $10\frac{1}{2}$ Wochenstunden verfügbar gewesen wären.

Bei der nächsthöheren Klasse derselben Anstalt war es, wie schon angedeutet, nicht anders. Die darin befindlichen Schülerinnen waren beim Eintritt in das Oberlyzeum ebenfalls ganz ungleichartig vorgebildet. Ein Teil hatte fast nur Geometrie, ein anderer fast nur Algebra und ein dritter beides, aber ungleichmäßig betrieben. „Das Pensum der V. und IV. Klasse des Lyzeums mußte daher noch einmal durchgenommen werden." Dazu kamen die Pensen der Lyzealklassen III, II, I; also 5 Jahrespensen (15 Stunden) zusammengedrängt auf 1 Jahr (4 Stunden).

Und bei der Oberlyzealklasse I wird berichtet: „Die Schülerinnen begannen erst im Oberlyzeum mit der Mathematik. In den 3 Klassen des Oberlyzeums wurden durchgenommen: 1) die Pensen der Klassen des Lyzeums, 2) das Pensum der 3. Klasse des Oberlyzeums und 3) aus dem

Pensum der 2. Klasse des Oberlyzeums die Gleichungen 2. Grades mit 2 Unbekannten und die Trigonometrie. Somit ist im ganzen mit 12 Wochenstunden ein Lehrstoff erledigt worden, für den normalerweise etwa 18 Wochenstunden ($4 \cdot 3 + 4 + 2$) erforderlich gewesen wären. Daraus mag hervorgehen, wie schwierig die Sachlage augenblicklich noch für manche Oberlyzeen ist. Besserung wird erst eintreten, wenn alle Oberlyzeen in ihren Klassen Schülerinnen mit völlig regulärer Vorbildung haben.

γ) Studienanstalten.

Für die Studienanstalten ist ebensowenig schon alles im Normalgeleise, da auch hier vielfach die Anpassung an zu geringe mathematische Kenntnisse erfolgen muß. Ohne hierauf noch weiter einzugehen, möchte ich aber noch auf einen anderen Punkt hinweisen, der im Lehrplane der realistischen Zweige der Studienanstalt von Interesse ist. Der Plan schreibt die Durchnahme von „größten und kleinsten Werten" für die obersten Klassen vor; es ist aber keinerlei Andeutung, weder im Verzeichnis der Lehraufgaben noch in den methodischen Bemerkungen darüber gemacht worden, mit welchen Hilfsmitteln die Beispiele über Maxima und Minima behandelt werden sollen. Falls das etwa nach dem sog. Schellbachschen Verfahren geschehen sollte, so würden m. E. an den Studienanstalten sich die Verhältnisse wiederholen, gegen deren Vorkommen an Knabenanstalten sich insbesondere Klein[1]) bei verschiedenen Anlässen in nachdrücklicher Weise gewandt hat. Es betrifft das die sog. verkappte Infinitesimalrechnung, die an Knabenanstalten lange ihr Dasein gefristet hat und erst in neuester Zeit auf Grund der genannten Darlegungen mehr und mehr dem glatten, modernen Verfahren der Infinitesimalrechnung weicht. Man sollte den jungen Mädchen, die planmäßig Maxima und Minima treiben sollen, den Einblick in die zuständigen Methoden der Infinitesimalrechnung nicht vorenthalten. Man würde ihnen damit eine intellektuelle Wohltat erweisen. Besondere Schwierigkeiten für die Erfassung der Differentialrechnung liegen bei den Mädchen ebensowenig wie bei jungen Männern vor. Ich selbst habe nicht nur Gelegenheit gehabt, es an mir selbst zu erfahren, wie ungemein anregend auf mich der Unterricht in der Differential- und Integralrechnung wirkte, den ich von 1882—1883 als Primaner der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung des Realgymnasiums des Johanneums zu Hamburg genießen durfte, sondern ich habe später als Lehrer an der Oberrealschule vor dem Holstentore 12 Jahre lang und in $7\frac{1}{2}$-jähriger Wirksamkeit an den Realgymnasialklassen für Mädchen in Hamburg das Urteil immer wieder bestätigt gefunden, daß beide Geschlechter gleich fähig zur Erfassung der Infinitesimalrechnung sind und

1) Vgl. F. Klein, Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts Leipzig, Teubner, 1904, S. 11 ff. — Klein-Schimmack, Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen, Teil I, Leipzig (Teubner) 1907, S. 104 ff., insbesondere S. 108 u. 109.

daß sie, sobald sie darin eingeführt werden, mit besonderer Freudigkeit mitarbeiten.

Wie mir die Durchsicht der diesjährigen Osterberichte von Studienanstalten ergeben hat, wird an einigen Stellen schon der Versuch gemacht, die Infinitesimalrechnung in den Unterricht der Studienanstalt aufzunehmen, so an den mit der Chamisso-Schule zu Schöneberg verbundenen Kursen der realgymnasialen Richtung. Der Jahresbericht enthält (S. 30) folgende Pensenangabe für die Unterprima: „Kombinatorik und der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten. Die Elemente der Differentialrechnung. Geometrische Bedeutung des ersten und zweiten Differentialquotienten und Anwendung auf die extremen Werte von Funktionen. Analytische Geometrie der Kegelschnitte." In dem Jahresbericht der Auguste-Viktoriaschule zu Charlottenburg (O. 1912) lautet die Pensenangabe für die Oberprima der realgymnasialen Studienanstalt folgendermaßen: „1. Halbjahr: Lehre von den ganzen rationalen Funktionen: Anfangsgründe der Differentialrechnung; größte und kleinste Werte. Die Kegelschnitte in analytischer Behandlung...." Es wäre zu wünschen, daß in diesem Sinne auch an anderen Anstalten verfahren würde, damit nicht nur am Lyzeum, sondern auch am Oberlyzeum und an den Studienanstalten der ganze mathematische Unterricht seinen Zuschnitt nach modernem Muster erhält.

Dazu wird viel beitragen die sorgfältige Beachtung der methodischen Fortschritte, die zur festeren Einbürgerung der Reformgedanken im Knabenunterricht erfolgen. Die Stoffe, an denen der Knabe das graphische Verfahren und die Erfassung des Funktionsbegriffes allmählich erlernt, werden auch den Mädchen von Nutzen sein; nur die Art der Darbietung wird einmal hinsichtlich des Unterrichtstempos, dann aber auch in der bei Mädchen noch stärker auszuprägenden Veranschaulichung vielfach eine andere sein müssen. Gründliche Kenntnis der neueren Literatur, die in diesen IMUK-Abhandlungen an anderen Stellen angegeben ist, insbesondere aber auch der größeren didaktischen Werke ist daher für die an den Mädchenanstalten wirkenden Lehrkräfte unerläßlich[1]), aber nur von Nutzen, soweit die erforderliche Vorbildung wirklich vorhanden ist.

---

1) Ich verweise hier auf den besonderen Abschnitt in dem Berichte von R. Schimmack: „Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland, diese IMUK-Abhandlungen Band III, Heft 1, wo von S. 92–135 eine treffliche Übersicht über die Aufsätze und Bücher zur Reformbewegung gegeben ist. – Auch der Bericht von W. Lietzmann, Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher, diese IMUK-Abhandlungen, Band I, Heft 1 mit seinem umfassenden Verzeichnis von Lehrbüchern (S. 92ff.), darf nicht unbeachtet bleiben; interessante Vergleichspunkte in großer Zahl bietet den Mathematikern an den höheren Mädchenanstalten die Arbeit desselben Verfassers: „Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preußen", diese IMUK-Abhandlungen, Band I, Heft 2.

6. Über die gegenwärtige Stellung der Lehrkräfte zu den Forderungen der Breslauer Unterrichtskommission.

Um ein Urteil zu erhalten, ob an den Mädchenbildungsanstalten die Umsetzung der Reformvorschläge in die Praxis Aussicht auf Erfolg habe orientierte ich mich bei einer größeren Zahl von Anstalten, wie die Stellung zu modernen Reformbestrebungen zu kennzeichnen sei. Die zur Klarstellung erbetenen Äußerungen bezogen sich auf bestimmt formulierte Punkte, über die ich jetzt auf Grund der eingegangen Antworten zusammenfassend das Erforderliche mitteile.

Betreffs der Einschränkung der formalen Operationen der Arithmetik und Algebra lautete in 84,7% aller Fälle die Antwort dahin, daß die Einschränkung der formalen Operationen zu befürworten sei. Mehrfach wurde darauf hingewiesen, daß das schon aus Zeitgründen notwendig sei. Es fehlte aber auch nicht der ausdrückliche Vorbehalt der Vorsicht bei weiterer Einschränkung, die nie so weit gehen dürfe, daß die Sicherheit und Gewandtheit der Schülerinnen in der Handhabung der formalen Operationen gefährdet werde. Ablehnend gegen die Einschränkung überhaupt verhielten sich die übrigen (15,3%) Äußerungen.

Die Verwertung graphischer Methoden und die Einführung in den Funktionsbegriff findet unter den Antwortenden 94,6%, meist entschiedene Anhänger und nur 5,4% verhalten sich der Graphik gegenüber ablehnend. Vielfach besteht die Meinung, bei Mädchen könnten graphische Darstellungen nicht genug betrieben werden; manche wollen nicht zu früh damit anfangen und hauptsächlich dem physikalischen und geographischen Unterricht die graphischen Methoden mit überweisen, da dort, in der Physik und Erdkunde, vorzügliche Gelegenheit zur Verfolgung funktionaler Zusammenhänge gegeben sei. Unter den Gegnern gibt es einige, die sich keinen wesentlichen Nutzen von graphischen Methoden versprechen und andere, denen die graphischen Methoden nichts als Spielereien ohne tieferen Gehalt bedeuten. Die Mehrheit aber dürfte wohl das Feld behaupten.

Desgleichen wird fast allgemein zugegeben, daß bei den Mädchen das Bedürfnis der besonderen Pflege der Raumanschauung vorliegt; indessen wird mehrfach auf die Schwierigkeit hingewiesen, daß die Gelegenheit dazu eigentlich vielfach fehlt. Nach meinen Feststellungen wurde in nur 12,5% der Fälle bestritten, daß eine besondere Pflege der Raumanschauung erforderlich wäre. Unter den verbleibenden 87,5%, die sich für die Pflege der Raumanschauung aussprechen, gibt es natürlich auch wieder verschiedene Richtungen. Viele wollen schon zu Beginn des geometrischen Unterrichts durch reichliche Verwendung von Modellen, zu deren Anfertigung den Schülerinnen gleichfalls Gelegenheit geboten werden soll, die Raumanschauung stärken. Aber es fehlt auch nicht an Stimmen, die erst beim Stereometrieunterricht auf räumliche Dinge meinen eingehen zu können. Auf dem Lyzeum fehlt es nach der

Meinung mancher Lehrkräfte leider überhaupt an Zeit zur Pflege des räumlichen Vorstellungsvermögens.

Die weitere Frage nach der gemeinsamen Behandlung der Planimetrie und Stereometrie wurde mit 80 % der Stimmen in verneinendem Sinne oder doch wenigstens als nicht genügend geklärt angesehen. Daraus kann geschlossen werden, daß die Richtung, wie sie hinsichtlich der Verschmelzung der Planimetrie und Stereometrie von Lazzeri und Bassani[1]) vertreten wird, in Norddeutschland an den höheren Mädchenbildungsanstalten bislang noch recht wenig Anhänger hat.

Um so lebhafter wird aber die Forderung unterschrieben, die Anwendungsgebiete im mathematischen Unterricht immer stärker heranzuziehen. Zu 92% wird die Wichtigkeit praktischer Anwendungsmöglichkeiten im Mädchenunterrichte unumwunden erklärt. Manche halten gerade diesen Zweig des ganzen mathematischen Unterrichts für die Hauptsache und machen in Verbindung damit bestimmte Vorschläge, auf welche Gebiete das Augenmerk besonders zu richten sein würde. Feldmessungen und physikalische Anwendungen, Berücksichtigung auch der Erdkunde, der Technik, des Geld- und Wechselverkehrs werden mehrfach hervorgehoben. Äußerungen aus dem Kreise der Minderheit (8%) heben hervor, daß eine weitere Verstärkung der Anwendungen unnötig sei, daß es vor allem zu intensiverer Berücksichtigung der Anwendungen an Zeit mangele, daß die Anwendungen auf der höheren Mädchenschule deswegen zurücktreten mußten, weil man es nicht mit einer Fachschule zu tun habe u. dgl. Mir scheint, daß schon der außerordentlich starke Prozentsatz derer, die im Sinne der Mehrheit sich äußerten, ausreicht, um in dieser Frage auf den richtigen Kurs hinzudeuten.

Betreffs der Berücksichtigung historischer Daten hatte ich kaum erwartet, daß sich hierfür auch nur wenige Stimmen finden würden; und doch zeigte sich, daß 33% Prozent der Äußerungen sich für Einstreuung geschichtlicher Daten, soweit die Zeit es erlaubt und es sich um wichtigere Dinge handelt, aussprechen. Einige wollten es gegebenenfalls nur für die höheren Klassenstufen gelten lassen. 67% der Stimmen jedoch lehnten wegen Zeitmangels jedes Eingehen auf geschichtliche Dinge ab.[2])

Bemerkt sei noch, daß man an einigen Orten keine Kenntnis von der Breslauer Unterrichtskommission und ihren Vorschlägen hat.

1) Vgl. G. Lazzeri und A. Bassani, Elemente der Geometrie, unter Verschmelzung von ebener und räumlicher Geometrie, übersetzt von P. Treutlein, Leipzig (Teubner) 1911. — Ferner: R. Schimmack, Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts, Habilitationsvortrag am 29. Juli 1911, Berichte und Mitteilungen veranlaßt durch die internat. math. Unterrichtskommission, Leipzig (Teubner) 1912, VII, S. 115ff.

2) Vgl. hierzu auch: M. Gebhardt, Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterrichte der höheren Schulen Deutschlands, diese IMUK-Abhandlungen, Bd. III Heft 6, Leipzig (Teubner) 1912, S. 65ff.

7. Die im mathematischen Unterricht verwendeten Veranschaulichungsmittel.

Über die im mathematischen Schulunterricht heranzuziehenden besonderen Veranschaulichuugsmittel lauten die Urteile recht verschiedenartig. Ganz ablehnend gegen die Verwendung von geeigneten Modellen und Apparaten verhalten sich nur sehr wenig Anstalten. Es sind nach meinen Feststellungen rund 3%. Solche Schulen besitzen so gut wie gar nichts als Grundstock einer mathematischen Sammlung. An den übrigen Schulen besteht, mehr oder weniger stark ausgeprägt, das Bestreben, den Unterricht – und zwar wird es vorwiegend der geometrische und stereometrische Teil desselben sein – durch zweckmäßig hergestellte Modelle zu beleben.

Meistens besitzen solche Anstalten für den ersten geometrischen Unterricht einen Satz der Körpermodelle, die im propädeutischen Geometrieunterricht und späterhin im Geometrieunterricht Verwendung finden; dazu kommen in manchen Fällen Modelle zur Veranschaulichung typischer Figuren der Planimetrie und wichtiger Lehrsätze (Parallelentheorie, Symmetrie, Kongruenzsätze, Pythagoreischer Lehrsatz, Kreisberechnung), Modelle zur Veranschaulichung der Schnittfiguren auf Körpern, Abwicklungsmodelle, Modelle zur Berechnung des Rauminhalts der Körper (Zerlegung eines dreiseitigen Prismas, Berechnung der Kugel und ihrer Teile) u. dgl. mehr.

An mehreren Anstalten sind für die Zwecke des mathematischen Unterrichts außer dem üblichen Unterrichtsinventar (Lineale, Dreiecke aus Holz oder Metall, Zirkel, Winkelmesser) auch noch vorhanden: Meßband, Stangen, Nivellierlatte, Theodolit, Feldwinkelmesser von Ohmann, Noniusmodell.

Ferner sind hier auch die Hilfsmittel zu berücksichtigen, die bei den verschiedenartigsten Anlässen benutzt werden können, wenn der Lehrer in der Stunde selbst erst ein geeignetes Modell vor den Augen der Schülerinnen entstehen lassen will. Dazu helfen dann Pappscheiben, Holz- oder Metallstäbe, Korke, Fäden, Plastilin, Klammern u. a m.

Vielfach existieren an den Anstalten für die Zwecke, in graphische Darstellungen und funktionale Zusammenhänge einzuführen, graphische Fahrpläne, auf Millimeter- oder sonstiger geeigneter Quadratteilung eingezeichnete Linien und Kurven in starker Vergrößerung.

Von einer Anstalt wird berichtet, daß die Schülerinnen selbst an einem Wetterhäuschen mit Thermometer, Barometer, Hygrometer, Regenmesser die Beobachtungen ablesen und dann die Ergebnisse in graphischer Form in Tabellen eintragen.

Wie verschieden auch bezüglich der Modellfrage die Sachlage an den verschiedenen Anstalten ist, so scheint doch eines aus den mir zugegangenen Äußerungen klar hervorzugehen, daß nämlich in den Fachkreisen in der Benutzung von Modellen und Apparaten ein unentbehrliches

Hilfsmittel zur Stützung des mathematischen Unterrichts erblickt wird. Aus diesem Grunde dürfte sich gewiß der Vorschlag empfehlen, an jeder Anstalt eine Zentralstelle zu schaffen, der die Beschaffung, Verwaltung und Erhaltung des ganzen mathematischen Hilfsapparates einschließlich der Veranschaulichungsmittel für den Rechenunterricht obliegt. Für die Übernahme einer solchen Tätigkeit kann natürlich nur ein Mathematiker in Betracht kommen.

Im Zusammenhang mit dem soeben Erörterten steht die Frage, inwieweit die Schülerinnen selbst zur Herstellung von Modellen angeregt oder angehalten werden können. Da ist die Meinung der Lehrer sehr geteilt. Ein sehr erheblicher Prozentsatz (62%) fürchtet zu starke häusliche Belastung der Schülerinnen durch die Verpflichtung zur Herstellung von Modellen und verzichtet deshalb fast gänzlich auf diese Art der Betätigung. Die übrigen 38% teilen sich wieder in zwei Gruppen. Die Anzahl derer, die die Anfertigung von Modellen seitens der Schülerinnen in stärkerem Grade betreiben lassen, ist recht klein. Die meisten sind für weise Beschränkung und für die Anfertigung ganz einfacher Modelle. Meist sind es aus Karton gefertigte Modelle der Körper, Veranschaulichungsmittel zur Kongruenz u. dgl., an denen die Schülerinnen sich besondere Haupttatsachen gerade dadurch, daß sie die Objekte selbst in Arbeit nehmen, wieder vergegenwärtigen und befestigen sollen. Durch die Herstellung im Einzelnen geht aber auch vieles in den festen geistigen Besitz der Schülerinnen über, was im anderen Falle selbst bei sorgfältiger, gedächtnismäßiger Aneignung nur zu bald unsicher werden kann. Wer selbst einmal aufmerksam das Modell eines Würfels hergestellt hat, kann eigentlich gar nicht von der genauen Vorstellung loskommen, daß der Würfel 6 Flächen, 8 Ecken und 12 Kanten hat. Je genauer zuerst mit und an dem Modell gearbeitet worden ist, umso leichter ist auch, wenigstens nach meiner Erfahrung, die nachherige Abstraktion vom Modell. – Nutzen kann auch die Experimentiermappe von Noodt[1]) stiften.

8. Die im Gebrauch befindlichen mathematischen Lehrbücher.

Wie für den Rechenunterricht es schon oben geschehen ist, will ich jetzt auch eine Übersicht über die an den Lyzeen und weiterführenden Anstalten eingeführten Lehrbücher, Übungsbücher und Tabellen geben. Diese Zusammenstellung fußt auf den diesjährigen Osterjahresberichten, Es sind das etwa 200. Von der Angabe eines Gebrauchsprozentsatzes habe ich hier abgesehen, da ein solcher Zusatz nicht immer eine ganz klare Vorstellung über die Verbreitung des betreffenden Werkes an anerkannten Anstalten ermöglicht. Denn an manchen Anstalten sind auf den verschiedenen Stufen verschiedene Bücher eingeführt. Bei den Rechenwerken lag

1) G. Noodt, Mathematische Experimentiermappe f. d. geom. Anfangsunterricht, Leipzig (Teubner) 1912, Gebr.-Musterschutz 47783[4 2n]. – Dazu: G. Noodt, Leitfaden zur mathemat. Experimentiermappe, Leipzig (Teubner) 1912.

die Sache anders, da fast jede Anstalt ein und dasselbe Werk durchführt. Die zur Zeit besonders stark eingeführten Bücher habe ich durch einen Stern gekennzeichnet.

a) Aufzählung der mathematischen Lehrbücher.

α) Lyzeum.

1. Bardey, Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, bearbeitet von Hartenstein, Leipzig (Teubner); 2. Bardey, Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. Neue Ausgabe, bearbeitet von Pietzker und Presler, Leipzig (Teubner); 3. Bardey-Tiemann, Arithmetische Aufgaben für höhere Mädchenschulen, 1. Teil, Leipzig (Teubner); 4. Bauer und von Hanxleden, Lehrbuch der Mathematik für Lyzeen und Oberlyzeen, Braunschweig (Vieweg); 5. Behrendsen und Götting, Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen, Ausgabe für höhere Mädchenschulen, Leipzig (Teubner); 6. Crantz*, Lehrbuch der Mathematik für höhere Mädchenschulen, I. Teil, Leipzig (Teubner); 7. Fenkner, Arithmetische Aufgaben, Ausg. A, I. Teil, Berlin (Salle); 8. Fenkner und Hessenbruch, Lehr- und Übungsbuch für höhere Mädchenschulen, Teil I u. II, Berlin (Salle); 9. Geipel und Hecht*, Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung für höhere Mädchenschulen, Teil 1–3, Bielefeld (Velhagen und Klasing); 10. Hecht, Lehrbuch der elementaren Mathematik, 2 Teile, Bielefeld (Velhagen und Klasing); 11. Hennecke, Lehr- und Aufgabenbuch für den mathematischen Unterricht an höheren Mädchenschulen, Arnsberg (Stahl); 12. Hollmann, Geometrie, Düsseldorf (Schwann); 13. Jenson, Mathemat. Lehrgang für höhere Mädchenschulen, Abt. B, Leipzig (Brandstetter); 14. Kambly-Roeder, Planimetrie, Ausg. B, bearb. von Thaer, Breslau (Hirt); 15. Kase, Mathemat. Lehr- und Übungsbuch für höhere Mädchenschulen, Heft 1–4, Berlin-Wilmersdorf (Krakau); 16. Knops und Meyer, Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Mathematik an den höheren Mädchenschulen, Lyzeen nnd Studienanstalten, Heft 1–4, Essen (Baedeker); 17. Kundt*, Arithmetische Aufgaben für höhere Mädchenschulen, 1. Teil, Leipzig (Teubner); 18. Mönkemeyer-Rüsewald, Mathemat. Lehr- und Übungsbuch, Heft 1–4, Leipzig (Quelle und Meyer); 19. Müller und Mahlert*, Mathemat. Lehr- und Übungsbuch für höhere Mädchenschulen, 2 Teile, Leipzig (Teubner); 20. Noodt, Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra, Teil 1–4, Bielefeld (Velhagen und Klasing); 21. Derselbe, Leitfaden der ebenen Geometrie, Teil 1 und 2, ebenda; 22. Otto und Siemon*, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik und Algebra für höhere Mädchenschulen, Breslau (Hirt); 23. Dieselben, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für höhere Mädchenschulen, ebenda; 24. Reinhardt-Zeisberg, Geometrie und Arithmetik, Teil I, Frankfurt a. M. (Auffahrt); 26. Wrobel, Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra, I. Teil, Rostock (Koch).

β) Oberlyzeum.

1. Baltin und Maiwald, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Stereometrie und Trigonometrie, 1. u. 2. Teil, Leipzig (Teubner); 2. Bardey-Tiemann, Arithmetische Aufgaben, 2. Teil, Leipzig (Teubner); 3. Bauer und von Hanxleden, Lehrbuch der Mathematik für Lyzeen- und Oberlyzeen, Braunschweig (Vieweg); 4. Crantz, Arithmetische Aufgaben zum Lehrbuch, Teil II, Leipzig (Teubner); 5. Crantz*, Lehrbuch der Mathematik für höhere Mädchenschulen, Teil II, ebenda; 6. Fenkner-Wagner, Lehr- und Übungsbuch der Mathematik für Lyzeen, Berlin (Salle); 7. Gauss, 4-stellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, Halle (Strien); 8. Müller und Mahlert*, Mathemat. Lehr- und Übungsbuch für das Lyzeum, Leipzig (Teubner); 9. Müller und Mahlert, Mathemat. Lehr- und Übungsbuch für höhere Mädchenschulen, Teil II, Arithmetik und Algebra, ebenda; 10. Müller und Kutnewsky, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie, Ausg. A, 2 Teile, Leipzig (Teubner); 11. Noodt-Pankow, Mathematik für Lyzeen, Heft 1 u. 2, Bielefeld (Velhagen und Klasing); 12. Otto-Petri-Ziegler, Mathematik für Lyzeen, 1. Teil, Breslau (Hirt);

13. Schülke, Vierstellige Logarithmentafeln, Leipzig (Teubner); 14. Thieme, Leitfaden der Mathematik für Realanstalten, 2 Teile, Leipzig (Freytag); 15. Treutlein, Vierstellige logarithmische und goniometrische Tafeln, Braunschweig (Vieweg); 16. Walther, Die Mathematik auf dem Lyzeum, Leipzig (Brandstetter); 17. Westrick, Fünfstellige Logarithmentafeln, Münster (Aschendorff).

γ) Studienanstalten.

1. Bardey, Methodisch geordnete Aufgabensammlung, Neubearbeitet von Pietzker und Presler, Leipzig (Teubner); 2. Clasen und Bach, Aufgabensammlung im Anschluß an Herchers Lehrbuch der Geometrie, Ausg. B für realistische Anstalten, Heft 1–3, Leipzig (List); 3. Bork, Mathematische Hauptsätze, herausgeg. von Nath, Ausg. für Realgymnasien und Oberrealschulen, 2 Teile, Leipzig (Dürr); 4. Fenkner, Arithmetische Aufgaben, Ausg. A, I. Teil, Berlin (Salle); 5. Gauss, Fünfstellige vollständige Logarithmentafeln, Halle (Strien); 6. Derselbe, kleine Ausgabe, ebenda; 7. Greve, Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, Bielefeld (Velhagen und Klasing); 8. Derselbe, vierstellige Logarithmentafeln, Bielefeld (Velhagen und Klasing); 9. Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Allgemeinen Arithmetik und Algebra, bearbeitet von Druxes, 2 Teile, Köln (du Mont-Schauberg); 10. Hercher, Lehrbuch der Geometrie, Ausg. B für realistische Anstalten, Heft 1–3, Altenburg (Pierer); 11. Kambly-Roeder, Planimetrie, Ausg. B, bearb. von Thaer, Breslau (Hirt); 12. Derselbe, Stereometrie, Ausg. B, bearb. von Thaer, ebenda; 13. Derselbe, Trigonometrie, Ausg. B, bearb. von Thaer, ebenda; 14. Martus, Mathematische Aufgaben, 1. Teil, Dresden und Leipzig (Koch); 15. Morawetz, vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, Wien (Tempsky); 16. Müller und Mahlert, Mathemat. Lehr- und Übungsbuch für Studienanstalten, Ausg. B, 2 Teile, Leipzig (Teubner); 17. Müller und Kutnewsky, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie, Ausg. B, I. Teil, Leipzig, Teubner; 18. Noodt-Dreßler, Mathemat. Unterrichtsb. für Studienanstalten, Bielefeld (Velhagen und Klasing); 19. Reidt, Aufgabensammlung zur Arithmetik und Algebra, Berlin (Grote); 20. Reinhardt-Mannheimer, Lehrbuch der Mathematik für die oberen Klassen, Arithmetik I. und II. Teil, Geometrie I. und II. Teil, Frankfurt a. M. (Auffahrt); 21. Reinhardt-Zeisberg, Arithmetik und Geometrie I, ebenda; 22. Schlömilch, Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, Braunschweig (Vieweg); 23. Schwab-Lesser-Linnich, Arithmetik und Algebra für Studienanstalten, 2 Teile, Leipzig (Freytag); 24. Dieselben, Geomemetrie für Studienanstalten, 2 Teile, ebenda; 25. Spieker, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, I. Teil, Potzdam (Stein); 26. Derselbe, Lehrbuch der ebenen Geometrie, Ausg. A, ebenda; 27. Derselbe, Lehrbuch der Stereometrie, ebenda; 28. Derselbe, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, ebenda; 29. Thieme, Leitfaden der Mathematik für Realanstalten, 2 Teile, Leipzig (Freytag); 30. Uth-Franz, Planimetrie, Kassel (Hühn); 31. Walther, Die Mathematik auf dem Lyzeum, Teil I, Leipzig (Brandstetter).

b) Bemerkungen über den Zuschnitt der Lehrbücher.

Infolge des Gepräges der „methodischen Bemerkungen“, die den Augustbestimmungen beigegeben sind, müssen Lehrbücher und Aufgabensammlungen, die den amtlichen Bestimmungen gerecht werden wollen, die Reformbestrebungen in gebührender Weise berücksichtigen. Dem suchen viele der obengenannten Unterrichtswerke bereits zu entsprechen, aber natürlich in verschieden starkem Grade. Ohne im übrigen besonders auf ein einzelnes der Werke hier einzugehen, was ich mir durch billige Rücksichtnahme auf alle übrigen versage, kann ich aber doch die allgemeine Bemerkung nicht unterdrücken, daß es zur Zeit noch fehlt an der Verarbeitung des sich auf die Graphik stützenden Funktional-

gedankens von Grund auf. Wohl zeigen sich hie und da eingestreute Kapitel über graphische Darstellungen und Lösungen; doch der einheitliche Guß ist meist nicht vorhanden.

Mit den neuen preußischen Bestimmungen zugleich setzte auch eine Änderung in dem äußeren Zuschnitt der Lehrbücher ein. Um eine übermäßige Belastung der Schülerinnen zu vermeiden, schritt man dazu, die meisten Unterrichtswerke in Einzelhefte für die verschiedenen Klassenstufen zu zerspalten. Ob das gerade zweckmäßig gewesen ist, will ich nicht entscheiden; aber darauf möchte ich auch hier aufmerksam machen, daß bei zu weitgehender Zerteilung eines einheitlichen Ganzen das Zurückgreifen auf das in früheren Klassen Durchgenommene an der Hand des Lehrbuches sehr erschwert wird. Vielleicht findet die nächste Zukunft hier noch den richtigen Mittelweg.

c) Lehrbücher oder Übungsbücher?

In der obigen Lehrbuchliste habe ich keine Scheidung zwischen Lehr- und Übungsbüchern bezw. Aufgabensammlungen vollzogen, da das schwierig gewesen wäre. Aber von Interesse dürfte jetzt wohl noch die Angabe sein, daß in Fachkreisen die Meinungen darüber, welche Art von Unterrichtswerken den Vorzug verdient, sehr geteilt sind. Die von mir vorgenommene Nachfrage ergab, daß für den geometrischen Unterricht am meisten das reine Lehrbuch verlangt wurde (44,5%); für ausschließliche Benutzung von Aufgabensammlungen erklärten sich 19,8% und für eine zweckmäßige Verbindung von Lehr- und Übungsbuch 35,6%. Betreffs des Lehrbuchs wurde mehrfach die Forderung erhoben, daß die Sätze darin in klarer kurzer Form gegeben sein müßten. Für die Arithmetik und Algebra lauten die entsprechenden Zahlen ein wenig anders. Das Lehrbuch fand nur 27,6%, die Aufgabensammlung 37,1% und die Verbindung von Lehrbuch und Aufgabensammlung 35,2% Anhänger. Hiernach könnte es scheinen, als ob für die Folge für die Geometrie die nackte Aufgabensammlung, für die Arithmetik dagegen das reine Lehrbuch noch weiter zurücktreten wird.

d) Zur Art der Benutzung der Lehrbücher.

Zur Benutzung der Unterrichtsbücher liegen gleichfalls eine größere Zahl von Äußerungen vor, aus denen man erkennen kann, in welcher Art mit und nach den Büchern gearbeitet wird. In den allermeisten Fällen (65,6%) wird erklärt, daß das Lehrbuch hauptsächlich dem Zwecke der häuslichen Wiederholung dienen soll. Es soll insbesondere den Schülerinnen, die den Unterricht haben versäumen müssen, die Grundlage zum Nachholen des Versäumten geben. Das Lehrbuch selbst wird von den meisten Lehrkräften nur in beschränktem Maße im Unterricht selbst benutzt; es muß zwar die allgemeine Unterrichtsgrundlage abgeben, darf aber nicht zur sklavischen Anpassung an seinen Gang und an seine Ausdrucksweise verleiten. Mehr als das Lehrbuch kommt

die Aufgabensammlung im Klassenunterrichte zur Verwendung, und zwar besonders in der Arithmetik und Algebra. In den Schulstunden werden daraus hauptsächlich die in gemeinsamer Arbeit zu behandelnden Musteraufgaben entnommen, an die sich dann für die häusliche Arbeit die weiteren in ihm enthaltenen Übungsaufgaben anschließen. Gegen jede Benutzung des Lehr- oder Übungsbuches in den Schulstunden oder für recht seltene Benutzung beim Klassenunterrichte erklärten sich rund 20% der Stimmen. Vereinzelt wird, was man in heutiger Zeit kaum noch für möglich halten sollte, von den Schülerinnen auch noch die besondere Ausarbeitung aller Sätze, die der Unterricht brachte, verlangt; von einer Seite wurde sogar mitgeteilt, daß die Schülerinnen (eines Lyzeums) nach dem Lehrbuche sich auf die neuen noch nicht im Unterricht behandelten Sätze zu Hause vorzubereiten hätten, um dann in der nächsten Schulstunde von dem Ergebnis ihrer Arbeit Rechenschaft abzulegen. Solchen höchst bedenklichen Auswüchsen im mathemalischen Unterricht an höheren Mädchenschulen gebührt die besondere Aufmerksamkeit der zuständigen Aufsichtsstellen!

9. Die mathematischen Klassen- und Hausarbeiten.

Ein wesentlicher Zweck des mathematischen Unterrichts liegt in der Förderung der eigenen Betätigung der Schülerinnen. Sehen wir ab von der Einzelteilnahme am mündlichen Unterricht in der Schule, so bleiben noch die mündlichen Aufgaben im Hause und die schriftlichen Arbeiten, die wieder in Haus- und Klassenarbeiten zu scheiden sind. Die mündlichen Lernarbeiten für den mathematischen Unterricht können an sich ja einen recht mannigfaltigen Charakter zeigen. Es wird vorkommen, daß für den Arithmetik- und Algebraunterricht Formeln, Regeln, Lösungsgänge eingeprägt werden müssen oder daß für den geometrischen Unterricht Herleitungen, Beweise, Überlegungen, Lehrsätze im Wortlaut anzueignen sind. Diese Tätigkeiten werden in buntem Wechsel von Stunde zu Stunde wiederkehren und ganz besonders dazu beitragen, die Grundlage für das sich immer höher türmende Lehrgebäude zu festigen; unter der Voraussetzung guten Klassenunterrichts wird die Durchschnittsschülerin auch ohne ungebührliche Zeitopfer damit fertig werden.

a) Schriftliche Hausarbeiten.

Die schriftlichen Hausarbeiten setzen im mathematischen Unterricht ein, sobald ein gewisser, wenn auch noch so einfach gearteter Stoff zur Bearbeitung reif ist. Diese Bedingung ist oft schon von der ersten Stunde an erfüllt, sowohl im geometrischen wie auch im arithmetischen Unterricht, wenn man als schriftliche Arbeiten auch die besonders den Mädchen so nützlichen Zeichenübungen in der Geometrie auffaßt. Gelegentlich könnte auch eine Zeichenübung durch die Anfertigung eines leicht herstellbaren Modells ersetzt werden. Zumeist werden diese schrift-

lichen Hausarbeiten sogenannte Kladde- oder Übungsarbeiten sein, die mit hinreichender Sorgfalt ausgeführt in ein besonderes Diarium oder eine Kladde oder ein Übungsheft eingetragen werden und in der Regel wohl in gemeinsamer Besprechung des Lehrers mit den Schülerinnen auf ihre Richtigkeit geprüft werden. Im allgemeinen werden solche Arbeiten, durch deren Anfertigung die einzelne Schülerin Zutrauen zu ihrem eigenen Können gewinnen soll, nicht abgegeben. Das Letztere ist aber immer der Fall bei den sogenannten häuslichen Reinschriftarbeiten, die von Zeit zu Zeit — die Intervalle sind recht verschieden von Anstalt zu Anstalt, von Provinz zu Provinz — auf den häuslichen Arbeitsplan gesetzt werden. Zweck dieser Arbeiten ist die saubere, ordentliche, gewissenhafte Bearbeitung einer bestimmten Aufgabe aus dem arithmetischen oder geometrischen Gebiet, wobei vor allem auch, falls das vorkommt, dem zeichnerischen Teile die erforderliche Sorgfalt zuzuwenden ist. Erhebliches Gewicht fällt auch der sprachlichen Darstellung zu, die in allen Teilen der Arbeit sachgemäß, klar, knapp und erschöpfend ausfallen muß.

b) Schriftliche Klassenarbeiten und Urteile über ihren Wert.

Über die schriftlichen Klassenarbeiten kann allgemein zunächst gesagt werden, daß sie meines Wissens wohl an keiner mir bekannten Anstalt fehlen; nur die Art, wie sie gegeben und ausgeführt werden, wie oft sie wiederkehren, welcher Wert ihnen im großen und ganzen beigelegt wird, das alles schwankt sehr. Um mit dem letzten zu beginnen, so hat die von mir veranstaltete Umfrage ergeben, daß die Ansichten betreffs der Bedeutung und des Wertes der Klassenarbeiten recht weit auseinandergehen. Die einen erblicken in den Klassenarbeiten, für die allen Schülerinnen oder auch gruppenweise den Schülerinnen eine oder mehrere Aufgaben von entsprechender Schwierigkeit zur selbständigen Bearbeitung in der Klasse gestellt werden, eines der unentbehrlichen Hilfsmittel zur Orientierung des Lehrers darüber, ob die Klasse im ganzen sich auf dem erwünschten Standpunkt befindet. Die Klassenarbeiten sollen bei planmäßig erledigter, ausreichender Vorbereitung des für sie in Betracht kommenden Stoffes geschrieben werden können, ohne daß es noch weiterer langwieriger, abspannender Vorbereitungen zu Hause seitens der Schülerinnen bedarf. So sicher soll das Fundament sein, daß die Schülerinnen den Arbeiten ohne nervöse Begleiterscheinungen, ohne psychischen Druck ruhig entgegensehen und die Arbeiten als eine willkommene Gelegenheit zu einer in richtigen Grenzen gehaltenen geistigen Kraftprobe und als einen gesunden Zwang zur geistigen Sammlung und Selbsttätigkeit einschätzen lernen. So aufgefaßt, sind die Klassenarbeiten keine Schreckmittel für die Schülerinnen, sondern nur etwas ausgedehntere Übungsarbeiten in besonderer Form. Hinzu kommt für die Vertreter dieser ersten Anschauung, daß auch der Lehrer der Selbstkontrolle bedarf, ob die Durchnahme des jeweils erledigten Stoffes ihn tatsächlich befriedigen darf. Die Antwort darauf gibt ihm der Aus-

fall der Klassenarbeit über den betreffenden Abschnitt. Bei vielen Anhängern der Meinung, daß den Klassenarbeiten ein großer Wert beizumessen ist und daß sie daher für die objektive Beurteilung der Schülerinnen nicht zu entbehren sind, kommt noch ein mehr äußerlicher Grund für die Zweckmäßigkeit solcher Klassenarbeiten hinzu. Sie heben nämlich das Ansehen des mathematischen Faches an den höheren Mädchenbildungsanstalten, indem sie auch bei der Mathematik den Charakter eines Hauptfaches hervortreten lassen.

Die entgegengesetzte Ansicht, daß die Klassenarbeiten, nur einen äußerst geringen, ja überhaupt keinen Wert haben, ist ebenfalls, aber recht selten vertreten. Die Anhänger dieser Meinung schreiben alles oder vieles auf die Rechnung des blinden Zufalls, und demzufolge kann es bei so niedriger Einschätzung des Wertes der Klassenarbeiten dann gelegentlich dahin kommen, daß hier und da überhaupt keine Klassenarbeiten angefertigt werden.

In einem Punkte sind aber wohl alle Stimmen einig, daß das Urteil über die mathematischen Leistungen, über Verständnis und wirkliches Können einer Schülerin nicht allein von dem Ausfall ihrer Klassenarbeiten abhängig gemacht werden darf. Von sehr vielen Seiten wird sogar nachdrücklichst hervorgehoben, daß die mündlichen Klassenleistungen immer in der Hauptsache die Grundlage für die Beurteilung der Schülerinnen abgeben müßten.

Betreffs der Zeiträume, die zwischen den einzelnen Klassenarbeiten liegen, wünschen viele Fachlehrer keine Bindung an bestimmte Termine, andere empfehlen wieder einen mehr regelmäßigen Wechsel. Die Zahl der Klassenarbeiten schwankt beträchtlich. Stellenweise werden im Jahre 20 Klassenarbeiten angefertigt; immerhin kommt das nicht sehr viel vor. Der mittlere Durchschnitt, dem sich die meisten Anstalten anpassen, liegt bei der Zahl 12. Viele Anstalten bleiben auch noch darunter, besonders in den obersten Klassen, wo sich eigentlich von selbst eine Verminderung der Zahl der Klassenarbeiten ganz naturgemäß ergibt.

Im allgemeinen wird, soweit ich mich habe vergewissern können, über den Erfolg bei Klassenarbeiten nicht geklagt, besonders wenn hier und da, was erforderlichen Falls durchaus zu empfehlen ist, während der Arbeit noch eine kleine Hilfe gegeben wird. Natürlich könnte auch hier wieder die direkte Gegenmeinung, daß der Erfolg bei Klassenarbeiten meist ungünstig ist, verzeichnet werden.

Den Zweck, eine einseitige Wertung der Extemporalien oder der Klassenarbeiten zu verhüten, hat der Erlaß[1]) des preußischen Unterrichtsministers vom 21. Oktober 1911. Zwar ist der Erlaß zunächst auf die Verhältnisse der höheren Lehranstalten für die männliche Jugend und im besonderen auf den Betrieb in den Sprachen zugeschnitten gewesen.

1) Vgl. Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen, Jahrgang 1911, Berlin (Cotta), S. 622ff.

Er enthält aber zum Schluß den Hinweis; „Die schriftlichen Klassenarbeiten im Rechnen und in der Mathematik ... sind in entsprechender Weise zu behandeln". In einem weiteren Erlaß[1]) vom 16. Dezember 1911 ist er ausdrücklich auf die höheren Lehranstalten für die weibliche Jugend ausgedehnt worden.

Abschließen möge diese Betrachtungen der Hinweis auf die Instrumente und Hilfsmittel, deren die Schülerinnen zur gefälligen Anfertigung ihrer Arbeiten bedürfen. Für den geometrischen Unterricht müssen sie ein gutes Lineal, womöglich mit Millimeterteilung, zwei rechtwinklige Dreiecke aus Holz oder anderem Material, ein Reißzeug, bestehend zum mindesten aus Stechzirkel, Einsatzzirkel und Reißfeder, ferner schwarze Tusche, verschiedene farbige Tinten oder Buntstifte besitzen. Dazu kommt jetzt vielfach noch in Gebrauch Millimeterpapier, ev. sogar ein Millimeterpapierblock oder ein besonderes Millimeterheft.[2])

10. Die Reifeprüfungen am Oberlyzeum und an den Studienanstalten.

a) Am Oberlyzeum.

α) Das Wesentliche aus der Reifeprüfungsordnung.

Für die *Oberlyzeen* ist die Ordnung der Reifeprüfung[3]) durch Ministerialerlaß vom 11. Januar 1911 veröffentlicht worden. In der Form schließt sie sich durchaus an das durch die Reifeprüfungsordnung der höheren Knabenschulen gegebene Vorbild an. Über den Zweck der Prüfung sagt § 1: „Zweck der Reifeprüfung ist zu ermitteln, ob die Bildungsreife erreicht ist, welche den Lehrplänen der drei wissenschaftlichen Klassen des Oberlyzeums entspricht."[4]) Die Mathematik gehört zu den Fächern, in denen sowohl eine schriftliche als auch eine mündliche Prüfung erfolgt. Für die schriftliche Prüfung in der Mathematik, die sich auf die Bearbeitung von vier mathematischen Aufgaben aus verschiedenen Gebieten erstreckt, stehen fünf Stunden zur Verfügung. Obgleich in anderen Fächern die Unterbrechung der Arbeitszeit durch eine Pause nicht gestattet ist, darf die für die mathematische Arbeit bestimmte Zeit in

---

1) Vgl. Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen, Jahrgang 1912, S. 212.

2) a) Gebr. Wichmann (Berlin): Skizzenheft mit Millimeter-Zeichenpapier; b) E. Dostall (Eschweiler): Millimeterheft; c) Boltze (Gebweiler): Dr. Weills graphisches Heft I. Mathematik und Naturwissenschaften; d) Weber und Eichenberg (Hagen): Graphisches Heft; e) Friedenberg (Hamburg): Millimeterheft, Marke Hafried.

3) Vgl. Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen, Jahrgang 1911, Berlin (Cotta) S. 222ff., wo die genannte Prüfungsordnung noch unter der Überschrift: „Ordnung der Wissenschaftlichen Abschlußprüfung an den Lyzeen" veröffentlicht ist.

4) Ich habe den § 1 der Prüfungsordnung im Text redaktionell so geändert, wie er jetzt auf Grund des Ministerialerlasses vom 1. Februar 1912 betr. die Bezeichnung der höheren Lehranstalten für die weibliche Jugend lauten muß.

zwei durch eine Erholungspause getrennte Hälften geteilt werden; am Beginn jeder Hälfte ist die Hälfte der Aufgaben zu stellen und am Schlusse jeder Hälfte sind die bearbeiteten Aufgaben einzufordern. Für die mathematische Arbeit darf als Hilfsmittel die Logarithmentafel mitgebracht werden. Vor Eintritt in die mündliche Prüfung, die in der Regel frühestens vier Wochen nach der schriftlichen Prüfung stattfindet, befindet die Prüfungskommissiun unter Vorsitz des königlichen Kommissars darüber, ob irgendwelche Bewerberinnen von der mündlichen Prüfung gänzlich befreit werden können. Das kann bei Schülerinnen geschehen, die in dem Gutachten der Lehrer als „zweifellos" reif bezeichnet worden sind, wenn sie nach ihren Leistungen in der Klasse sowie in der schriftlichen Prüfung und nach ihrer ganzen Persönlichkeit dieser Auszeichnung würdig sind. Dabei ist hinsichtlich der Leistungen besonderes Gewicht auf das Deutsche zu legen. Eine Schülerin, deren schriftliche Prüfungsarbeiten sämtlich oder in der Mehrzahl nach die Note „Nicht genügend" erhalten haben, ist in der Regel von der mündlichen Prüfung auszuschließen, wenn bereits in dem Gutachten der Konferenz ihre Reife als „nicht zweifellos" bezeichnet worden ist. Nach der mündlichen Prüfung wird für jedes Fach auf Grund der Klassenleistungen und der Ergebnisse der schriftlichen und mündlichen Prüfung das Gesamturteil in eine der vier Noten: „sehr gut, gut, genügend, nicht genügend" zusammengefaßt. Die Prüfung ist bestanden, wenn das Gesamturteil in den wissenschaftlichen Lehrgegenständen mindestens „genügend" lautet. Die Prüfungskommission ist berechtigt, nach pflichtgemäßem Ermessen zu entscheiden, ob und inwieweit etwa nicht genügende Leistungen in einem Lehrgegenstand durch die Leistungen in einem anderen als ausgeglichen zu erachten sind.

β) Die mathematische Reifeprüfung.

Bei allen den angeführten Bestimmungen liegen gewisse Beziehungen zur Mathematik vor. Daß die Mathematik eine ebenbürtige Stellung neben den anderen Fächern einnimmt, in denen gleichfalls schriftlich und mündlich geprüft wird, ist als eine wohldurchdachte Maßnahme zu kennzeichnen. Weniger allgemein aber dürfte die Zustimmung zu der Möglichkeit sein, die mathematische Arbeitszeit in zwei Hälften zu zerlegen. Was hier ganz offenbar als freundliche Rücksichtnahme auf die Prüflinge gedacht ist, kann sehr leicht von recht nachteiligen Folgen sein. Erhält die Schülerin sogleich alle vier Aufgaben, so kann sie sich selbst ihren Arbeitsplan zurechtlegen, mit welcher Aufgabe sie es zuerst versuchen will. Sie nimmt sich zweifellos die, die nach ihrem Urteil am leichtesten zu lösen ist. Glückt dieser erste Wurf, so ist für das folgende schon ein gewisses Sicherheits- und Lustgefühl vorhanden; ganz anders aber sieht die Sache aus, wenn der Schülerin die Wahlfreiheit hinsichtlich der Reihenfolge der Aufgaben durch das nach der Prüfungsordnung mögliche Teilungsverfahren beschränkt wird. Da halte ich es keineswegs für unmög-

lich, daß bei der Bearbeitung der ersten beiden Aufgaben gar nichts herauskommt, und die Folge wird sein, daß die Prüflinge, die dieses Unglück haben, dann in den zweiten Teil der schriftlichen Prüfung völlig niedergeschlagen durch den ersten Mißerfolg hineingehen. Ebensowenig empfiehlt sich das Halbierungsverfahren gegenüber den tüchtigen Schülerinnen, für die die Gesamtzeit der schriftlichen Prüfung unnötig ausgedehnt wird. Die Befreiungsmöglichkeit von der mündlichen Prüfung kommt den für Mathematik gut beanlagten Elementen zugute, falls sie unter Voranstellung des Deutschen auch in den übrigen Fächern sich völlig auf der Höhe befinden. Im übrigen aber kann im Ausgleichsverfahren, sofern die Kommission es zuläßt, die Mathematik den Rettungsanker abgeben, wenn die mathematischen Leistungen zu dieser Hilfeleistung ausreichen.

γ) Beispiele von schriftlichen Prüfungsarbeiten.

Die diesjährigen Osterprogramme von Oberlyzeen geben ein Bild, wie sich die Prüfungsanforderungen, für die ja die Lehrpläne maßgebend sind, tatsächlich gestaltet haben. Die Gebiete, um die sich die schriftliche Prüfung dreht, sind in der Hauptsache folgende: Planimetrie, Stereometrie, ebene Trigonometrie, Gleichungen 1. Grades mit einer und mehreren Unbekannten, Gleichungen 2. Grades mit einer und mehreren Unbekannten, reziproke Gleichungen, logarithmische Berechnungen, arithmetische Reihen erster Ordnung, geometrische Reihen, Zinses- und Rentenrechnungen, der binomische Satz, das Moivresche Theorem und die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. An manchen Anstalten sind augenblicklich zur Zeit des Übergangs und der Anpassung an die neuen Lehrpläne die Anforderungen in der Reifeprüfung noch etwas herabgesetzt.

Um ein Urteil über die Art der gestellten Aufgaben zu ermöglichen, drucke ich einige Aufgabengruppen ab:

a) Reifeprüfung, Ostern 1912, am Oberlyzeum zu Allenstein.

1. Die Gleichungen: $x^2 - xy + y^2 = 13\,(x - y)$
$$xy = 12$$
sind algebraisch aufzulösen.

2. Um die Höhe eines an einem unzugänglichen Ort stehenden Baumes zu messen, wird auf ebenem Gelände eine Strecke $A = 64$ m abgemessen. Der Fuß des Baumes, F, erscheint von den Endpunkten dieser Strecke unter den Winkeln $FAB = 77^\circ\,14'$ und $FBA = 69^\circ\,5'$. Der Gipfel des Baumes erscheint von A aus unter einem Elevationswinkel von $\alpha = 32^\circ\,4'$. Wie hoch ist der Baum?

3. Jemand versichert sein Leben mit 24000 Mark. Wie lange hat er nach der Schätzung der Versicherungsgesellschaft noch zu leben, wenn er bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von $4^1/_2\,\%$ jährlich 732,10 Mark Prämie zu zahlen hat?

4. Eine Strecke $AB = 12$ cm ist durch die Punkte X und Y nach dem Verhältnis $2:3$ harmonisch geteilt. Wie lang sind die Strecken AX, XB und BY?

b) Reifeprüfung, Ostern 1912, am Oberlyzeum zu Altona:

1. Ein Dreieck zu konstruieren aus $a + b$, γ und h_a.

2. Die Seitenlinie eines Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck liefert, ist $= 12$ cm. Wie groß ist der Kubikinhalt?

3. In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete = 8 cm, ein Winkel = 26° 18′. Wie groß sind die übrigen Stücke?

4. Die Differenz der Kubikinhalte zweier Würfel beträgt 9970 cbm. Wie groß sind dieselben, wenn die Differenz der Kanten 10 m beträgt?

c) Reifeprüfung, Ostern 1912, am Oberlyzeum zu Elberfeld:

1. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren aus der Differenz eines Schenkels mit der Grundlinie $a - c$ und der Höhe h auf der Grundlinie c.

2. Die Breite des Rheines am Drachenfels beträgt 450 m. Die Spitze dieses Berges erscheint dem Beobachter am Ufer bei Mehlem unter einem Elevationswinkel von 16°22′ und am gegenüberliegenden Ufer bei Königswinter unter einem solchen von 29°9′40″. Wie hoch ist der Drachenfels?

3. Um einen Wasserbehälter zu füllen, braucht die erste von zwei Röhren drei Stunden weniger als die zweite. Zusammen füllen sie ihn in $6^2/_3$ Stunden. Wieviel Stunden braucht jede Röhre allein?

4. Welcher Art sind die Linien, die durch die Gleichungen

$$\text{I.}\quad (x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4)$$

und

$$\text{II.}\quad (x + 5)(y - 2) = (x + 2)(y - 1)$$

dargestellt werden?

Welches sind die Koordinaten ihres Schnittpunktes, und welches sind die Koordinaten ihrer Schnittpunkte mit den Achsen?

d) Reifeprüfung, Ostern 1912, am Oberlyzeum zu Marienwerder.

1. Der Wert des folgenden Bruches soll mit Hilfe von Logarithmen berechnet werden:

$$\frac{0{,}2756 \cdot \sqrt[5]{0{,}02174}}{\sqrt[3]{0{,}5128} \cdot 1{,}745^4}.$$

2. Ein Dreieck ist in ein Quadrat zu verwandeln. (Nur Konstruktion und Beweis.)

3. Die Summe zweier Seiten eines Dreieckes ist 36,08 m. Die eine Seite ist dreimal so groß als die andere, der Winkel, welcher der größeren der beiden Seiten gegenüberliegt, beträgt 16°. Wie groß sind die übrigen Winkel und die dritte Seite?

4. Aus einem zylindrischen Baumstamme (spez. Gew. 0,62), und 70 cm Dicke und 6,80 m Länge, soll ein möglichst großer Balken mit quadratischen Endflächen herausgeschnitten werden. Wie schwer ist der Balken?

e) Reifeprüfung, Ostern 1912, am Oberlyzeum zu Landsberg an der Warthe.

1. Es sind die sämtlichen Wurzeln der Gleichung $x^3 - 40 - 9i = 0$ zu berechnen.

2. Eine Schuld von 32000 Mark soll durch Zahlungen von 4500 Mark getilgt werden, die am Ende jedes Jahres erfolgen. Wieviel beträgt die Schuld noch, nachdem 8 Raten gezahlt sind? Es sollen 4% Zinseszinsen gerechnet werden.

3. Auf der Spitze eines Berges steht ein $a = 32$ m hoher Aussichtsturm; die Spitze und der Fuß des Turmes erscheinen von einem Punkte, der in der Horizontalebene des Fußes des Berges liegt, unter den Elevationswinkeln von 33° 17′ 45″ und 31° 5′. Wie hoch ist der Berg?

4. Die Höhe eines geraden Kegels ist im Verhältnis 1 : 2 geteilt und durch den Teilpunkt ist die parallele Ebene zur Grundfläche gelegt. (Die kleinere Teilstrecke der Höhe liegt an der Spitze.) Wie verhält sich a) das Volumen, b) der Mantel des abgeschnittenen Kegels zu dem des Stumpfes?

b) Kritische Bemerkungen über die Art der Aufgaben.

Diese Aufgabenauswahl kann natürlich nur die Bedeutung einer kleinen Stichprobe haben. Man kann daraus einmal die Art der Aufgaben-

gruppierung entnehmen und sodann auch ein ungefähres Urteil betreffs der Höhe der Anforderungen darauf gründen. Die Behauptung, daß die Aufgaben zu schwer seien, wird wohl niemand im Ernste aufstellen wollen, zumal wenn ich auf Grund der Durchsicht von recht vielen Jahresberichten preußischer Oberlyzeen hinzufüge, daß die Aufgaben durchweg in ähnlicher Weise wiederkehren. Ja, zum großen Teile werden gewiß auch die Prüflinge sich der Wahrnehmung nicht haben entziehen können, daß manche Aufgaben fast zu leicht waren und kaum irgendeine besondere Überlegung notwendig machten. Der Fachmann wird ohne Mühe herausfinden, ob unter den hier mitgeteilten Aufgaben solche enthalten sind, die jede Schülerin auf den ersten Griff muß lösen können. Eine andere Eigentümlichkeit fast aller durchgesehenen Aufgabengruppen, schien mir darin zu liegen, daß mutmaßlich der Betrieb des graphischen Verfahrens und die Versenkung in funktionale Zusammenhänge auf dem Oberlyzeum fast ganz zurücktritt. Jedenfalls verraten die Reifeprüfungsaufgaben nicht sonderlich viel von dem Einfluß der modernen Bestrebungen. Der Sache und den Prüflingen würde gewiß kein Nachteil daraus erwachsen, wenn die Prüfungsaufgaben ihrer ganzen Art nach mehr modernen Einschlag zeigen würden. Auch könnten wohl die Aufgaben noch mehr als bisher der abstrakten Fassung entkleidet werden und Aufgaben, wie folgende (Ostern 1912, Oberlyzeum zu Bochum):

$$\sqrt{a^{-2}\left(\frac{a^{-1}}{x}-1\right)}=\sqrt{b^{-1}\left[b^{-1}-\frac{1}{x}\left(b^{-2}-a^{-1}x\right)\right]}$$

zu geben, widerspricht auch den Grundsätzen, die alles Gekünstelte vermieden wissen wollen.

Nützlich und lehrreich ist dagegen u. a. die Bezugnahme auf physikalische Kenntnisse in den Reifeprüfungsaufgaben. Da ist mir beispielsweise folgende Aufgabe entgegengetreten:

Eine Kugel vom Gewichte $p = 0{,}810$ kg wird in einem vertikalen Kreise vom Radius 1,2 m geschwungen und macht $n = 96$ Umdrehungen in der Minute. Welches ist die Spannung S des Fadens, wenn die Kugel den oberen Scheitel des Kreises passiert? (Ostern 1912, Oberlyzeum zu Graudenz.)

b) An den Studienanstalten.

α) Über die Prüfungsordnung und den Anteil der Mathematik an der Prüfung.

Was die Reifeprüfung an den *Studienanstalten* betrifft, so ist sie geregelt durch die „Ordnung der Reifeprüfung an den Studienanstalten vom 20. Oktober 1910“.[1]) In ihrer Fassung gleicht sie völlig der Reifeprüfungsordnung für die Oberlyzeen, die ja etwas später erschienen und ihr nachgebildet ist. Materiell auf die einzelnen Bestimmungen einzugehen, erübrigt sich daher. Nur das sei auch für die Studienanstalten hervor-

1) Vgl. Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen, Jahrgang 1910, Berlin (Cotta), S. 824ff.

gehoben, daß an allen 3 Formen der Studienanstalten in der Mathematik schriftlich wie mündlich geprüft werden muß. Die Mathematik ist daher in jedem Falle ein wichtiges Prüfungsfach. Der Zweck der Reifeprüfung ist, zu ermitteln, ob die Schülerin das Maß von Schulbildung erlangt hat, welches den Lehraufgaben der obersten Klasse einer Studienanstalt entspricht.

β) Beispiele von schriftlichen Prüfungsaufgaben.

Auch hier gebe ich einige Proben von Reifeprüfungsaufgaben aus den diesjährigen Osterberichten.

a) Studienanstalt, Kurse der realgymnasialen Richtung, zu Kassel.

1. Welches sind die Wurzeln der Gleichung: $x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 4x + 12 = 0$; die benutzten Auflösungsarten sind zu erläutern.

2. Wie groß ist der Koeffizient von $x^{n-r}y^r$ in der Entwicklung $(x - \frac{1}{2}y)^n$, wenn n das dritte Glied einer geometrischen Reihe von 6 Gliedern ist, in welcher die Summe der geraden Glieder 147 und die Summe der ungeraden Glieder $73\frac{1}{2}$ beträgt? r ist die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe, in welcher das erste Glied 5, die Differenz 3 und die Summe 98 ist.[1])

3. Die Entfernung zwischen Wien und Paris ist in Kilometern zu bestimmen, wenn die geographischen Breiten $\varphi_1 = 48^\circ\,12'\,36''$ $\varphi_2 = 48^\circ\,50'\,11''$ und die Längen $\lambda_1 = 34^\circ\,2'\,36''$ und $\lambda_2 = 20^\circ$ sind. Wie groß sind die anderen Stücke in dem sphärischen Dreiecke?

4. Man bestimme die Gleichung und den Inhalt des Kreises, welcher durch den Punkt $x_1 = 4$ und $y_1 = 3$ geht, den Kreis $(x-2)^2 + y^2 = 1$ von außen berührt und gleichzeitig die Ordinatenachse tangiert.

b) Studienanstalt (realgymnasiale Kurse) zu Hannover, Ostern 1912.

1. Δ aus $a^2 + b^2 = 6400$ qmm, $c = 60$ mm, $s_a = 45$ mm.[2])

2. Einem Kegel, dessen Grundkreisradius $r = 12$ cm und dessen Höhe $h = 35$ cm ist, ist eine Kugel eingeschrieben. Wie groß sind die beiden Kugelabschnitte, die durch die Ebene des Berührungskreises getrennt werden?

3. Für ein Standbild von $h = 3{,}77$ m Höhe soll ein Sockel angefertigt werden, so daß ein Beschauer, dessen Auge in einer Höhe von $m = 1{,}57$ m ist, in einer Entfernung $n = 14$ m das Standbild nebst Sockel unter einem Winkel von $\alpha = 38^\circ$ sieht. Wie hoch muß der Sockel sein?

4. Zeige, wie man mit Hilfe einer Reihe $\sin 15^\circ$ berechnen kann.

c) Studienanstalt (realgymnasiale Kurse) an der Luisenschule zu Magdeburg.

Herbst 1911.

1. Eine Anleihe von 200000 M. soll durch 15 gleich große Ratenzahlungen getilgt werden, die 5 Jahre nach Aufnahme der Anleihe beginnen und sich dann jährlich wiederholen. Die erste Teilzahlung wird also am Anfang des 6. Jahres geleistet. Wie hoch beläuft sich jede der Ratenzahlungen, wenn $3^3/_4\,\%$ Zinsen gerechnet werden?

2. Es ist ein Kreis und ein fester Durchmesser A_1A_2 gegeben. Aus dem beweglichen Peripheriepunkte P ziehe man $PQ \perp A_1A_2$ und verdopple PQ über P hinaus, um sich selbst bis N. Welches ist der geometrische Ort für den Höhendurchschnitt des Dreiecks A_1A_2N?

1) Wenig ansprechende Aufgabe!

2) Solche Aufgabe ist nicht ganz unbedenklich.

3. Ein Dampfer fuhr am 4. August 5^{30} vorm. von Lissabon ($\varphi_1 = 38^\circ 42' 40''$ *N*, $\lambda_1 = 9^\circ 11' 10''$ *W*) auf dem kürzesten Wege nach Rio de Janeiro ($\varphi_2 = 22^\circ 55'$ *S*, $\lambda_2 = 43^\circ 9'$ *W*) ab und kam am 15. August 7^h nachmittags (Lissaboner Zeit) an.

a) Wie groß war die mittlere Geschwindigkeit des Dampfers in km und Seemeilen?

b) Welche Zeit zeigte die Uhr in Rio de Janeiro beim Eintreffen des Dampfers?

4. Ein gerader Kegel, dessen Seitenlinie $= s$ ist und dessen Grundfläche den Radius r hat, soll parallel der Grundfläche so abgestumpft werden, daß der Mantel des wegfallenden Kegels gleich der Grundfläche wird. Wie muß der Schnitt gelegt werden?

Ostern 1912.

1. Um eine Ellipse mit den Halbachsen a und b sind eine Reihe von Rhomben beschrieben. Welcher von diesen liefert bei der Drehung um die Nebenachse der Ellipse den Doppelkegel, dessen Volumen am kleinsten ist?

2. Durch den Scheitel O einer Parabel wird die Sehne OP_1 gezogen. R sei der Schnittpunkt der Parabelachse mit der Normale in P_1. Welches ist der geometrische Ort für den Durchschnitt S des auf OP_1 senkrechten Strahles P_1L mit dem auf der Achse senkrechten Strahl RM, wenn OP_1 sich um O dreht?

3. Um wieviel Uhr (M.E.Z.) steht die Sonne am längsten Tage ($\epsilon = 23^\circ 27' 20''$) in Magdeburg ($\varphi = 52^\circ 8'$ *N*, $\lambda = 11^\circ 39'$) genau im Osten? Welche Höhe hat dann die Sonne? Die Zeitgleichung ist $Z = +1^m 23^s$.

4. Aus einem gleichseitigen Dreieck ABC ist ein Kreissegment ausgeschnitten, dessen Sehne die Seite BC und dessen zugehöriger Zentriwinkel $BMC = 120^\circ$ ist. Die Restfläche rotiert um MA. Wie groß ist die Gesamtoberfläche und der Rauminhalt des Rotationskörpers? Zahlenbeispiel: $BC = a = 10$ cm.

d) Studienanstalt (realgymnasiale Kurse) an der Chamissoschule in Schöneberg.[1])

Herbst 1911.

1. In einem Kreis ist ein fester und ein beweglicher Radius gezogen und um sich selbst verlängert. Die Endpunkte der Radien sind überkreuz mit den Endpunkten der Verlängerungen verbunden. Welches ist der geometrische Ort des Schnittpunktes der Verbindungslinien? (Zeichnung).

2. Die Winkel eines Dreiecks zu berechnen, von dem gegeben ist[2])

$$\rho : \rho_c = 1 : 4, \quad \alpha - \beta = 28^\circ 13^1/_2{}'.$$

3. Welche Seiten hat ein gleichschenkliges Dreieck von gegebenem Umfang 25, wenn es durch Rotation um seine Höhe einen Rotationskegel maximalen Inhalts ergibt?

4. Es sind die extremen Werte der unentwickelten Funktion:[3])

$$y^2 + 2xy + 4x^2 - 12 = 0$$

zu bestimmen.

Ostern 1912.

1. Ein Punkt bewegt sich so, daß seine kürzeste Entfernung von der Peripherie eines gegebenen Kreises stets m und so groß ist wie seine Entfernung von einer festen Tangente dieses Kreises. Es ist die Gleichung seines Ortes aufzustellen und zu diskutieren.

2. Um wieviel Uhr Sternzeit und in welcher Höhe kulminiert ein östlich vom Frühlingsanfangspunkt stehender Stern, dessen Deklination $52^\circ 24'$ und dessen Entfernung vom Frühlingsanfangspunkt $58^\circ 17'$ beträgt? ($\varphi = 7^\circ 15'$).

---

1) Es wurde schon oben erwähnt (vgl. S. 71), daß diese Anstalt die Elemente der Differentialrechnung in Prima lehrt.

2) Auch nur nach gehöriger Übung für eine Prüfungsarbeit geeignet.

3) Welche Funktion ist gemeint?

3. Eine Gemeinde besteht jetzt aus 3296 Seelen. Es ist ohne Benutzung der Logarithmentafel auszurechnen, wie groß sie vor 100 Jahren gewesen ist, wenn der jährliche Zuwachs 1,2 % betragen hat.

4. Welche Gestalt muß ein gerader Kreiskegel mit vorgeschriebener Seitenlinie l haben, wenn die eingeschriebene Kugel möglichst groß sein soll?

Die mitgeteilten Zusammenstellungen lassen den Schluß zu, daß an den realgymnasialen Studienanstalten, die ja das Gros aller Studienanstalten[1]) bilden, in der Mathematik gründlich gearbeitet wird und daß die Forderungen in der Reifeprüfung nicht wesentlich von denen an den entsprechenden Knabenanstalten abweichen.

Von Oberrealschulklassen kann ich keine Aufgabenproben mitteilen, da mir keine zugänglich gewesen sind.

11. Über die mathematische Beanlagung der Mädchen.

Nachdem im Vorstehenden das Bild von der Gestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Bildungsanstalten für die weibliche Jugend entrollt ist, wird nunmehr auf die Fragen eingegangen werden, was in Fachkreisen im allgemeinen von der Veranlagung der Mädchen für die Beschäftigung mit der Mathematik gehalten wird, wie sich die Mädchen mit den mathematischen Anforderungen abfinden und ob betreffs der Ausprägung des Unterrichts an den Mädchenschulen Wünsche nach der Richtung hin vorliegen, daß ein wesentlich andersartiger Zuschnitt als bei den Knaben erforderlich zu sein scheint.

a) Früheres Vorurteil.

Früher bestand lange Zeit das Vorurteil, daß Frauen die Beanlagung für mathematisches Denken gänzlich fehle; ihre weibliche Eigenart ziehe sie mehr zu der Beschäftigung mit literarischen, sprachlichen, historischen und ethischen Fragen als zur streng logischen Denkbetätigung, wie sie nun einmal die Mathematik von jeher erfordert. Treffend hat u. a. Klein[2]) darauf aufmerksam gemacht, wie unberechtigt und haltlos die Ansicht ist, daß Frauen die Mathematik nicht liege. So lange man es überhaupt ablehnte, die Mädchen in der Mathematik zu unterrichten, konnte nicht der geringste Anlaß vorliegen, weder nach der positiven noch der negativen Seite ein Urteil über die mathematische Veranlagung der Mädchen zu fällen.

---

1) Das Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen, Jahrgang 1912, Berlin (Cotta) zählt auf S. 149 unter den 10 dort angegebenen Studienanstalten 9 realgymnasialen und 1 gymnasialen Charakters auf; Oberrealschulkurse finden sich dort überhaupt nicht angegeben.

2) Vgl. Klein-Schimmack, Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen, Leipzig (Teubner), 1907, S. 45.

b) Beschäftigung der Mädchen mit der Mathematik aus Prüfungsrücksichten.

Daß in der Tat die Sache ganz anders liegt und daß auch den Mädchen eine gewisse, natürlich dem Grade nach sehr wechselnde Befähigung zur Erfassung des mathematischen Lehrstoffes nicht abgeht, hat der Lauf der Dinge zunächst seit Einrichtung der verschiedenartigen privaten Vorbereitungsanstalten für die Reifeprüfungen gezeigt, als das nachdrückliche Streben der Frauen, sich auch die Universitätsreife zu erschließen, sie in Ermangelung einer anderen Möglichkeit dazu zwang, sich die Maturitätsbildung der Männer anzueignen. Ohne Mathematik aber war das nicht denkbar. Daher bildete an allen jenen Gymnasial- und Realgymnasialkursen das mathematische Lehrfach einen besonders wichtigen Bestandteil im Stundenplan und vielfach wurden ihm, um ja nicht die Erreichung des Endzieles in Frage zu stellen, beträchtlich hohe Stundenzahlen zugewiesen. Das mußte auch schon wegen der oft ganz ungenügenden Vorbildung im Rechnen geschehen, die die jungen Mädchen mitbrachten. Einen wertvollen Einblick in die Statistik dieses noch jungen mathematischen Betriebes gewährt die Arbeit von Schmidt[1]), in der es u. a. heißt: „Im allgemeinen stimmen die Fachmänner, die ich darüber hörte", — nämlich über die Stundenzahl für Mathematik — „darin überein, daß sich das Ziel des Mathematikunterrichts mit den mittleren Stundenzahlen, 28—26, wird gut erreichen lassen, daß dies aber bei 4 Jahreskursen in nur 4 Wochenstunden möglich sein soll, bezweifeln sie sehr. Sie vermuten, daß dann der größte Teil der Arbeit dem Hause zufällt, was für die im Wachsen begriffenen Schülerinnen doch seine Gefahren hat. Die Schule soll auf die Gesundheit der ihr anvertrauten Schülerinnen Rücksicht nehmen, und Mädchen sind an sich leicht geneigt sich zu überarbeiten".

Das interessante Moment an dieser Äußerung, die sich ja auf eine gewisse Auslese von Mädchen mit ernstem Wollen bezieht, ist der Hinweis auf die gute Erreichbarkeit des mathematischen Lehrzieles, wenn nur gewisse Vorsichtsmaßregeln, vor allem auch hygienische, beachtet werden.

c) Die Mädchen gegenüber der Mathematik als Pflichtfach.

α) Weniger günstige Urteile aus Fachkreisen.

Seitdem nun die Mathematik an allen höheren Mädchenbildungsanstalten ein wichtiges Pflichtfach geworden ist, können ja naturgemäß schon einige Erfahrungen über die Begabung der Mädchen vorliegen. Ich habe versucht, mich darüber zu unterrichten und möchte jetzt die Ergebnisse dieser Nachforschungen zusammenstellen.

---

1) Vgl. Schmidt, Die Verteilung der Unterrichtsfächer in den deutschen Gymnasial-, Realgymnasial- und Real-Bildungsanstalten für Mädchen, Frauenbildung, 4. Jahrg., 1905, Leipzig (Teubner), S. 481 ff., insbesondere S. 493.

Nur ganz vereinzelt ist das bündige Urteil gefällt worden, daß die Mädchen starke Abneigung gegen den mathematischen Unterricht zeigen und daher auch nichts Ordentliches leisten. Von den meisten wurde den Mädchen das Zeugnis, für die Mathematik beanlagt zu sein, nicht vorenthalten; nur bezüglich des Grades der Befähigung gingen die Ansichten auseinander. Eine Gruppe von Fachmännern bekannte sich zu der Schlußfolgerung, daß die Mädchen weniger gut als die Knaben für die Erfassung der Mathematik begabt sind. Raum- und Zahlvorstellungen sind nach Ansicht dieser Fachmänner den Mädchen leicht spröde Begriffe, die sie nur langsam zu geistigem Eigentum verarbeiten. Größere Mühe verursacht ihnen auch das korrekte Zeichnen im Geometrieunterricht, für den sie im allgemeinen etwas besser veranlagt sein sollen als für den arithmetischen Unterricht. Dazu kommt, daß die Mädchen nach dem Urteil dieser Gruppe der Beurteiler mehr rezeptiv und weit weniger produktiv selbständig arbeiten als die Knaben, so daß sie hauptsächlich bei den Anwendungen viel leichter versagen als die Knaben. Ihr Interesse soll sich dabei mehr auf die Ergebnisse der mathematischen Erörterungen als auf deren Herleitungen richten, womit auch schnelleres Vergessen Hand in Hand geht. Aber durch emsigen Fleiß wird vieles wieder ausgeglichen, so daß man mit dem Unterrichtserfolge, der an sich schon durch die geringe Stundenzahl ernstlich in Frage gestellt ist, immerhin noch einigermaßen zufrieden sein kann.

β) Günstige Urteile.

Die zweite Gruppe, die auch das zahlenmäßige Übergewicht hat, urteilt wesentlich günstiger über die Veranlagung der Mädchen für die Mathematik und stellt fest, daß keine Anlageverschiedenheit zwischen Knaben und Mädchen hinsichtlich der Erfassung der Mathematik besteht, ebenso wenig wie in anderen Fächern von einem solchen Unterschiede die Rede ist. Es wird sogar zahlenmäßig ungefähr festgelegt, wie innerhalb einer Klasse durchschnittlich die Veranlagungsskala beschaffen ist; ein Fünftel der Mädchen wird als gut veranlagt, drei Fünftel als normal, ein Fünftel als schwach befähigt hingestellt. Besonders hervorragende Begabung tritt, wie eine Stimme hervorhebt, bei Mädchen ebenso wie bei Knaben nur im Ausnahmefall auf. Lobend erwähnt wird das rege Interesse, die große Lust und das gute Verständnis der Mädchen, denen oft raschere Auffassung gegenüber den Knaben eigen ist. Hemmend wirkt allerdings bei den Mädchen öfter als bei Knaben der Gedanke, daß die Dinge, die sie in der Mathematik ohne besondere Schwierigkeit logisch erfaßt haben, später praktisch als nicht recht verwendbar erscheinen.

γ) Über den erforderlichen Zuschnitt des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenanstalten.

Von fast allen Seiten wird nachdrücklich unterstrichen, daß der mathematische Unterricht bei den Mädchen durch und durch anschaulich

und mit großer Geduld, nie sprunghaft, aber mit beständiger Nachsicht und Freundlichkeit erteilt werden muß. Wie kaum irgend wo anders macht die Persönlichkeit des Lehrers beim mathematischen Unterricht der Mädchen fast alles aus; in vielen Fällen wird der Erfolg durch das Interesse der Mädchen an der Persönlichkeit des Lehrers mitbestimmt werden. Der Lehrer muß bei den Mädchen alles vermeiden, wodurch sie, die ohnehin eher ermüden als die Knaben, in ihrer Teilnahme erlahmen können. Dazu hilft besonders im Anfangsunterrichte das Beiseitelassen unnötiger Deduktionen und die Heranziehung dessen, was aus der Anschauung her als leicht faßlich gilt. Hinzukommen muß stete Betätigung der Mädchen besonders im Messen und Zeichnen, wodurch die Mädchen, sofern sie zu Genauigkeit und Sauberkeit angehalten werden, wieder einen bedeutenden Gewinn für ihr ästhetisches Empfinden haben.

So viel scheint mir nun festzustehen, daß von den meisten Fachgenossen zwar die ausreichende Befähigung der Mädchen für den mathematischen Unterricht anerkannt wird, aber es wird doch zumeist auch betont, daß der mathematische Unterricht an den Mädchenschulen wegen mancher in der Mädchenpsyche liegenden, von Natur aus bestehenden Besonderheiten andersartig erteilt werden muß als bei den Knaben.

b) Folgerung inbezug auf die Koedukation.

Dadurch verbietet sich denn auch die grundsätzliche Anerkennung der immer wieder von Frauenrechtlerinnen verfochtenen Forderung, man solle den Mädchen auch in Preußen die Pforten der Knabenschulen öffnen und ihnen dazu verhelfen, in Koedukation, oder wie jetzt auch wohl gesagt wird, in Koinstruktion oder in Gemeinschaftserziehung mit den Knaben bis in die obersten Klassen hinauf genau den gleichen Lehrgang durchzumachen. Für und wider die Koedukation ist unsäglich viel geschrieben worden. Ich benüge mich damit, einige über diese Frage orientierende Literatur[1]) anzuführen, aus der man im einzelnen entnehmen möge, wie von ganz verschiedenen Seiten her diese Materie untersucht worden ist. Die preußische Regierung hat in der Neuordnung von 1908 den Standpunkt eingenommen, daß sie nur in einem Punkte dem ko-

---

1) Vgl. dazu z. B. A. Ullrich, Über Koedukation, Frauenbildung, 4. Jahrg. 1905, Leipzig (Teubner), S. 414 ff. und S. 463 ff. — S. Waetzoldt, Coedukation, Frauenbildung, 6. Jahrg. 1907, S. 13 ff. — Die Ergebnisse der Coedukation in Baden, ebenda, S. 37. (Abdruck aus der Täglichen Rundschau vom 30. November 1906.) — Der Kongreß für höhere Frauenbildung zu Kassel am 11. und 12. Oktober 1907; Vortrag von Marianne Weber über den gemeinsamen Schulbesuch von Knaben und Mädchen; Bericht in d. höhere Mädchenschule, 21. Jahrg. 1908, S. 28 ff. — Ziertmann, Die badischen Oberlehrer und der gemeinsame Unterricht, Frauenbildung, 9. Jahrg. 1910, S. 129 ff. — Oeltze-Lobenthal, Die „Gründe" gegen die Zulassung von Mädchen zu den höheren Knabenanstalten, ebenda, S. 432 ff. — Kopsel, Die Zulassung von Mädchen auf höheren Knabenschulen, ebenda, S. 185 ff. — J. Gottschalk, Bildungs- und Erziehungsfragen auf dem Deutschen Frauenkongreß in Berlin vom 27. Februar bis 2. März 1912, Frauenbildung, 11. Jahrg., S. 226 u. 227.

edukativen Gedanken nachzugeben für richtig hält. Knaben können, wo die Verhältnisse es wünschenswert erscheinen lassen, mit Genehmigung der Aufsichtsbehörde ausnahmsweise in die Klassen der Unter- und Mittelstufe einer höheren Mädchenschule aufgenommen werden und sich auf solche Weise mit dem erforderlichen Nebenunterrichte für die Aufnahme in die Tertia einer höheren Knabenschule vorbereiten.[1]) Solche Knaben erhalten dann den Rechenunterricht mit gleichaltrigen Mädchen gemeinsam, nie aber den Mathematikunterricht.

ε) Weitergehendes mathematisches Interesse bei Mädchen.

Mit der Hauptfrage der allgemeinen Veranlagung der Mädchen für mathematische Dinge[2]) hängt die andere zusammen, ob es denn nun auch tatsächlich vorkommt, daß junge Damen sich nach Absolvierung der Studienanstalt vielleicht nicht nur vereinzelt, sondern auch in zahlreicheren Fällen dem Studium der Mathematik und verwandter Disziplinen zuwenden. Die Durchsicht der Berichte von Studienanstalten gibt da wieder Aufschluß. Ohne etwas Erschöpfendes mitteilen zu können, führe ich an, daß zu Ostern 1912 in Hannover (Studienanstalt an der Sophienschule) unter 13 Abiturientinnen 5, in Königsberg (Studienanstalt an der Königin Luiseschule) unter 14 Abiturientinnen 3, in Breslau (Studienanstalt an der Viktoriaschule) unter 20 Abiturientinnen 5 sich für das Studium der Mathematik erklärt haben. Manche von diesen jungen Damen konnten in Gemäßheit der Prüfungsordnung von der mündlichen Prüfung befreit werden, woraus hervorgeht, daß unter diesen Mathematikerinnen Frauen zu finden sind, deren Interessen, Fähigkeiten und Leistungen nicht nur einseitig ausgebildet sind.

Inwieweit früher schon das Studium der Mathematik einen besonderen Reiz auf begabte Frauen ausgeübt hat, verfolgt Lorey in einer anregenden Arbeit.[3])

12. Die Vorbildung und Fortbildung der am mathematischen Unterricht beteiligten Lehrkräfte.

a) Statistisches.

In entsprechender Weise wie für den Rechenunterricht habe ich an der Hand der diesjährigen Osterjahresberichte der Bildungsanstalten für die weibliche Jugend in starker Annäherung festzustellen versucht, in welchem Verhältnis die einzelnen Gruppen der an diesen Anstalten (Lyzeen, Oberlyzeen und Studienanstalten) beschäftigten Lehrkräfte an der Besetzung des mathematischen Unterrichts beteiligt sind. Es ergab sich, daß an der Erteilung von rund 2720 Mathematikstunden im

1) Vgl. Schöppa S. 86.

2) Vgl. hierzu auch E. Breinig, Begabung der Mädchen, Frauenbildung, 9. Jahrg. 1910, S. 231 ff.

3) Vgl. W. Lorey, Die mathematischen Wissenschaften und die Frauen, Frauenbildung, 9. Jahrg. 1909, S. 161 ff.

ganzen 321 Lehrkräfte beteiligt waren. Dabei entfielen 1660 Stunden auf 169 Oberlehrer, 70 Stunden auf 10 akademisch gebildete Hilfslehrer, 280 Stunden auf 34 Oberlehrerinnen, 668 Stunden auf 101 seminaristisch gebildete Lehrer, unter denen nur einige wenige waren, die die Mittelschullehrerprüfung nicht bestanden hatten, und 42 Stunden auf 7 ordentliche Lehrerinnen.

Im ganzen waren demnach 213 akademisch vorgebildete Lehrpersonen (Oberlehrer, wissenschaftliche Hilfslehrer, Oberlehrerinnen) mit zusammen 2010 Stunden gezählt, zu denen 108 seminaristisch vorgebildete Lehrkräfte (ordentliche Lehrer und Lehrerinnen) hinzukommen, die 710 Stunden erteilten. Somit waren unter den sämtlichen gezählten Lehrkräften 66,4% akademisch vorgebildete (davon 84% Herren und 16% Damen) und 33,6% seminaristisch vorgebildete (davon 93,5% Herren und 6,5% Damen). Auf die akademisch vorgebildeten Lehrkräfte entfielen 74,4%, auf die seminaristisch vorgebildeten 25,6% aller gezählten Stunden. Ich bemerke, daß ich die Zählungen soweit fortgesetzt habe, bis durch Hinzunahme weiterer Anstalten kaum noch nennenswerte Verschiebungen in den Prozentzahlen sich ergaben. Die augenblickliche Sachlage läßt sich daher so kennzeichnen, daß zur Zeit drei Viertel aller Mathematikstunden in den Händen der akademisch vorgebildeten Lehrkräfte liegt, unter denen zu zwei Dritteln Herren sind. Die Bemerku ng daß unter den Akademikern, die mathematischen Unterricht geben, auch einige Lehrkräfte vorhanden sind, deren Hauptbefähigungen einer anderen Fachgruppe als der mathematisch-naturwissenschaftlichen angehören, kann nicht unterlassen werden.

Im Anschluß hieran möchte ich noch folgende Übersicht geben, die sich auf die Angaben des Kunze-Kalenders[1] für 1912 und des Jahrbuchs für das höhere Mädchenschulwesen im Königreich Preußen[2], II. Jahrgang 1911/12 gründet.

	Es waren vorhanden unter	mit Lehrfähigung in Mathematik
1.	99 Direktoren von Vollanstalten	7
2.	125 „ „ Nichtvollanstalten	7
3.	220 Professoren	19
4.	703 Oberlehrern	253
5.	336 Oberlehrerinnen	49*
6.	379 Ordentl. Lehrern mit Mittelschulprüfung	105

* Darunter 3 mit der Prüfung pro fac. doc.

Bei den akademisch gebildeten Herren habe ich mit Sicherheit nicht immer feststellen können, ob es sich um die I. oder II. Stufe der mathe-

1) Vgl. Kunzes Kalender für das höhere Schulwesen Preußens und einigen anderen deutschen Staaten, hrsg. von Toeplitz und Malberg, Breslau (Trewendt und Granier) 1912.

2) Vgl. Jahrbuch das höhere Mädchenschulwesen im Königreich Preußen, hrsg. von E. Meyer, II. Jahrgang 1911/12, Berlin und Leipzig (Jaeger).

matischen Lehrbefähigung handelt. Ich habe es deshalb vorgezogen, darüber keinerlei Vermutungen aufzunehmen.

b) Die Ausbildung der Lehrkräfte für den mathematischen Unterricht.

α) Die pro fac. doc. geprüften Oberlehrer und Oberlehrerinnen.

Die Ausbildung der verschiedenen Gruppen von Lehrkräften muß hier gleichfalls zur Sprache kommen. Die akademisch gebildeten Oberlehrer erlangen die Berechtigung zur Erteilung wissenschaftlich mathematischen Unterrichts auf Grund der „Prüfungsordnung für das Lehramt an höheren Schulen in Preußen" vom 12. September 1898, über die sich Lorey bereits in diesen IMUK-Abhandlungen[1]) eingehend verbreitet hat, so daß sich ein weiteres Eingehen darauf an dieser Stelle erübrigt.

Den gleichen Weg müssen diejenigen Oberlehrerinnen zurücklegen, die nach Ablegung der Abiturienten- oder Abiturientinnenprüfung und nach regelrechtem Hochschulstudium in Preußen die Lehrbefähigung in der Mathematik erlangen wollen. Diese Damen[2]) unterziehen sich also der für die männlichen Bewerber vorgeschriebenen Prüfung und werden daher wohl auch gelegentlich als „weibliche Oberlehrer"[3]) bezeichnet.

β) Über den sog. „vierten Weg".

Seit November 1908 können alle Damen, die die Prüfung für höhere Mädchenschulen bestanden haben, an den preußischen Universitäten mit der sog. „Kleinen Matrikel" immatrikuliert werden, womit nur der Zutritt zu den Universitätsvorlesungen gewährt wird, nicht aber der Anspruch auf die Ablegung der Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen verbunden ist.

Den Zugang zum akademischen Studium an der Hochschule zwecks Ablegung der Prüfung für das Lehramt (pro fac. doc.) ermöglicht der Ministerialerlaß[4]) vom 3. April 1909 mit rückwirkender Kraft nun aber auch solchen Lehrerinnen, die nach Erlangung der Lehrbefähigung für mittlere und höhere Mädchenschulen wenigstens 2 Jahre an höheren Mädchenschulen vollbeschäftigt[5]) waren und sodann mindestens 6 Halbjahre,

1) Vgl. W. Lorey, Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preußen und einigen norddeutschen Staaten, diese IMUK-Abhandlungen, Leipzig (Teubner) 1911, Bd. I, Heft 3, S. 54ff.

2) Eine Übersicht über „für das Lehramt (pro. fac. doc.) geprüfte Frauen" gibt E. v. Keudell in der Frauenbildung, 11. Jahrg. 1912, S. 588ff. Darnach haben bis zum 1. Mai 1912 von 122 geprüften Damen im ganzen 25 Frauen die Lehrbefähigung für Mathematik erworben.

3) Vgl. G. Noodt, Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen, Berichte und Mitteilungen der Internat. Math. Unterrichtskommission, II, 1909, S. 28.

4) Vgl. Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen. Jahrg. 1909 S. 624.

5) d. h. mit mindestens 12 Wochenstunden.

sei es als immatrikulierte Studentinnen, sei es als Gasthörerinnen an einer deutschen Staatsuniversität dem Berufstudium ordnungsmäßig obgelegen haben. An die Stelle des zur Berechtigung zum Universitätsstudium sonst geforderten Nachweises tritt bei ihnen der Nachweis, daß sie nach erfolgreichem Besuch eines Lyzeums und eines Oberlyzeums die volle wissenschaftliche Lehrbefähigung für mittlere und höhere Mädchenschulen erlangt haben sowie der Nachweis über die verlangte praktische zweijährige Unterrichtstätigkeit. Das zuständige Provinzialschulkollegium entscheidet nach Ablegung der Prüfung, ob auf Grund der oben genannten Nachweise über die Vorbildung, über die erste Prüfung und die Schultätigkeit die Anstellungsfähigkeit als Oberlehrerin verliehen werden kann oder ob ein weiteres Probejahr erforderlich ist.

Der hiermit geschaffene Modus, der sog. „vierte Weg" zum Studium, der somit den ehemaligen Schülerinnen eines Oberlyzeums unter bestimmten Bedingungen freigegeben worden ist, hat sehr verschiedenartige Beurteilung gefunden. Geradezu glatt abgelehnt hat ihn u. a. der allgemeine Deutsche Lehrerinnenverein[1]) (H. Lange, M. Drees) mit der Begründung, daß die auf dem Oberlyzeum erlangte Bildung durchweg hinter der von den Studienanstalten vermittelten Ausbildung zurückstehe und daß daher, besonders auch nach zweijähriger Unterbrechung des Studienganges durch die praktische Tätigkeit, besondere Schwierigkeiten für die betreffenden Damen, die jenen Weg gehen wollen, entstehen müßten. M. Eberhard[2]) hegt gleichfalls starke Bedenken gegen den „vierten Weg". Eine begeisterte Anhängerin des vierten Weges hingegen ist die Direktorin Jaehner[3]), die in ihm zugleich ein Mittel zur Ausbildung des Oberlyzeums zur deutschen „Oberschule" sieht und nicht finden kann, daß die wissenschaftlichen Klassen des Oberlyzeums alles in allem genommen so beträchtlich hinter dem Ziele des Gymnasiums in der Mathematik und hinter dem Ziele der Oberrealschule in den Sprachen zurückbleiben.

Die Damen, die auf dem „vierten Wege" der Lehrbefähigung für die Mathematik zustreben, werden gleichfalls nach der oben genannten Prüfungsordnung, also pro facultate docendi, geprüft. Es darf dabei aber nicht übersehen werden, daß der vierte Weg speziell für das Stadium der Mathematik große Nachteile hat. Auf Jahre hinaus werden die Damen, die auf diesem Wege zum mathematischen Studium und zur Prüfung gelangen wollen, nicht im Besitze der erforderlichen Vorkenntnisse sein, einfach weil sie sie nicht erwerben konnten. Vor allen Dingen müssen die Damen, die noch vor der Neuordnung ihre Prüfung für höhere Mäd-

1) Vgl. Frauenbildung, 8. Jahrg., 1909, S. 608 ff.

2) Vgl. M. Eberhard. Über die Oberlehrerinnenprüfung und den vierten Weg zur Universität, Ebenda, S. 230 ff.

3) Vgl. z. B. Jaehner: Der vierte Weg, die höhere Mädchenschule, Jahrg. 1910, S. 295 ff. — Ferner: Der vierte Weg zur Universität (Eine Entgegnung), Frauenbildung, 8. Jahrg. 1909, S. 490 ff.

chenschulen ablegten, wegen der überaus bescheidenen Rolle, welche die Mathematik früher am Lehrerinnenseminar spielte, selbst gegenüber der akademischen Behandlung der Anfangsvorlesungen einen schweren Stand haben, sobald sie sich zur Aufnahme des Universitätsstadiums entschließen.

Mag man mit Möhle[1]) auch annehmen, daß sich in Zukunft für die Abiturientinnen des Oberlyzeums vieles hinsichtlich der Summe mathematischer Vorkenntnisse bessern wird, so bleibt doch m. E. ein wichtiges Bedenken bestehen, daß man auf keiner Seite zu niedrig einschätzen sollte. Mag auch durch das auf die Reifeprüfung am Oberlyzeum folgende Seminarjahr und durch die beiden vor dem Universitätsbesuch geforderten Jahre praktischer Tätigkeit die Persönlichkeit reifen, so wird doch jedenfalls, was Mathematik angeht, dadurch die Beherrschung des Stoffes und die Lernfähgkeit vermindert werden.

Im übrigen kann ich Möhle[2]) in dem Schlusse, daß die Abiturientinnen des Oberlyzeums hinsichtlich der Vorbereitung auf die Mathematik später denjenigen der gymnasialen Studienanstalt so gut wie gleich stehen werden, nicht unbedingt beistimmen. Der Grund, daß die Gesamtstundenzahl fast gleich ist, stützt Möhles Urteil nur unvollkommen und einseitig. Es kommt daneben doch noch auf die Art der vorgeschriebenen Pensen an; bei deren Vergleich will es mir als zutreffend erscheinen, daß denn doch an der gymnasialen Studienanstalt die mathematische Durchbildung schon von unten herauf eine in sich geschlossenere und auch umfassendere ist[3]). Demnach neige ich als Mathematiker zu der Meinung, die ich hier unumwunden ausspreche, daß der in Preußen gewählte vierte Weg nur ein vorübergehender Notbehelf zur Abstellung des noch immer vorhandenen Mangels an weiblichen, akademisch gebildeten Lehrkräften sein sollte.

γ) Die „preußische Oberlehrerin".

Von dem „weiblichen Oberlehrer" ist verschieden die sog. „preußische Oberlehrerin". Schon oben bei Gelegenheit der Besprechung der Maibestimmungen von 1894 wurde darauf hingewiesen, daß die preußische Regierung den Lehrerinnen, die für mittlere und höhere Mädchenschulen geprüft waren, die Gelegenheit schuf, nach einigen Jahren praktischer Betätigung durch zwei- bis dreijährige weitere Ausbildung in wissenschaftlichen Kursen ihre Bildung in zwei besonders gewählten, den jeweiligen Neigungen entsprechenden Fächern zu vertiefen und dieses weiterführende Studium mit einer Prüfung abzuschließen, die zum wissenschaftlichen Unterricht in den betr. Gegenständen in den oberen Klassen einer höheren Mädchenschule berechtigt. Diese sog.

1) Vgl. F. Möhle, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht an den preußischen Lyzeen, Oberlyzeen und Studienanstalten nach der Neuordnuug von 1908, Schriften den Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Heft 15, Leipzig (Teubner) 1913. S. 44ff.

2) Ebenda, S. 48. 3) Vgl. diese Abhandlung S. 56, 57 und 59.

„Oberlehrerinnenprüfung" soll entgegen der im Erlaß vom 3. April 1909 bekannt gegebenen Absicht, sie mit Ende 1913 außer Kraft zu setzen, zunächst noch einige Zeit beibehalten werden. Jedoch hat die ursprüngliche Prüfungsordnung vom 31. Mai 1894 einige wesentliche Änderungen erfahren. Die jetzt geltende „Ordnung für die wissenschaftliche Prüfung der Lehrerinnen (Oberlehrerinnenprüfung)"[1]) vom 15. Juni 1900 sagt (§ 3): „Für die Zulassung ist erforderlich, daß die Bewerberin das Zeugnis der vollen Lehrbefähigung für höhere Mädchenschulen in Preußen oder in einem der Bundesstaaten erworben hat, deren Prüfungszeugnisse nach besonderen Abkommen in Preußen anerkannt werden; daß sie mindestens fünf Jahre nach Erlangung der lehramtlichen Befähigung im Lehrberuf gestanden hat, und daß sie davon mindestens zwei Jahre an Schulen in Preußen oder den vorerwähnten Bundesstaaten vollbeschäftigt gewesen ist".

In § 5 wird unter den 9 Prüfungsfächern auch die Mathematik aufgezählt. Die Einteilung in Fachgruppen (vgl. die Ordnung von 1894) ist nicht mehr aufrecht erhalten. Es bleibt also bei der Prüfung jedesmal in 3 Fächern. Empfohlen wird, obwohl die Bewerberin sich unter den 9 Gegenständen einen beliebigen der anderen Gegenstände zur Mathematik hinzu auswählen kann, im unterrichtlichen Interesse die Verbindung: „Physik und Chemie nebst Mineralogie mit Mathematik." In einem der Prüfungsfächer erhält die Bewerberin eine Aufgabe zur schriftlichen häuslichen Bearbeitung mit achtwöchiger Frist, die noch um weitere vier Wochen verlängert werden kann. Falls die Mathematik eines der Prüfungsfächer ist, ist die Aufgabe für die häusliche Arbeit aus dem anderen Fache zu stellen (§ 6, A 1). In der Mathematik hat die Bewerberin in diesem Falle eine Klausurarbeit anzufertigen, für die 4 Stunden Zeit gewährt werden (§ 6, A 10). Hierin liegt eine abweichende Behandlung der Mathematik gegenüber den anderen Fächern. Wenn auch nach § 13 in der Mathematik nur gefordert wird: „die Kenntnis der Elementarmathematik und Bekanntschaft mit der analytischen Geometrie der Ebene sowie mit den Grundlehren der Differential- und Integralrechnung",[2]) so würde sich doch schon für diejenigen Bewerberinnen, deren Hauptneigung nach der Seite der Mathematik geht, aus den genannten Gebieten manches anziehende Thema für eine häusliche Bearbeitung stellen lassen. Eine vierstündige Klausurarbeit läßt jedenfalls nur in unvollkommener Weise erkennen, wie weit die Fähigkeit zu guter, geschlossener Darstellung reicht, und die mündliche Prüfung kann auch schon wegen der viel knapperen Zeit keinen vollen Ersatz für den Fortfall der umfangreicheren häuslichen Arbeit bieten.

---

1) Vgl. Schöppa, S. 238ff.

2) Dazu kommt nach § 7 – § 14, Vorbemerkung: „ausreichende Bekanntschaft mit den wichtigsten wissenschaftlichen Hilfsmitteln, mit geeigneten Lehrmitteln und mit der besonderen Methodik des Gegenstandes im Unterrichte der Oberstufe einer vollentwickelten höheren Mädchenschule."

b) Oberlehrerinnenkurse.

Ihre Ausbildung erhalten diese Oberlehrerinnen zumeist in besonderen Kursen, wie sie, zum Teil unter Anlehnung an Universitätseinrichtungen und unter Mitwirkung von Universitätsdozenten und Oberlehrern, z. B. in Berlin, Bonn, Göttingen, Greifswald, Königsberg, Münster bestehen.[1]) Nicht überall finden sich Sonderkurse für Mathematik; vorhanden sind solche in Berlin, Bonn, Göttingen, Königsberg, Münster. Das Maß der Vorkenntnisse, die für den Eintritt in die Kurse verlangt werden, ist nicht gleichartig; die Prüfungsordnung (vgl. Schöppa, S. 235) sagt, daß elementare arithmetische und geometrische Grundkenntnisse, etwa bis zum Ziele der Obertertia eines Realgymnasiums, bei geeigneter Anleitung vor dem Eintritt in die Kurse erworben werden müssen. Stellenweise begnügt man sich auch mit weniger.[2])

Die mit Hilfe dieser Kurse zu erlangende Lehrbefähigung in der Mathematik entspricht, gemessen an der Prüfungsordnung von 1898, etwa der zweiten Stufe, was für den Unterricht an den Lyzeen, nicht aber für die Oberlyzeen und die obersten Klassen der Studienanstalten, ausreicht.

Mit der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen wurde der Bedarf an tüchtigen weiblichen Lehrkräften für den mathematischen Unterricht bedeutend gesteigert. Es ist aber anzunehmen, daß in absehbarer Zukunft aus dem Kreise der Abiturientinnen der Studienanstalten eine größere Zahl tüchtiger Oberlehrerinnen mit der mathematischen Lehrbefähigung hervorgehen wird. Dadurch wird, was Mathematik angeht, das Bedürfnis nach der Aufrechterhaltung der sog. Oberlehrerinnenprüfung mehr und mehr schwinden, zumal ja auch die Absolventinnen des Oberlyzeums auf dem vierten Wege die mathematische Lehrbefähigung für die erste Stufe erwerben können. Mit Rücksicht auf die jetzt vorhandenen tüchtigen seminaristisch vorgebildeten Lehrerinnen empfiehlt es sich aber, wie vor allem die Denkschrift[3]) des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht ausführt, zunächst für eine Übergangsperiode die Oberlehrerinnenprüfung noch beizubehalten und zugleich noch eine vollkommenere Ausgestaltung der Oberlehrerinnenkurse auzustreben, damit auch die durch die Kursusausbildung gegangene mathematische Oberlehrerin z. B. korrektes Zeichnen versteht und im Stande ist, in geordneter Weise das räumliche Anschauungsvermögen zu entwickeln.

---

1) Außerdem bestehen ähnliche Kurse in Hamburg; das Nähere weiter unten S. 111.

2) Vgl. hierzu die oben (S. 95) zitierte Arbeit von Noodt: p. 17 und 18.

3) Vgl. Denkschrift des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (DAMNU): Mathematik und Naturwissenschaft an den neu geordneten höheren Mädchenschulen Preußens. Wie erhalten wir die erforderlichen Lehrkräfte? Nebst einem Zusatz zur Denkschrift. No. 2 und 3 der Schriften des Deutschen Ausschusses, Leipzig (Teubner) 1909.

ε) Mathematische Vorkurse.

Der Deutsche Ausschuß bezeichnet es in den bereits genannten Veröffentlichungen als Aufgabe der mathematischen Oberlehrerinnenkurse, daß sie bestimmte Vorkenntnisse zu fordern, dieselben zu festigen und bis zur Hochschulreife zu entwickeln und die Anforderungen bei den mathematischen Examinanden nach der zweiten Stufe der Oberlehrerprüfung zu bemessen haben.

Notwendig ist auch bei den Damen des „vierten Weges" in Anbetracht ihrer für das Mathematikstudium nicht ausreichenden Vorkenntnisse und wegen der Unterbrechung ihrer theoretischen Ausbildung durch die wohl meist in den Unterklassen liegende Unterrichtspraxis die Einrichtung besonderer Vorkurse, die zur Reife für das Hochschulstudium führen. Solche Vorkurse bestehen beispielsweise in Göttingen und Bonn.

ζ) Ferienkurse.

Außerordentlich wichtig ist aber auch die Frage der wissenschaftlichen Fortbildung der schon im Amte befindlichen Oberlehrer und Oberlehrerinnen. Wie bei den Herren für die schon seit zwanzig Jahren z. B. in Göttingen in zweijährigen Zwischenräumen Ferienkurse mit bestem Erfolge abgehalten wurden, werden auch den Damen solche periodisch immer wieder stattfindenden Ferienkurse an geeigneten Universitäten wertvolle Dienste leisten. Ein derartiger Kursus hat bereits im Oktober 1909 in Göttingen[1]) stattgefunden. Solche Kurse werden die Oberlehrerinnen in frischer Verbindung halten können mit allen den wissenschaftlichen Fragen, aus denen Beeinflussungen des mathematischen Schulunterrichts herzuleiten sind.

η) Die ordentlichen Lehrer.

Die ordentlichen Lehrer an den Lyzeen müssen, soweit sie sich für den mathematischen Unterricht qualifizieren wollen, den Bedingungen der „Ordnung der Prüfung der Lehrer an Mittelschulen vom 1. Juli 1901"[2]) entsprochen haben. In der Hauptsache hat die Prüfung in zwei vom Bewerber unter 9 Fächern — übrigens die gleichen Fächer wie bei der Oberlehrerinnenprüfung — nach eigener Wahl bestimmten Gegenständen zu erfolgen. Empfohlen werden, sobald Mathematik in Frage kommt, die Verbindungen: 1) Mathematik mit Physik und Chemie nebst Mineralogie oder 2) Mathematik mit Botanik und Zoologie, oder 3) Mathematik mit Erdkunde. Für die häusliche schriftliche Prüfungsarbeit

---

1) Vgl. Ferienkurs in Mathematik, Physik, Chemie, Erdkunde für Oberlehrer und Oberlehrerinnen Göttingen (4.–6. Oktober 1909); Frauenbildung, 9. Jahrg. 1910, S. 34ff. und 98ff.

2) Vgl. Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen, 1901, S. 649ff. – Vgl. auch: H. Güldner, Bestimmungen über Vorbildung und Prüfung des nicht akademisch gebildeten Lehrer und Lehrerinnen an höheren Mädchenschulen und weiterführenden Bildungsanstalten in Preußen, Halle (Waisenhaus) 1909, S. 5ff.

stehen, abgesehen von der Möglichkeit einer Verlängerung, 8 Wochen zu Gebote; dem Bewerber kann auch eine mathematische Arbeit gegeben werden. Dazu kommt eine Klausurarbeit aus jedem der beiden Fächer, die Lehrprobe in einem der Prüfungsfächer, also gegebenenfalls auch in der Mathematik, sowie die mündliche Prüfung. Hinsichtlich der Gesamtanforderungen in der Mathematik ist bestimmt (§ 9_6): „Kenntnis der allgemeinen Arithmetik bis zum Beweise des binomischen Lehrsatzes für beliebige Exponenten (einschließlich), der Algebra bis zu den Gleichungen dritten Grades (einschließlich), sowie der wichtigsten Sätze der algebraischen Analysis; Kenntnis der ebenen Geometrie mit Einschluß der Lehre von harmonischen Punkten und Strahlen, Chordalen, Ähnlichkeitspunkten und -Achsen; Kenntnis der körperlichen Geometrie, der ebenen Trigonometrie, der Theorie der Maxima und Minima, der analytischen Geometrie der Ebene in rechtwinkligen Koordinaten bis zu den Kegelschnitten einschließlich; Sicherheit im Gebrauche der trigonometrischen Tafeln; Einsicht in die Methode — mit Einschluß der des Rechenunterrichtes." Die Höhe der Anforderungen entspricht etwa den Reifeprüfungsforderungen am Realgymnasium.

Wesentlich ist, daß die Bewerber sich auf dieses Ziel hin im allgemeinen lediglich durch Eigentätigkeit vorbereiten müssen. Demgegenüber spricht Klein in seinem zu Münster 1911 gehaltenen Vortrage: „über aktuelle Probleme der Lehrerbildung"[1]) von der Einrichtung fester Lehrgänge in Gestalt von Mittelschullehrerkursen in größeren Städten. Solche Kursen bestehen jetzt z. B. in Barmen, Frankfurt a. M., Gelsenkirchen, Stettin. Desgleichen sollte auch für die am Mathematikunterricht beteiligten ordentlichen Lehrer für gute Fortbildungskurse gesorgt werden, damit sich ihr wissenschaftliches Niveau und die Unterrichtstechnik den Zeitforderungen anpassen können.

ϑ) Die ordentlichen Lehrerinnen.

Hinsichtlich der ordentlichen Lehrerinnen kann ich mich kurz fassen, da ihre Lehramtsberechtigung entweder durch die entsprechenden Prüfungen am Ende des dritten Oberlyzealjahres und nach Abschluß der Seminarklasse des Oberlyzeums oder durch den Besuch des Volksschullehrerinnenseminars und Ablegung der Lehrerinnen- und Mittelschullehrerprüfung geregelt ist.[2]) Wesentlich ist für unsere Schlußfolgerung, daß die ordentlichen Lehrerinnen, insoweit sie zum mathematischen Unterricht mit herangezogen werden, im ersten Falle über die oben (S. 54 und 82) bezeichneten Kenntnisse verfügen müssen, im zweiten Falle dagegen über die soeben erörterten Kenntnisse der ordentlichen Lehrer. Mutatis mutandis gilt für Damen dieser letzteren

1) Gedruckt als Heft 10 (1911) der Schriften des Deutschen Ausschusses.
2) Vgl. Güldner, die oben [S. 100] zitierte Schrift, S. 20.

Gruppe erst recht die Forderung der Kursusausbildung, einer Einrichtung, die bis heute noch nicht besteht. Wird im allgemeinen der Schwerpunkt der Unterrichtstätigkeit bei den ordentlichen Lehrerinnen nicht auf der mathematischen Seite liegen, so ist es doch eine Sache der Notwendigkeit und Billigkeit zugleich, unter den ordentlichen Lehrerinnen alle die Damen, die für den mathematischen Unterricht in Betracht kommen, hinsichtlich der Ausbildung und Fortbildung nicht anders zu stellen als die ordentlichen Lehrer. Anderenfalls leidet die Ausbildung der Schülerinnen Schaden, was auf alle Weise verhindert werden muß. Wir befinden uns eben in einem Übergangsstadium, das noch auf lange Zeit hinaus besondere Aushülfemaßregeln verlangt.

Dritter Teil.

Über den mathematischen Unterricht an den höheren Mädchenschulen in anderen deutschen Staaten.

Indem ich mich zu den außerpreußischen Staaten ausschießlich der Reichslande wende, schicke ich die ganz allgemeine Bemerkung voraus, daß die Darstellung der von jetzt ab in Betracht zu ziehenden Verhältnisse sich zum Teil sehr vereinfacht, da vielfach die preußischen Bestimmungen und Prüfungsordnungen unverändert oder doch nur mit ganz geringfügigen Änderungen übernommen sind. Wo aber wichtige Unterschiede und Abweichungen von Preußen bestehen, sollen diese deutlich hervorgehoben werden. Das wird ganz besonders bei der Besprechung von solchen Staaten, wie Hamburg, Sachsen, Hessen der Fall sein, die aus eigenen Erwägungen heraus und auf besonderen Wegen an die Ordnung des höheren Mädchenschulwesens herangegangen sind, und denen dabei vieles, gerade auch bezüglich des mathematischen Unterrichts, besser geglückt ist als Preußen. Fast möchte es scheinen, als ob die preußischen Verordnungen unter der Menge der Kompromisse zu leiden gehabt hätten, die zwischen den verschiedenen Tendenzen zu treffen waren.

Ferner sollen von jetzt ab nur die zurzeit bestehenden Zustände beleuchtet werden und Rückblicke auf frühere Zeitläufte unterbleiben.

A. Die norddeutschen Großherzogtümer.

1. Mecklenburg-Schwerin.

Durch Verordnung[1]) vom 7. März 1910, betreffend das höhere Mädchenschulwesen ist das Mädchenschulwesen geregelt, nachdem schon vorher am 1. November 1909 durch Ministerialerlaß die Anlehnung an

---

1) Vgl. Regierungsblatt für das Großherzogtum Mecklenburg-Schwerin, Jahrgang 1910, Nr. 8 (Schwerin).

die preußische Neuordnung erfolgt war.[1]) Die Stundentafeln stimmen für alle Fächer, mithin auch für Rechnen und Mathematik, genau mit den preußischen Ansätzen überein, desgleichen die Lehraufgaben für das Lyzeum, das Oberlyzeum[2]) und die drei Arten der Studienanstalten mit denen der entsprechenden preußischen Anstalten; nur fehlen die „allgemeinen Lehrziele" und die „methodischen Bemerkungen". Es ist nur empfohlen worden, u. a. auch hinsichtlich der Unterrichtsweise „tunlichst" dem preußischen Vorbilde zu folgen.[3]) Es erübrigt sich somit jede weitere Erläuterung. Im übrigen gelten für Mecklenburg-Schwerin auch die Vorschriften Preußens über den Gemeinschaftsunterricht. Demnach findet eine Aufnahme von Mädchen in höhere Knabenschulen dort nicht statt.[4])

2. Mecklenburg-Strelitz.

Im Großherzogtum Mecklenburg-Strelitz regelt die Verordnung[5]) vom 29. Oktober 1910 die Organisation und die Lehrverfassung der anerkannten höheren Mädchenschule. Über weiterführende Bildungsanstalten enthält die Verordnung keine Bestimmungen.

Die Fachübersicht läßt erkennen, daß gewisse Abweichungen in den Stundenzahlen gegenüber Preußen vorliegen. Das Rechnen ist in Klasse X mit 5, in Klasse IX mit 4, in Klasse VIII mit 4 Stunden angesetzt; von da ab hat das Rechnen, das planmäßig bis in die erste Klasse durchgeführt wird, mit der in Klasse IV einsetzenden Mathematik zusammen immer drei Stunden. Die Lehraufgaben sind für jede Klasse einzeln festgesetzt und zeigen in der Fassung, bisweilen auch, wie z. B. im Rechnen für Klasse V, hinsichtlich der Stoffbegrenzung größere Knappheit. Mecklenburg-Strelitz folgt nicht dem Vorgange Preußens, in Klasse V schon zur Arithmetik hinüberzuleiten; auch bleiben aus dem Rechenpensum dieser Klasse die sogenannte bürgerlichen Rechnungsarten noch fort. Diese Dinge sind auf die höheren Klassen verteilt.

Die Zielhöhe stimmt mit der des preußischen Planes im großen und

1) Vgl. Schnell, Vergleichende Übersicht des Mädchenschulwesens in den deutschen Einzelstaaten, Frauenbildung, 10. Jahrg., 1911, S. 347ff.

2) Ich benutze hier des leichteren Vergleichs wegen die neuen preußischen Bezeichnungen, die zweifellos nunmehr auch in Mecklenburg in Gebrauch kommen werden.

3) Vgl. Schnell, Die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens im Großherzogtum Mecklenburg-Schwerin, Frauenbildung, 9. Jahrg., 1910, S. 167ff.

4) Betreffs weiterer Einzelheiten, die die staatliche Ordnung des höheren Mädchenschulwesens betreffen, verweise ich auf die Abhandlung von R. Thedens, Über die gegenwärtige staatliche Ordnung des höheren Mädchenschulwesens und der weiterführenden Bildungsanstalten für die weibliche Jugend in Deutschland (Beilage zum Jahresbericht der Staatlichen höheren Mädchenschule am Lerchenfeld in Hamburg, Ostern 1912, Progr. Nr. 141). Diese Arbeit geht auf den augenblicklichen Zustand in allen deutschen Staaten ein.

5) Vgl. Großherzoglich Mecklenburg-Strelitzscher Offizieller Anzeiger für Gesetzgebung und Staatsverwaltung 1910, Nr. 56, S. 375ff.

ganzen überein; nur will es mir scheinen, daß man in Mecklenburg-Strelitz im Hinblick auf die planmäßige Weiterführung des Rechnens mit der Gesamtzahl von drei Stunden für die Klasse noch viel weniger reicht als in Preußen.

3. Oldenburg.

Die amtliche Bekanntgabe der ministeriellen Vorschriften zur Regelung des höheren Mädchenschulwesens ist am 18. März 1912 erfolgt.[1]) Oldenburg stellt sich dabei im wesentlichen auf den Boden der preußischen Neuordnung und nimmt auch die Bezeichnung „Lyzeum" für solche zehnklassigen höheren Mädchenschulen an, die nach dem preußischen Lehrplan unterrichten, und in denen wenigstens die Hälfte aller wissenschaftlichen Stunden auf der Mittel- und Oberstufe von akademisch gebildeten Lehrkräften erteilt wird. Diese Anstalten sind derselben Aufsichtsbehörde wie die höheren Knabenschulen unterstellt. Die nicht akademisch gebildeten Lehrkräfte, die auf der Mittel- und Oberstufe unterrichten, müssen durch die Mittelschullehrerprüfung oder durch die Prüfung für mittlere und höhere Mädchenschulen dazu berechtigt sein. Gehobene Mädchenschulen, „deren Lehrplan dazu berechtigt", werden als „Höhere Mädchenschulen" bezeichnet.

Der diesjährige Jahresbericht der Cäcilienschule in Oldenburg[2]) zeigt deutlich, daß betreffs des Rechnens und der Mathematik noch ein Übergangszustand vorliegt. Es finden sich z. B. in Klasse VII und Klasse IV je vier Stunden verzeichnet. Auch konnte in der Klasse I noch nicht das planmäßige Ziel erreicht werden.

In Oldenburg ist abweichend von Preußen Gemeinschaftsunterricht von Knaben und Mädchen seit 1905 gestattet. Des Näheren äußert sich darüber Böttger[3]) in seinem in diesen IMUK-Abhandlungen erstatteten Bericht über den mathematischen Unterricht an den höheren Knabenschulen Oldenburgs.

B. Die Hansestädte.

In den Hansestädten ist man in der Mädchenschulreform noch nirgend bis zu einem völligen Abschluß gekommen.

---

1) Vgl. Die höheren Mädchenschulen, 25. Jahrg., 1912, S. 277.

2) Vgl. Vierundvierzigster Bericht der Cäcilienschule in Oldenburg vom Direktor Dr. Hugo Beumelburg, Oldenburg (Schulzesche Hofbuchdruckerei) 1912, Progr. Nr. 253; dieser Bericht enthält auch einen Aufsatz von Witt: „Stellung der Mathematik in der höheren Mädchenschule", in dem der Verfasser sich auf die preußische Neuordnung stützt. Es heißt darin (S. 11): „Der preußische, von der Cäcilienschule übernommene Lehrplan der Mathematik ist wohldurchdacht und in sich abgerundet. Er ist durchaus geeignet, seine Aufgabe, zu selbständigem Denken zu erziehen, vollkommen und mit leichten Mitteln zu erfüllen, vermeidet aber unnötige Schwierigkeiten und solche Abschnitte, die für den weiteren Aufbau nicht unbedingt notwendig sind."

3) Vgl. diese IMUK-Abhandlungen, Leipzig (Teubner) 1911, Bd. I, Heft 4, S. 64 u. 65.

1. Lübeck.

Die Ernestinenschule (staatliche zehnklassige höhere Mädchenschule) zu Lübeck, mit der ein vierklassiges höheres Lehrerinnenseminar verbunden ist, unterrichtet im Rechnen und in der Mathematik ganz nach dem preußischen Plane von 1908. An der zehnklassigen Privatschule von Frl. Freese wird bei erhöhter Stundenzahl nach einem besonderen von der Oberschulbehörde genehmigten Lehrplan unterrichtet, der im Endziel den preußischen Anforderungen entspricht. In Lübeck können zurzeit Mädchen, die sich dem Abiturientenexamen unterziehen wollen, in die Untersekunda des Realgymnasiums für Knaben (Johanneum) eintreten.

2. Bremen.

Bremen hat noch keine amtlichen Bestimmungen für das höhere Mädchenschulwesen erlassen; es hat zwar die Gründung einer staatlichen höheren Mädchenschule kürzlich beschlossen, aber eingerichtet ist sie noch nicht. Es scheint so, als ob der preußische Plan maßgebend wird, nach welchem z. B. an der zehnklassigen höheren Mädchenschule von Prof. Dr. Kippenberg auch der mathematische Unterricht schon erteilt wird. Die im Bremischen Staatsgebiet zu Vegesack belegene zehnklassige höhere Mädchenschule unterrichtet im Rechnen und in der Mathematik nach einem eigenen, von der Senatskommission für das Unterrichtswesen in Bremen vorläufig genehmigten Plan, der sich im wesentlichen an den Lehrplan der städtischen höheren Mädchenschule in Bremerhaven anlehnt. Die Stundenzahlen für Rechnen und Mathematik sind folgende:

Klasse	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I
Rechnen	4	5	4	4	3	4	—	—	—	—
Mathematik	—	—	—	—	—	—	4	4	4	4

Die Lehraufgaben lauten

a) für Rechnen:

Kl. X: Kopf- und schriftliches Rechnen mit reinen Zahlen innerhalb der vier Grundrechnungsarten im Zahlenkreis 1—50. – Leichte Anwendungen.

Kl. IX: Die vier Grundrechnungsarten mit reinen und benannten Zahlen bis zur Zahl 1000.

Kl. VIII: Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen, benannten und unbenannten Zahlen im unbegrenzten Zahlenraum. Leichte Dreisatzaufgaben und leichte Aufgaben aus der Zeitrechnung.

Kl. VII: }
Kl. VI: } wie in Preußen.

Kl. V: wie in Preußen unter Ausschluß der einfachen Flächen- und Körperberechnungen, aber unter Einfügung von Aufgaben aus dem Versicherungswesen.

b) für Mathematik:

Kl. IV: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit allgemeinen Zahlen. Einfache Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten, nebst Anwendungen.

Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken. Einfache Dreieckskonstruktionen. Übungen im Gebrauch von Zirkel und Lineal.

Kl. III: Gleichungen mit einer Unbekannten, nebst Anwendungen. Zerlegen in Faktoren. Erweiterung der Dreieckslehre. Von den Vierecken. Kreislehre. Geometrisches Zeichnen.

Kl. II: Gleichungen mit mehreren Unbekannten, nebst Anwendungen. Graphische Darstellung. Proportionen. Von den Potenzen. Proportionalität der Strecken. Ähnlichkeitslehre. Inhaltsbestimmung und Verwandlung geradliniger Figuren. Konstruktionen.

Kl. I: Lehre von den Wurzeln und Logarithmen. Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Quadratische Gleichungen, nebst Anwendungen. Die regelmäßigen Vielecke. Erweiterung der Kreislehre. Anwendung der Algebra auf Geometrie. Konstruktionsaufgaben mit Übungen im geometrischen Zeichnen. Trigonometrische Berechnungen von Dreiecken. Berechnung des Inhalts und der Oberfläche einfacher Körper.

Ich habe diesen Lehrplan, der vermutlich weichen muß, sobald der Bremische Staat seine Bestimmungen betr. Regelung des höheren Mädchenschulwesens bekannt gibt, hier mitgeteilt, um einen Beweis dafür zu geben, daß man stellenweise über das Maß der preußischen Anforderungen auf der zehnklassigen höheren Mädchenschule hinausgeht. Günstig ist dem Plane die erheblich größere Stundenzahl; dieser Vorteil wird aber zum Teil wieder aufgewogen durch die Hereinnahme mehrerer neuer Stoffgebiete, besonders in die oberste Klasse. Das sind, abgesehen von den Logarithmen, deren Durchnahme auf der höheren Mädchenschule ich nur billigen kann, die algebraische Geometrie und die Elemente der Trigonometrie.

Wenn die Mehrzahl der Schülerinnen ein solches Ziel mit dem Abschluß der obersten Klasse in befriedigender Weise erreichen kann, so würde das ein weiterer wertvoller Beweis dafür sein, daß die Mathematik für die Mädchen kein Schreckgespenst zu sein braucht.

3. Hamburg.

Besondere Lehrpläne[1]) für die staatlichen höheren Mädchenschulen hat Hamburg erlassen, als zu Ostern 1910 die ersten beiden staatlichen höheren Mädchenschulen ins Leben treten sollten. Da die Hamburgische Stundentafel in manchen Punkten von der preußischen abweicht, so drucke ich sie hier vollständig ab.

a) Der amtliche Lehrplan.

Siehe hierzu Tabelle auf der folgenden Seite.

b) Vergleich mit dem preußischen Plan.

Man erkennt drei Eigentümlichkeiten gegenüber dem Preußischen Plane: 1) der allmähliche Anstieg in der Wochenstundenzahl für die aufeinanderfolgenden Klassen ist gelinder, und die Zahl der Pflichtstunden geht in keiner Klasse über 30 hinaus; 2) das Englische setzt schon in

1) Vgl. Lehrpläne für die staatlichen höheren Mädchenschulen in Hamburg. — Gedruckt bei Lütcke und Wulff, Hamburg.

<table>
<tr><th>Lehrfächer</th><th>X</th><th>IX</th><th>VIII</th><th>VII</th><th>VI</th><th>V</th><th>IV</th><th>III</th><th>II</th><th>I</th><th>Summe von VII—I</th><th></th></tr>
<tr><td>Religion</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td>Deutsch</td><td>8</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>32</td><td></td></tr>
<tr><td>Französisch</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>5</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td>Englisch</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>17</td><td></td></tr>
<tr><td>Geschichte</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>Erdkunde</td><td>—</td><td>—</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td rowspan="2">2</td><td>1</td><td>13</td><td>(davon 4 gemeinsam mit Biologie)</td></tr>
<tr><td>Biologie</td><td>—</td><td>—</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="3">23</td><td rowspan="2">(davon 4 gemeinsam mit Erdkunde)</td></tr>
<tr><td>Chemie</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Physik</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>Rechnen</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">26</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Mathematik</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Zeichnen</td><td>—</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2*)</td><td>2*)</td><td>2*)</td><td>14</td><td>(dav. 6 fakultativ)</td></tr>
<tr><td>Schreiben</td><td>—</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>Handarbeit</td><td>—</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2*)</td><td>2*)</td><td>2*)</td><td>12</td><td>(dav. 6 fakultativ)</td></tr>
<tr><td>Singen</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>Turnen</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td>Zusammen</td><td>18</td><td>22</td><td>24</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>30</td><td>32*)</td><td>32*)</td><td>32*)</td><td>207 (213)</td><td></td></tr>
</table>

*) Den Schülerinnen steht es frei, entweder am Zeichnen oder am Handarbeitsunterricht teilzunehmen.

der Klasse V ein, so daß nicht wie in Preußen auf die Klasse IV zwei neue Unterrichtsfächer (Englisch und Mathematik) kommen; 3) der Unterricht im Rechnen und in der Mathematik verfügt von der Klasse X bis zur Klasse I einschließlich über insgesamt 38 Stunden gegenüber 30 Stunden in Preußen; das bedeutet einen Unterschied von rund 320 Unterrichtsstunden, von denen 240 Stunden dem Rechnen und 80 Stunden der Mathematik zugute kommen; auch die Naturwissenschaften sind besser bedacht als in Preußen. Man kann daher wohl sagen, daß der hamburgische Plan versucht hat, das Gleichgewicht zwischen der sprachlich-historisch-ethischen und der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fachgruppe in möglichst befriedigender Weise herzustellen.

c) Lehrziel und Lehraufgaben für Rechnen und Mathematik.

Der hamburgische Plan formuliert ein „allgemeines Lehrziel" für Rechnen und Mathematik, verzichtet aber auf methodische Bemerkungen dazu und geht sogleich zur Aufstellung der Lehraufgaben über. Auf S. 14—16 des Planes finden wir folgende Bestimmungen:

Rechnen und Mathematik.

A. Allgemeines Lehrziel.

Im Rechenunterricht soll unter Ausscheidung aller erkünstelten Dinge aus dem Lehrstoff Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen mit bestimmten Zahlen erzielt werden, unter besonderer Berücksichtigung des Kopfrechnens und der Anwendungen auf wichtige Verhältnisse des bürgerlichen Lebens.

Dem mathematischen Unterricht fällt die Aufgabe zu, den Schülerinnen eine von anschaulicher Erfassung und klarem Verständnis zeugende Kenntnis der Ele-

mentarmathematik zu vermitteln und in ihnen die Fähigkeit zu folgerichtigem Schließen, zur Beurteilung einfacher Abhängigkeitsverhältnisse und treffender kurzer Formulierung der Gedanken zu entwickeln; bei der Auswahl und Gestaltung des Übungsstoffes ist besonders auf die Beziehungen zum praktischen Leben zu achten.

B. Lehraufgaben.

1. Rechnen.

Klasse X und IX (je 4 Stunden).

Einübung der vier Grundrechnungsarten im Zahlenkreise von 1 bis 100; auch schon Übungen mit benannten Zahlen.

Wöchentlich eine Klassenarbeit.

Klasse VIII (4 Stunden).

Dasselbe im Zahlenkreis 1 bis 1000. Leichte Dreisatzaufgaben; einfache Übungen in der dezimalen Schreibweise.

Wöchentlich eine Klassenarbeit.

Klasse VII (4 Stunden).

Die Grundrechnungsarten an unbenannten und benannten ganzen Zahlen im beliebig erweiterten Zahlenkreise. Die deutschen Münzen, Maße und Gewichte. Dreisatzaufgaben mit geraden Verhältnissen.

Wöchentlich eine Klassenarbeit.

Klasse VI (4 Stunden).

Die gewöhnliche Bruchrechnung. Das Wichtigste über Teilbarkeit der Zahlen. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und der größte gemeinschaftliche Teiler mehrerer Zahlen. Die wichtigsten fremdländischen Münzen. Dreisatzaufgaben mit geraden und ungeraden Verhältnissen.

Wöchentlich eine Klassenarbeit.

Klasse V (3 Stunden).

Die Dezimalbruchrechnung. Übungs- und Wiederholungsaufgaben mit allen bisher aufgetretenen Zahlenformen. Aufgaben über zusammengesetzte Dreisätze.

Alle 14 Tage eine Klassenarbeit.

Klasse IV (1 Stunde).

Die einfache Zins-, Gewinn- und Verlust- sowie Rabattrechnung.

Klasse III–I.

Wiederholung und Befestigung des Ganzen innerhalb des mathematischen Unterrichts. Erweiterung der wirtschaftlichen Kenntnisse durch Einführung der Elemente der einfachen Buchführung und Besprechung der wichtigsten sozialen Versicherungsformen.

2. Mathematik.

Klasse IV (3 Stunden).

Einführung in die Planimetrie durch beständige Übungen im Messen und Zeichnen mit Lineal, Maßstab, Winkelmesser und Zirkel sowie Feststellung der anschauungsmäßig gewonnenen Ergebnisse in Form von Erklärungen und Lehrsätzen. Empirische Behandlung der Grundeigenschaften des Dreiecks bis zu den Kongruenzsätzen einschließlich; Lehre vom Parallelogramm. Einfachste Dreiecks- und Parallelogrammkonstruktionen.

Alle 14 Tage eine Klassenarbeit für Mathematik und Rechnen.

Klasse III (4 Stunden).

Fortsetzung der Dreieckslehre; Behandlung von ungekünstelten Konstruktionsaufgaben mit Verwendung der wichtigsten geometrischen Örter. Verwertung des Prinzips der Beweglichkeit der Figuren.

Die vier Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlen; positive und negative Zahlen; einfache Faktorenzerlegungen. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Graphische Darstellung der Funktion ersten Grades.

Alle drei Wochen eine Klassenarbeit für Rechnen und Mathematik.

Klasse II (4 Stunden).

Die Kreislehre; die Flächengleichheit und Inhaltsberechnung geradlinig begrenzter Figuren. Konstruktionsübungen an Verwandlungsaufgaben. Proportionalität der Strecken; Grundzüge der Ähnlichkeitslehre.

Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten in rein algebraischer und graphischer Behandlungsweise. Einiges aus der Potenz- und Wurzellehre. Graphische Darstellung von $y = x^2$. Ausziehen der Quadratwurzel.

Klassenarbeiten wie in III.

Klasse I (3 Stunden).

Die regelmäßigen Vielecke. Die Kreisberechnung. Die Elemente der Stereometrie und des stereometrischen Zeichnens. Berechnung der wichtigsten Körper.

Das Wichtigste über den Logarithmus. Algebraische und graphische Lösung der Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Klassenarbeiten wie in III.

d) Charakterisierung der Lehrplanforderungen.

Zur Charakteristik des Lehrplans mögen einige Bemerkungen gemacht werden. Im Rechnen ist angestrebt ein vorsichtig angelegter Stufenbau; so kommt es, daß die Unterstufe mit der oberen Grenze 1000 abschließt; erst die Klasse VII bringt das Rechnen im beliebig erweiterten Zahlenraum. Die Klasse V kann mit ihren drei Stunden das Pensum gut bewältigen, da sie (im Vergleich zu Preußen) stark entlastet ist und die Prozent- und Zinsrechnung der Klasse IV sowie alles Mathematische einer höheren Stufe überläßt.

In der Mathematik ist die Klasse IV nur mit einem geometrischen Pensum von drei Stunden bedacht worden. Die Arithmetik beginnt erst in der III. Klasse und kann sich für die beiden ersten Jahre (Klasse III und II) wegen der Vierzahl der Stunden gut mit der Geometrie zur Hälfte teilen. Für Klasse I, wo nur drei Stunden (mit Rücksicht auf die fünf Stunden Deutsch) angesetzt sind, ist typisch die Logarithmenlehre und das stereometrische Zeichnen.

Ich kenne sehr wohl die Gründe, die vom Standpunkte der höheren Mathematik gegen die Einführung des Logarithmus auf der sechsklassigen Realschule geltend gemacht werden; aber ich halte sie nicht für durchschlagend und zwingend genug, um den Logarithmus ganz aus der Realschule und damit auch aus der höheren Mädchenschule zu verbannen. Für diese Stufe ist das Verfahren der Umkehrung in Anknüpfung an die Definition der Potenz zugkräftig und ergiebig genug, um den Begriff des Logarithmus hinreichend zu begründen; und weiterhin erweist sich der so gewonnene Logarithmus als ein zu elegantes Hilfsmittel beim numerischen Rechnen (besonders auch bei der Kreisberechnung und in der Stereometrie), daß ich schon deswegen auch im Mädchenunterricht diesen schönen Abschluß nicht entbehren möchte. Das stereometrische Zeichnen ist natürlich deswegen ausdrücklich eingesetzt worden, damit die Raumanschauung gebührend zu ihrem Rechte kommt.

Im übrigen aber wird zugestanden werden müssen, daß der Lehrplan sich nach Inhalt und Fassung eng an die modernen Reformbestre-

bungen anschließt.[1]) Nach ihm unterrichten in Hamburg außer den staatlichen Anstalten noch eine Reihe von anerkannten privaten höheren Mädchenschulen, hie und da mit kleinen Abänderungen, während andere Anstalten sich dem preußischen Plane angeschlossen haben.

e) Über die Verhältnisse an nichtstaatlichen Anstalten.

Dem preußischen Plane folgen auch die Unterrichtsanstalten des Klosters St. Johannis, die außer einem Lyzeum mit zwei voll ausgebildeten Parallelzügen ein vierklassiges Oberlyzeum sowie eine in Entwicklung begriffene realgymnasiale Studienanstalt umfassen. Die Stundenzahlen für Rechnen sind aber am Lyzeum den preußischen Ansätzen gegenüber im Sinne des Hamburger Plans erhöht.

Nach der mir gewordenen Mitteilung wird am Lyzeum durchgenommen:

a) Im Rechnen:

Kl. X–VII: Die Grundrechnungsarten mündlich und schriftlich. Leichte Anwendungen auf Sortenverwandlung, Durchschnitts- und Schlußrechnung. Einführung der dezimalen Schreibweise für Maße, Gewichte und Münzen.

Kl. VI: Dezimalbruchrechnung. Einführung in die Bruchrechnung.

Kl. V: Bruchrechnung. Schlußrechnung. Berechnung von Zinsen und Zinsfuß.

Kl. IV (1 St.): Zins-, Gewinn-, Verlust-, Diskontrechnung. Später: Wiederholungen und Ergänzungen.

b) In der Mathematik:

Kl. IV (3 St.): Einführung in die Geometrie bis zur Kongruenz. – Addition, Subtraktion, Multiplikation mit allgemeinen Zahlen. Negative Zahlen. Einfache Gleichungen ersten Grades.

Kl. III: Parallelogramm. Konstruktionen. Sehnen, Tangenten und Winkel am Kreis. – Division. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

Kl. II: Inhaltsbestimmungen und Verwandlungen. Proportionalität. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.

Kl. I: Pythagoreischer Lehrsatz. Kreisberechnung. Ebenflächige Körper. Quadratwurzel. Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Obgleich es aus der Formulierung dieses Planes nicht hervorgeht, so kann ich doch hinzufügen, daß der nach ihm erteilte Unterricht die Hauptforderungen des Planes der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte (Einschränkung der formalen Operationen der Arithmetik und Algebra, Verwertung graphischer Methoden und Einführung in den Funktionsbegriff, besondere Pflege der Raumanschauung, Betonung der Anwendungen) beachtet.

Nicht unerwähnt darf bleiben, daß in Hamburg seit Ostern 1911 private Realgymnasialklassen für Mädchen bestehen, ins Leben gerufen vom Verein Frauenbildung-Frauenstudium. Dieses Unternehmen löst mit Unterstützung des Staates seine Aufgabe und bringt in der Mathematik in früher fünf-, jetzt sechsjährigem Kurs seine Zöglinge bis zur Reife eines Knabenrealgymnasiums, an dem die jungen Damen als Fremde ihre Reifeprüfung ablegen. Es wird interessieren, daß zu dem Zwecke

1) Vgl. R. Schimmack, diese IMUK-Abhandlungen, Bd. III, Heft 1, S. 84.

auch die Differentialrechnung bis zu einer recht ansehnlichen Vertiefung gelehrt wird. Aus meiner eigenen 7½ jährigen Praxis an dieser Anstalt berichte ich gern über den außerordentlich anerkennenswerten Fleiß und die meist völlig befriedigende, in einigen Fällen sogar recht gute Begabung der Damen und die sichere Erfassung des Stoffes, für die allerdings die unerläßliche Grundbedingung außerordentlich anschaulicher Unterrichtsweise und achtsamer Regelung des Unterrichtstempos erfüllt sein mußte.

Abgesehen von einigen Privatschulen, die auf der Unterstufe Knaben und Mädchen zusammen unterrichten, kennt man in Hamburg den Gemeinschaftsunterricht nicht.

Indessen hat die hamburgische Oberschulbehörde seit dem Jahre 1907 zwei Damen, die das Examen pro fac. doc. mit Hauptlehrbefähigung in Mathematik und Physik abgelegt hatten, zur praktischen Ausbildung an höheren Knabenanstalten (Oberrealschule vor dem Holstentore und Wilhelmgymnasium) zugelassen.

f) Oberlehrerinnenkurse.

Von Interesse dürfte es sein, daß in Hamburg auf Grund einer Prüfungsordnung, die mit der preußischen identisch ist, seit 14 Jahren auch die Oberlehrerinnenprüfung abgelegt werden kann. Die auf diese Prüfung hinarbeitenden Damen bereiten sich einige Jahren in besonderen Kursen vor, die von der Oberschulbehörde eingerichtet sind, aber von Ostern 1913 ab nicht wieder erneuert werden. Dabei hat die Mathematik auch Berücksichtigung gefunden. Die Zahl der Damen, die Mathematik wählten, ist etwa kaum ein halbes Dutzend; dabei trat die Mathematik einige Male mit Geographie oder Geschichte verbunden auf, einmal mit Deutsch und einmal mit Französisch. Es ist mir aber kein Fall bekannt, wo die Verbindung von Mathematik und Physik gewählt worden wäre.

C. Die übrigen nord- und mitteldeutschen Staaten mit Ausnahme von Sachsen.

1. Allgemeine Vorbemerkung.

Über die gegenwärtigen allgemeinen organisatorischen Verhältnisse des höheren weiblichen Bildungswesens der anderen nord- und mitteldeutschen Staaten gibt wieder in übersichtlicher Weise die schon oben (S. 103) genannte Arbeit von Thedens[1]) Auskunft. Man entnimmt daraus, daß die Staaten Braunschweig, Lippe-Detmold, Schaumburg-Lippe, Waldeck und Pyrmont, Sachsen-Weimar, Sachsen-Meiningen, Sachsen-Coburg-Gotha, Sachsen-Altenburg, Anhalt, Schwarzburg-Sondershausen, Schwarzburg-Rudolstadt und Reuß j. L. sich im großen und ganzen die preußischen Bestimmungen

1) Vgl. dort S. 27 bis 31.

von 1908 zu eigen gemacht haben. Geringe Abweichungen in den Stunzahlen fallen dabei nicht ins Gewicht. Es würde hier zu weit führen, wenn jede dieser Einzelheiten besonders erörtert werden sollte. Nur soweit das Rechnen und die Mathematik davon berührt sind, mögen einige Beispiele angeführt werden.

In einigen der in diesem Abschnitt behandelten Staaten ist in gewissem Grade der Gemeinschaftsunterricht von Knaben und Mädchen in höheren Knabenanstalten zugelassen, so in Braunschweig[1]), Lippe-Detmold[2]), Sachsen-Meiningen[3]), Sachsen-Coburg-Gotha[4]).

2. Verschiedene Einzelangaben.

a) Braunschweig.

In Braunschweig ist die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens durch ministerielle Verordnung vom 20. März 1912 geregelt.[5]) Die Bestimmungen erstrecken sich nur auf die zehnklassige höhere Mädchenschule (Lyzeum) und das höhere Lehrerinnenseminar (Oberlyzeum, bestehend aus drei wissenschaftlichen Klassen und einem praktischen Seminarjahr). Über Studienanstalten und Frauenschule sagen die Bestimmungen nichts. Inhaltlich decken sich die methodischen Bemerkungen und die Verteilung der Lehraufgaben auf die Klassen der in die Neuordnung einbezogenen Anstalten genau mit den preußischen Festsetzungen. In den Stundenzahlen bemerkt man jedoch eine Abweichung beim Rechnen für Kl. X bis VII einschließlich. Dort hat Braunschweig überall vier statt der drei preußischen Stunden.

Die Bestimmungen über die Lehrkräfte entsprechen den preußischen, desgleichen die Prüfungsordnungen für die Reifeprüfung und die Lehramtsprüfung am Oberlyzeum. Nach der neuen Prüfungsordnung ist laut Osterjahresbericht 1912 (Progr. Nr. 40) am Oberlyzeum zu Braunschweig zum ersten Male zu Ostern 1912 verfahren worden.

b) Schaumburg-Lippe.

An der Marienschule (fürstliches Lyzeum) zu Bückeburg in Schaumburg-Lippe treten — nach dem zweiten Jahresbericht, Schuljahr 1911/12, Progr. Nr. 51 — im mathematischen Unterricht einige Abweichungen hervor, die ich nennen möchte. In Kl. IV wird bereits der Koordinatenbegriff gebracht, in Kl. III wird schon die graphische Darstellung der Funktion ersten Grades behandelt, in Kl. II wird ausdrücklich genannt die arithmetische und graphische Lösung der Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten. Es liegt somit hinsichtlich des Be-

1) Vgl. die [S. 103] zitierte Abhandlung von Thedens, S. 27.
2) Ebenda S. 28. 3) Ebenda S. 30. 4) Ebenda S. 30 u. 31.
5) Vgl. Gesetz- und Verordnungssammlung, 1912, Nr. 23. (Bekanntmachung des Herzoglichen Staatsministeriums vom 20. März 1912, die Neuordnung der höheren Bildungsanstalten für die weibliche Jugend im Herzogtume Braunschweig betreffend.)

ginns der systematischen Berücksichtigung der Graphik ein früheres Einsetzen als in Preußen vor. Sonst aber stimmen die Stundenzahlen für Rechnen und Mathematik sowie die Schlußforderungen mit den preußischen überein.

An der mit dieser Anstalt verbundenen Frauenschule finden wir auch noch in den Lehrpensen die Mathematik (2 Std.) verzeichnet; durchgenommen wurde: Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen; Gleichungen ersten und zweiten Grades, graphische Lösung derselben; die Lehre vom Kreis, die Gleichheit und Ähnlichkeit der Figuren, Goniometrie und Einführung in die Trigonometrie, Konstruktionsaufgaben. Ob alle zehn Schülerinnen der Frauenschule an dem mathematischen Unterricht teilgenommen haben, ist aus dem Berichte nicht zu ersehen.

c) Sachsen-Weimar.

In Sachsen-Weimar scheint die einheitliche Ordnung, soweit die Lehrpläne in Frage stehen, noch nicht durchgeführt zu sein. Jedenfalls weisen die mir vorliegenden Jahresberichte des Sophienstifts zu Weimar und der städtischen höheren Mädchenschule in Jena einen verschiedenartigen Grad der Annäherung an die preußischen Pläne auf. Übereinstimmend lassen sie die stärkere Besetzung des Rechnens von Kl. IX bis VII einschließlich mit vier Stunden (statt drei) erkennen.

In Jena bestanden bis Ostern 1912 Realgymnasialkurse in Latein und Mathematik in Verbindung mit der höheren Mädchenschule. An ihrer Stelle soll jetzt eine realgymnasiale Studienanstalt nach preußischem Vorbilde eingerichtet werden (lt. Verfügung d. Großherz. Staatsministeriums vom 9. 11. 11). In den Kursen gelangten die Schülerinnen in der Mathematik bis zu den kubischen Gleichungen, dem Moivreschen Satz, zu den Lehren der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie der analytischen Geometrie.

In der ersten Klasse der mit derselben Anstalt verbundenen Frauenschule waren dem hauswirtschaftlichen Rechnen zwei Stunden gewidmet. Der Jahresbericht (1912) zählt das folgende durchgenommene Pensum auf:

„Praktisches Rechnen: Rechnungsvereinfachungen, Prozent- und Zinsrechnung. Der Verkehr mit den Sparkassen. Depositengelder bei den Banken: a) Kontokorrentabrechnung; b) Staffelauszug. – Die Anlegung von Geldern in Wertpapieren: a) fest verzinsliche Papiere, inländische Staats- und Kommunalpapiere, landschaftliche Pfandbriefe, Hypothekenpfandbriefe, Obligationen von industriellen Unternehmungen, ausländische festverzinsliche Papiere, Mündelsicherheit, Bewertung der einzelnen Effektenkategorien; b) Aktien, Kurse, Bohranteile; c) Kurszettellesen, Berechnung der Papiere, Aufbewahrung der Effekten. – Anlegung von Geldern in Hypotheken: Hypothek- und Grundschuld, Grund- und Hypothekenbuch, Taxationsberechnung. – Anlegung von Geldern in gewerblichen Unternehmungen: Offene Handelsgesellschaft, stille Teilhaberschaft, Kommanditgesellschaft, Aktien-Gesellschaft, Gesellschaft mit beschränkter Haftung, Genossenschaft. – Lebens- und Rentenversicherung. – Grundzüge der Buchführung."

Mir will es scheinen, als ob das eine ungeheure Stoffülle sei, in Ansehung der eigentlichen Zwecke der Frauenschule doch wohl etwas zu weitgehend, wenn es sich nicht nur um Begriffsfestsetzungen gehandelt haben sollte. Es fehlt aber die Durchnahme der verschiedenen sozialen Versicherungsformen, deren Kenntnis gerade für die künftigen Hausfrauen wertvoll ist.

d) Sachsen-Altenburg, Anhalt, Reuß j. L.

Einfacher hat die mit der Karolinenschule in Altenburg verbundene Frauenschule das Pensum im hauswirtschaftlichen Rechnen gestaltet, wofür aber auch nur eine Stunde angesetzt ist. Der Osterjahresbericht 1912 (Progr. Nr. 4) gibt an:

für Klasse II: Wiederholungen aus der Prozent-, Gewinn-, Verlust-, Gewichts-, Rabatt-, Gesellschafts- und Mischungsrechnung. Hauswirtschaftliches Rechnen. Gründung und Führung eines Geschäfts. (Kalkulationen). Staatliche Arbeiterfürsorge.

Klasse I: Wechsel- und Kontokorrentrechnungen. Kauf und Verkauf von Staatspapieren. Kranken-, Unfall-, Alters- und Invalidenversicherungen. Steuern. Voranschläge für das Haushaltungsbudget. Anlegen eines Wirtschaftsbuchs. Einfache Buchführung.

Anhalt hat dieselben Stundenzahlen wie Preußen außer in Klasse V, wo das Rechnen vier Stunden erhalten hat. Die Lehraufgaben für Rechnen und Mathematik stimmen aber, abgesehen von einer Vereinfachung für Klasse V mit den preußischen überein.

Für Reuß j. L. entnimmt man aus dem Jahresbericht über die Zabelsche höhere Töchterschule mit realgymnasialer Studienanstalt i. E. zu Gera (Ostern 1912, Progr. Nr. 115) gleichfalls die Anpassung an die preußische Neuordnung bis auf wenige „aus örtlichen Wünschen entsprungene“ Abweichungen, unter denen sich die Besetzung des Rechnens auf der Unterstufe (X–VIII) mit durchweg vier Stunden befindet. Im übrigen hat schon außer in ganz wenigen Punkten, die der Bericht erwähnt, aber für unsere Betrachtung belanglos sind, im Rechnen- und Mathematikunterricht enger Anschluß an die neuen Pläne stattgefunden.

e) Zum Frauenstudium in Thüringen.

An der thüringischen Landesuniversität Jena sind deutsche reichsangehörige Frauen unter den gleichen Bedingungen wie die Männer immatrikulationsfähig, „für die philosophische Fakultät auch dann, wenn sie die zur Erteilung des Unterrichts an einer höheren Mädchenschule befähigende Prüfung bestanden haben und Angehörige eines der bei der Universität Jena beteiligten Staaten sind. Lehrerinnen, die nach den Vorschriften vom 3. April 1909 in Preußen immatrikulationsfähig sind, werden auch in Jena als Vollstudentinnen aufgenommen. Andere reichsangehörige Frauen mit dem Lehrerinnenzeugnis können nicht immatrikuliert, wohl aber als Hörerinnen eingeschrieben werden. Zur Prüfung für das höhere Lehramt werden Frauen zugelassen, und zwar unter denselben Bedingungen, unter denen sie in ihrem Heimatlande zugelassen

werden."[1]) An der technischen Hochschule zu Braunschweig können Frauen mit dem Reifezeugnis, aber nicht solche mit dem Lehrerinnenzeugnis, immatrikuliert werden.[2])

D. Das Königreich Sachsen.

1. Allgemeines.

Für das höhere Mächenschulwesen im Königreich Sachsen ist es von Bedeutung, daß schon lange vor dem Erlaß der preußischen Maibestimmungen von 1894 die sächsischen zehnklassigen höheren Mädchenschulen nach dem Gesetze für höhere Schulen vom Jahre 1876 eingerichtet und eingeschätzt wurden, obwohl sie in dem Gesetze nicht besonders aufgeführt waren.[3]) Sachsen hatte vor Preußen damals also einen guten Vorsprung; wollte Sachsen aber nach dem Erscheinen der preußischen Augustbestimmungen nicht hinter dem gründlich reformierenden Nachbarlande zurückbleiben, so mußte es seinerseits auch an die Schaffung fester Normen für sein höheres weibliches Bildungswesen denken. Dieser wichtige Schritt wurde mit dem Gesetze vom 16. Juni 1910[4]) vollzogen.

2. Über die Organisation der Anstalten.

Die äußeren Formen, die das höhere Bildungswesen für Mädchen im Königreich Sachsen durch dieses Gesetz erhalten hat, werden durch das Schema auf der folgenden Seite verdeutlicht.

a) Die zehnklassige höhere Mädchenschule.

Es gibt also in Sachsen die neunjährigen Mädchen offenstehende siebenklassige höhere Mädchenschule (im allgemeinen ohne Vorschule[5])), deren Unterrichtsgang mit einer Abgangsprüfung schließt (§ 7_1). Diese Prüfung ist der Reifeprüfung der Realschule gleichwertig (§ 7_2), und die durch sie gewährten Berechtigungen werden durch die zuständigen Behörden festgesetzt (§ 7_3). An der höheren Mädchenschule sollen Lehrer und Lehrerinnen in annähernd gleicher Zahl wirken (§ 8_1); mindestens $^3/_5$ aller Lehrer und Lehrerinnen einer Anstalt, einschließlich

1) Vgl. die [S. 103] zitierte Abhandlung von Thedens, S. 31.

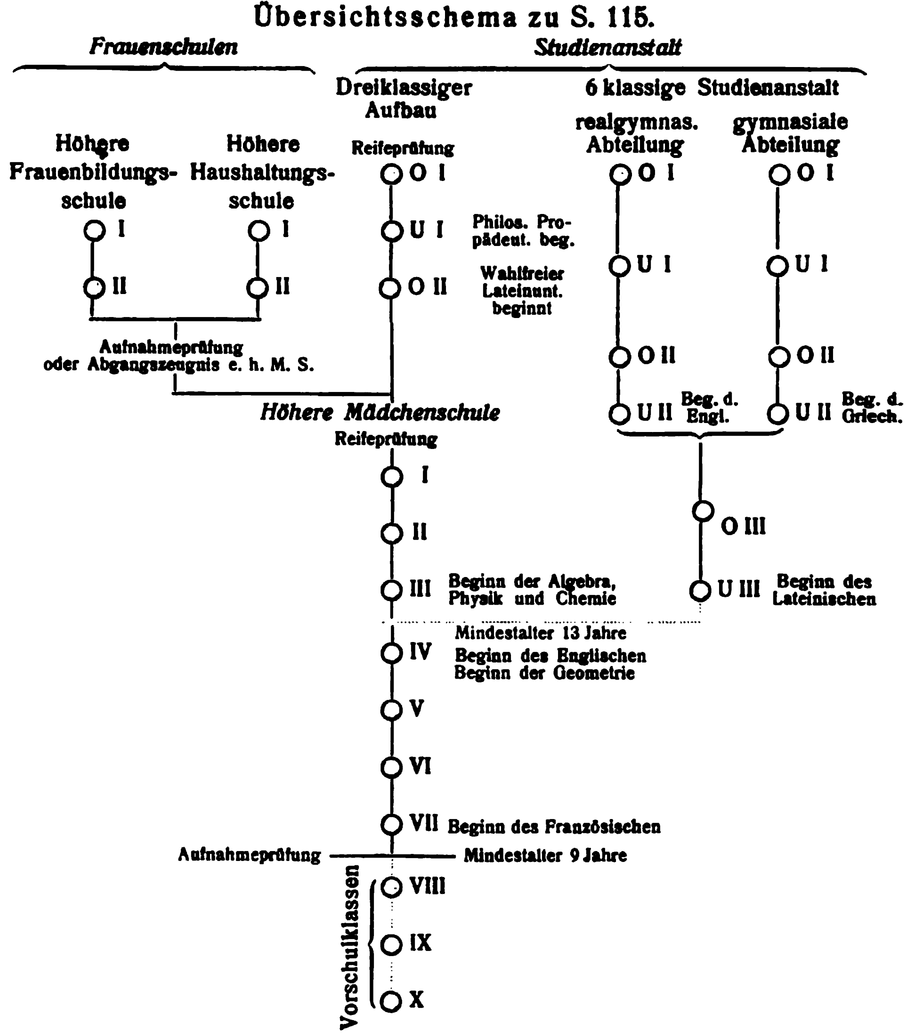
2) Ebenda S. 27.

3) Vgl. Döhler, die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens im Königreich Sachsen, Frauenbildung, 10. Jahrg. 1911, S. 524. – Ferner: Thedens, S. 42 und 43.

4) Gesetz über das höhere Mädchenbildungswesen vom 16. Juni 1910, Sonderabdruck aus dem Gesetz- und Verordnungsblatt für das Königreich Sachsen vom Jahre 1910, S. 140flg. (Druck und Verlag von C. C. Meinhold & Söhne, Dresden.)

5) § 5_4 des soeben genannten Gesetzes besagt: „Für diejenigen Schulen, die beim Inkrafttreten dieses Gesetzes auf Grund der Ständischen Ermächtigung vom 30. Juni 1876 als zehnklassige höhere Mädchenschulen bestehen, kann die Einrichtung von drei Vorschulklassen (X–VIII) nachgelassen werden unter der Voraussetzung, daß für die Klassen VII–I die in dem vorliegenden Gesetze gegebenen Bestimmungen durchgeführt werden.

Übersichtsschema zu S. 115.



des Direktors, müssen akademisch vorgebildet sein (§ 8_2). Lehrer und Lehrerinnen mit der Kandidatur der Pädagogik[1]) sind überall in gleicher Weise verwendungsfähig wie solche mit der Kandidatur für das höhere Schulamt (§ 8_2). Seminaristisch vorgebildete Lehrkräfte, sowie Fachlehrer und Fachlehrerinnen mit gleicher Vorbildung sind im übrigen anstellungsfähig und in allen Klassen verwendbar (§ 8_3).

Hinsichtlich des Gehalts stehen die an den höheren Mädchenschulen angestellten Lehrer den gleichartig vorgebildeten Lehrern an den staatlich unterstützten Realschulen (§ 9_1), die Lehrerinnen der höheren Mädchenschulen den gleichartig vorgebildeten Lehrerinnen an den staatlichen

1) Darüber wird H. Dreßler noch in diesen IMUK-Abhandlungen, Ergänzungsheft zu Bd. II berichten.

Lehrerinnen-Seminaren (§ 9_2) gleich. Privatschulen dürfen die Bezeichnung „höhere Mädchenschule“ oder eine gleichartige Bezeichnung nur führen, wenn sie den Vorschriften betr. der Klassenzahl und der Lehrkräfte entsprechen.

b) Die beiden Formen der Studienanstalt: die sechsklassige Abgabelung und der dreiklassige Aufbau.

Zweitens bestehen im Königreich Sachsen Studienanstalten, die die Vorbereitung auf das Studium vermitteln sollen. Es gibt zwei Formen: a) die sechsklassige Lehranstalt nach Art des Reformrealgymnasiums, nach Befinden mit Gabelung in eine realgymnasiale und eine gymnasiale Abteilung mit den Klassen Untertertia bis Oberprima. Diese Art der Studienanstalt kann selbständig oder mit einer höheren Mädchenschule verbunden bestehen; b) den dreiklassigen Aufbau der höheren Mädchenschule mit deren wissenschaftlichen Unterrichtsfächern unter Hinzutritt von philosophischer Propädeutik und Psychologie sowie mit wahlfreiem Lateinunterricht; diese Art der Studienanstalt muß mit einer höheren Mädchenschule verbunden sein (§ 12).

In die Studienanstalten dürfen nur Schülerinnen auf Grund einer Aufnahmeprüfung aufgenommen werden. Die Abgangsprüfung der höheren Mädchenschule ersetzt die Aufnahmeprüfung für die dreiklassige Studienanstalt (§ 14). Die Studienanstalten schließen ihren Lehrgang mit einer Reifeprüfung, die nur an einer öffentlichen Anstalt abgelegt werden kann. Die Reifeprüfung der sechsklassigen Studienanstalt ist derjenigen der entsprechenden gymnasialen Knabenanstalt, die an der dreiklassigen Studienanstalt der Reifeprüfung an der Oberrealschule gleichwertig. Die durch die Prüfungszeugnisse gewährten Berechtigungen werden durch die oberste Schulbehörde festgesetzt (§ 15). Außer technischen Lehrkräften dürfen an den Studienanstalten nur Lehrkräfte mit der Kandidatur des höheren Schulamts oder der Pädagogik, und zwar Herren und Damen in annähernd gleicher Zahl unterrichten (§ 16_1). Die Leitung einer Studienanstalt darf nur einem Direktor mit der Kandidatur des höheren Schulamts übertragen werden (§ 16_2).

Die Lehrer an Studienanstalten werden wie die mit gleichartiger Vorbildung an den staatlichen Gymnasien, die Lehrerinnen an den Studienanstalten wie die gleichartig vorgebildeten an den staatlichen Lehrerinnenseminaren besoldet (§ 17). Privatschulen dürfen die Bezeichnung „Studienanstalt“ oder eine gleichartige Bezeichnung führen, wenn sie den Vorschriften betr. Organisation der Anstalt und der Lehrkräfte entsprechen (§ 18_1).

c) Die Frauenschulen.

Drittens kennt man in Sachsen die Frauenschule, deren Bestimmung es ist, ohne zum Studium hinzuleiten, der wissenschaftlichen Weiterbildung der weiblichen Jugend, und der Vorbereitung der Mädchen auf den besonderen Beruf der Hausfrau zu dienen. Es gibt zwei Formen:

die höhere Frauenbildungsschule und die höhere Haushaltungsschule, die für sich gesondert oder mit einander verbunden bestehen können, aber immer in Verbindung mit einer höheren Mädchenschule oder einer Studienanstalt (§ 19 u. 20). Zum Eintritt berechtigt das Abgangszeugnis der höheren Mädchenschule oder eine Aufnahmeprüfung (§ 22). Der Unterricht wird von akademisch gebildeten Lehrkräften erteilt.

d) Die Koedukation.

Das Gesetz enthält auch noch Übergangsbestimmungen u. a. betr. des Gemeinschaftsunterrichts. Es können bis Ablauf des Jahres 1920 mit Genehmigung der obersten Schulbehörde Mädchen ausnahmsweise in die Mittel- und Oberklassen der Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen sowie der Klassen III bis I der Realschulen eintreten. Ausgeschlossen ist die Zulassung in die Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen, sobald eine Studienanstalt, die Zulassung in die Realschulen, sobald eine höhere Mädchenschule am Orte vorhanden oder von diesem aus ohne größere Schwierigkeiten zu erreichen ist. Bei höheren Knabenanstalten, die von Gemeinden unterhalten werden, ist für die Zulassung von Mädchen die Genehmigung der zuständigen Gemeindevertretung erforderlich (§ 25).

Die vorstehenden Bestimmungen, die ja zunächst mehr allgemeiner Natur sind, haben deshalb hier Aufnahme gefunden, weil sie, auf den mathematischen Unterricht angewandt, auch für diesen im Einzelfalle besondere Ausbildungsmöglichkeiten einschließen.

3. Die Stundentabellen.

Das Urteil über die Stellung des Rechen- und Mathematikunterrichts unter der Gesamtheit der Fächer ermöglichen die vorgeschriebenen Stundentabellen, die ich ausführlich auf S. 119 und 120 mitteile.

Dem preußischen Plane gegenüber tritt als charakteristisch hervor das dem Rechnen und der Mathematik im allgemeinen eingeräumte größere Gewicht hinsichtlich der Stundenzahl. Die sächsische höhere Mädchenschule besitzt ein Mehr von 5 Stunden (d. h. rund 200 Unterrichtsstunden), die dem Rechnen zugute kommen; die höhere Mädchenschule + 3klassige Studienanstalt in Sachsen verfügt allerdings nur über 1 Stunde mehr als die entsprechenden Klassen der preußischen höheren Mädchenschule + Oberrealschulkurse. Die sächsische sechsklassige Studienanstalt, gleichviel ob in realgymnasialer oder gymnasialer Ausgestaltung, hat einschließlich der ihr vorangehenden höheren Mädchenschulklassen sogar 8 Stunden mehr als das ihr entsprechende preußische Gebilde.

Man darf daher schon mutmaßen, daß in Sachsen das Lehrziel im Rechnen und in der Mathematik sich mit größerer Sicherheit erreichen lassen wird, da von vornherein auf ein gutes Zeitmaß Bedacht genommen ist.

Einen Nebenumstand darf man hierbei jedoch nicht unbeachtet lassen, nämlich daß in Sachsen durchweg die Pflichtstundenzahl in den beiden

Erste Tabelle zu S. 118.

a) Höhere Mädchenschule und dreiklassige Studienanstalt.

	Höhere Mädchenschule Klasse											Studienanstalt			
	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I	Summe	O II	U I	O I	Summe
Religion	2	2	3	3	3	3	2	2	2	2	24	2	2	2	6
Deutsche Sprache	9	6	8	5	5	5	4	4	4	4	54	4	4	4	12
Französische Sprache	—	—	—	6	5	5	4	4	4	4	32	4	4	4	12
Englische Sprache	—	—	—	—	—	—	4	4	4	4	16	3	3	3	9
Anschauungsunterricht	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	6	—	—	—	—
Geschichte	—	—	—	—	2	2	2	2	2	2	12	3	2	2	7
Kunstgeschichte	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—
Heimat- und Erdkunde	—	—	2	2	2	2	2	2	2	2	16	1	1	1	3
Naturgeschichte	—	—	—	2	2	2	2	1	1	1	11	1	1	1	3
Naturlehre (Physik, Chemie)	—	—	—	—	—	—	—	3	4	3	10	4	4	4	12
Rechnen u. Mathematik	3	4	4	4	4	4	3	3	3	3	35	5	5	5	15
Philosophische Propädeutik u. Psychologie	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2
Zeichnen	—	—	1	1	1	2	2	2	2	2	13	2	2	2	6
Schreiben	siehe Deutsch	3	2	1	1	—	—	—	—	—	7	—	—	—	—
Turnen	—	1	2	2	2	2	2	2	2	2	17	2	2	2	6
Gesang und Musiklehre	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	15	1	1	1	3
Nadelarbeiten	—	2	2	2	2	2	2	2*	2*	2*	12 (18)	—	—	—	—
Lateinische Sprache	—	—		—	—	—	—	—	—	—	—	3—4*	3—4*	3—4*	9—12*
Stenographie	—	—		—	—	—	2*	1*	—	—	3*				
	18	22	26	30	30	30	30 (32)	31 (34)	32 (34)	32 (34)	281 (290)	32 (35—36)	32 (35—36)	32 (35—36)	96 (105—108)

* wahlfrei

obersten Klassen der höheren Mädchenschule und den Klassen der Studienanstalten höher gegriffen ist als in Preußen. Als ein Vorzug ist das sicherlich nicht anzusehen.

4. Die Lehrziele im Rechnen und in der Mathematik.

a) Höhere Mädchenschule.[1])

Die Schülerinnen sollen Sicherheit und Gewandtheit im mündlichen und schriftlichen bürgerlichen Rechnen, namentlich auf dem Gebiete der Hauswirtschaft, des Spar- und Versicherungswesens und der einfachen Vermögensverwaltung, sowie Verständnis für die Gründe des einzuschlagenden Verfahrens besitzen.

In der Arithmetik und Algebra sollen sie imstande sein, nicht zu schwierige Ausdrücke auf die einfachsten Formen zu bringen, Gleichungen ersten Grades mit einer oder mehreren Unbekannten und solche zweiten Grades mit einer Unbekannten zu lösen.

1) Vgl. das sächsische Gesetz, Sonderabdruck, Lehr- und Prüfungsordnung für die höhere Mädchenschule und die dreiklassige Studienanstalt, § 51 (S. 40).

Zweite Tabelle zu S. 118.

Die nachfolgende Tabelle ist so gestaltet, daß sie sich auch über die vor der sechsklassigen Studienanstalt zu absolvierenden Klassen mit erstreckt; ferner sind auch die Fächer der Tabelle a), welche für b) keine Rolle spielen, mit aufgenommen worden, damit der Vergleich zwischen a) und b) leichter durchzuführen ist. In dem sächsischen Gesetze (s. S. 141) ist die sechsklassige Studienanstalt gesondert aufgeführt.

b) Höhere Mädchenschule und sechsklassige Studienanstalt.[1])

	Höhere Mädchenschule Klasse								Studienanstalt						
	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	Summe	U III	O III	U II r g	O II r g	U I r g	O I r g	Summe
Religion	2	2	3	3	3	3	2	18	2	2	2	2	2	2	12
Deutsch	9	6	8	5	5	5	4	42	3	3	3	3	3	3	18
Lateinisch	—	—	—	—	—	—	—	—	8	8	5 6	5 6	5 6	5 6	r 36; g 40
Griechisch	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	— 8	— 8	— 8	— 8	—; g 32
Französisch	—	—	—	6	5	5	4	20	4	4	3 2	3 2	3 2	3 2	r 20; g 16
Englisch	—	—	—	—	—	—	4	4	—	—	5 —	4 2*	4 2*	4 2*	r 17; g 6*
Anschauungsunterricht	3	3	—	—	—	—	—	6	—	—	—	—	—	—	—
Geschichte	—	—	—	—	2	2	2	6	2	2	2	2	2	2	12
Kunstgeschichte	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Heimat- und Erdkunde	—	—	2	2	2	2	2	10	2	2	2	1	1	1	9
Naturgeschichte u. Chemie	—	—	—	2	2	2	2	8	2	2	3 1	3 1	3 1	3 1	r 16; g 8
Physik	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	3 2	3 2	3 2	r 11; g 8
Rechnen u. Mathematik	3	4	4	4	4	4	3	26	4	4	4 3	5 4	5 4	5 4	r 27; g 23
Philosophische Propädeutik u. Psychologie	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Zeichnen	—	—	1	1	1	2	2	7	2	2	1 1*	1 1*	1	1	8 2*
Schreiben	siehe Deutsch	3	2	1	1	—	—	7	—	—	—	—	—	—	—
Turnen	—	1	2	2	2	2	2	11	2	2	2	2	2	2	12
Gesang	1	1	2	2	1	1	1	9	2	2	1*	1*	1*	1*	4 4*
Nadelarbeiten	—	2	2	2	2	2	2	12	—	—	—	—	—	—	—
Stenographie	—	—	—	—	—	—	2*	2*	2*	2*	—	—	—	—	4*
Darstellende Geometrie	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2* —	2* —	r 4*; —
	18	22	26	30	30	30	30(32)	186(188)	33(35)	33(35)	34 (36)	r 34 (36) g 34 (38)	34 (37)	34 (37)	r 202 (216) g 202 (218)

* wahlfrei

In der Geometrie ist die Kenntnis der wichtigsten Eigenschaften des Dreiecks, der Vielecke und des Kreises sowie die Fähigkeit zu erweisen, einfache Konstruktions- und Berechnungsaufgaben aus dem bezeichneten Gebiete und Berechnungen von Oberfläche und Inhalt einfacher Körper mit Verständnis auszuführen.

b) Studienanstalten.

Für die dreiklassige Studienanstalt wird festgesetzt[1]):

In der Arithmetik und Algebra sollen die Schülerinnen einen klaren Überblick über den Aufbau der sieben Rechnungsarten haben, arithmetische Umformungen geschickt und mit Verständnis für die Gründe des Verfahrens ausführen können, den Begriff Funktion im Rahmen des Schulunterrichts erfaßt haben und imstande sein, nicht zu schwere Aufgaben aus dem Anwendungsgebiete der einfacheren unendlichen Reihen und des binomischen Lehrsatzes, dazu auch Gleichungen mit zwei Unbekannten vom zweiten Grade zu lösen.

In der Geometrie sollen sie im Rahmen des Schulunterrichts sichere Kenntnisse im Gebiete der Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie und der elementaren mathematischen Geographie besitzen und nicht künstlich schwer gemachte Aufgaben lösen können.

Für die sechsklassige Studienanstalt lautet die entsprechende Vorschrift[2]) genau so, nur wird von den Schülerinnen der realgymnasialen Abteilung in der Algebra noch die Fähigkeit, kubische Gleichungen zu lösen, verlangt; in der Geometrie müssen sie außerdem noch die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene beherrschen.

In dem wahlfreien darstellend-geometrischen Unterricht wird von den Schülerinnen der realgymnasialen Abteilung gefordert[3]):

Fertigkeit im Gebrauch der Zeicheninstrumente; einige Übung in der räumlichen Anschauung; Bekanntschaft mit der rechtwinkligen und schiefwinkligen Projektion.

5. Die Lehraufgaben

gebe ich ähnlich wie bei Preußen in tabellarischer Nebeneinanderstellung (s. S. 122 und 123).

6. Aus den „Bemerkungen“ zu den Lehrplänen.

Der Verteilung des Lehrstoffs auf die einzelnen Klassen der verschiedenen Anstaltsarten hat die Regierung die Bemerkung angefügt, daß eine ganz ins einzelne gehende Festlegung des Stoffes nicht hat vorgenommen werden sollen, damit der Freiheit der Lehrkräfte gerade wegen der Neuheit des Gegenstandes an den höheren Mädchenbildungsanstalten auch der nötige Spielraum bleibe.

Indessen enthalten die Lehrordnungen doch noch manche Zusätze allgemeinerer Art, die ihrem Wesen nach auch hier gestreift werden müssen. Besonderer Wert wird darauf gelegt, daß die an einer und derselben Anstalt beschäftigten Lehrpersonen es an der nötigen Verständigung über methodische Fragen und an der genauen Beachtung der getroffenen Vereinbarungen nicht fehlen lassen. Im Vordergrunde des mathematischen Unterrichts, von dem gemutmaßt wird, daß die Erfassung des durch ihn gebotenen Stoffes der Begabung der meisten Mädchen ferner liegt, soll das Wesentliche stehen, und als Hauptauf-

1) Vgl. das sächsische Gesetz, Sonderabdruck, Lehr- und Prüfungsordnung für die höhere Mädchenschule und die dreiklassige Studienanstalt, S. 42 § 54.

2) Vgl. Das sächsische Gesetz, Lehr- und Prüfungsordnung für die sechsklassige Studienanstalt, § 36 (S. 128). 3) Ebenda, S. 132.

Tabelle zu S. 121.

	Höhere Mädchenschule		
	Rechnen.		
Kl. X.	Der Zahlenraum von 1–20 in allseitiger Behandlung.		
Kl. IX	Die vier Grundrechnungsarten im Zahlenraum 1–100. Das kleine Einmaleins. Viel Kopfrechnen mit unbenannten Zahlen. Sortenverwandeln. Rechnen mit verschieden benannten Zahlen. – Wöchentlich eine Arbeit in Reinschrift.		
Kl. VIII	Der Zahlenraum von 1–1000. Zählmaße, Zeitmaße, Münzen. Sortenverwandeln. Einübung der schriftlichen Lösungsformen. Viel Kopfrechnen. – Wöchentlich eine Arbeit in Reinschrift.		
Kl. VII	Die vier Grundrechnungsarten im höheren Zahlenraume mit benannten und unbenannten ganzen Zahlen. Längen- und Flächenmaße, Hohlmaße, Gewichte; Münzen und Zeitmaße. Übungen in der dezimalen Schreibweise und den einfachsten Rechnungen mit benannten Dezimalzahlen. Häufiges Kopfrechnen mit kleinen Zahlen. – Alle zwei Wochen eine Arbeit in Reinschrift.		
Kl. VI	Übungen im Rechnen mit benannten Dezimalzahlen. Teilbarkeit der Zahlen. Das größte gemeinschaftliche Maß und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Rechnen mit gemeinen und Dezimalbrüchen. Der einfache Dreisatz. Alle zwei Wochen eine Arbeit in Reinschrift.		
Kl. V	Zusammengesetzte Aufgaben aus der Bruchrechnung. Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt. Schlußrechnung. Einfache Beispiele der Prozent- und Zinsrechnung. – Alle zwei Wochen eine Arbeit in Reinschrift.		
Kl. IV	*Mathematik und Rechnen.* *Rechnen:* Prozent- und Zinsrechnung. *Geometrie:* Einführung in die Planimetrie nach vorausgegangener Besprechung der einfachen Körper. Übungen mit Lineal, Maßstab, Zirkel und Winkelmesser. Systematische Behandlung der Lehre von den Linien, Winkeln und Dreiecken (Symmetrie und Kongruenz). Zeichenübungen. Alle zwei Wochen eine Arbeit in Reinschrift.		
	Höhere Mädchenschule (Fortsetzung).		**Sechsklassige Studienanstalt.**
Kl. III	Abschluß des *Rechnens.* Einfache Aufgaben aus der Zinseszinsrechnung. Effektenrechnung. Aufgaben aus dem Wirtschaftsleben und der sozialen Gesetzgebung. *Geometrie:* Geometrische Örter. Erweiterung der Dreieckslehre. Viereck und besonders Parallelogramm. Anfänge der Kreislehre. *Arithmetik und Algebra:* Die vier Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Faktorenzerlegung. Einfache Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. In Mathematik alle drei Wochen eine Arbeit in Reinschrift; außerdem eine kleine Zahl von Rechenarbeiten in Reinschrift.	Kl. U III	*Geometrie:* Anschauliche Entwicklung der geometrischen Grundbegriffe. Unterweisung im Gebrauch der Zeicheninstrumente. Dazu Übungen im Lösen leichter Zeichnungsaufgaben mit Gewinnung anschaulicher Beweismittel. Die Lehre von der Geraden, Winkeln und Dreiecken bis zu den Kongruenzsätzen einschließlich. Einfache Konstruktionsaufgaben. *Arithmetik und Algebra:* Die vier Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Angesetzte und Textgleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.
Kl. II	*Geometrie:* Fortsetzung der Kreislehre. Flächenvergleichung und -Berechnung. *Arithmetik und Algebra:* Bruchrechnung mit allgemeinen Zahlen. Potenzen mit ganzen Exponenten. Ausziehen der Quadratwurzel. Proportionen. Gleichungen ersten Grades mit ein und zwei Unbekannten. Alle drei Wochen eine Arbeit in Reinschrift.	Kl. O III	*Geometrie:* Anwendungen der Kongruenzsätze. Das Viereck. Der Kreis. Zahlreiche Konstruktionsaufgaben. *Arithmetik und Algebra:* Zerlegung in Faktoren. Rechnung mit Brüchen in allgemeinen Zahlen. Proportionen in knapper Behandlungsweise. Potenzen mit ganzen positiven Exponenten. Ausziehen der Quadratwurzel. Fortgesetzte Übungen im Ansetzen und Lösen von Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten.

<table>
<tr><th></th><th></th><th></th><th>Realgymn.-Abt.</th><th>Gymn.-Abt.</th></tr>
<tr><td>Kl. I</td><td>Geometrie: Proportionalität und Ähnlichkeit. Regelmäßige Vielecke. Kreisberechnung. Berechnung von Oberfläche und Inhalt einfacher Körper.
Arithmetik und Algebra: Potenzen und Wurzeln. Gleichungen ersten Grades mit zwei und mehr Unbekannten; einfache Gleichungen zweiten Grades.
Arbeiten in Reinschrift wie in Klasse II.</td><td>Kl. U II</td><td colspan="2">Geometrie.
Flächenvergleichung und Flächenausmessung. Konstruktionen und Berechnungen.
Proportionalität und Ähnlichkeit.
Arithmetik und Algebra.
Potenzen und Wurzeln. Weitere Gleichungen ersten Grades, aber vorwiegend Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.</td></tr>
<tr><td>Kl. O II</td><td>Dreiklassige Studienanstalt.
Geometrie: Wiederholung der Planimetrie. Harmonische Punkte und Strahlen.
Arithmetik und Algebra: Logarithmen und Anwendungen. Die imaginären und komplexen Zahlen. Die Zahlenebene. Systematische Zusammenfassung der sieben Rechnungsarten. Gemischtquadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.
Alle vier Wochen eine Arbeit in Reinschrift.</td><td>Kl. O II</td><td>Geometrie.
Regelmäßige Vielecke. Ausmessung des Kreises. Goniometrie und Trigonometrie in knapper Behandlungsweise.</td><td>Proportionalität und Ähnlichkeit. Regelmäßige Vielecke. Ausmessung des Kreises.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">Arithmetik und Algebra.
Die imaginären und komplexen Zahlen. Die Zahlenebene. Logarithmen mit Anwendungen, insbesondere auf Kubikwurzeln. Systematische Zusammenfassung der sieben Rechnungsarten; Rückblick auf die nach und nach nötig gewordene Erweiterung des Zahlbegriffs durch Bildung der negativen, der gebrochenen, der irrationalen und der imaginären Zahl. Gleichungen zweiten Grades mit einer und zwei Unbekannten.</td></tr>
<tr><td>Kl. U I</td><td>Stereometrie in Verbindung mit den Elementen der darstellenden Geometrie. Konstruktive und rechnerische Aufgaben.
Arithmetik und Algebra: Arithmetische und geometrische Reihen nebst Anwendungen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten.
Schriftliche Arbeiten wie in Obersekunda.</td><td>Kl. U I</td><td>Geometrie.
Stereometrie. Kegelschnitte in elementarer Behandlungsweise. Konstruktive und rechnerische Aufgaben aus beiden Gebieten. Mathematische Erdkunde.</td><td>Goniometrie und Trigonometrie in knapper Behandlungsweise. Stereometrie I. Teil.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">Arithmetik und Algebra.
Arithmetische und geometrische Reihen nebst Anwendungen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Eingestreute Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten.</td></tr>
<tr><td>Kl. O I</td><td>Geometrie: Abschluß der Stereometrie. Kegelschnitte in elementarer Behandlungsweise. Mathematische Geographie. Wiederholungen und Rückblicke.
Arithmetik und Algebra: Binomischer Lehrsatz. Einfache unendliche Reihen. Eingestreute Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Graphische Darstellungen von Funktionen. Zusammenfassende Wiederholungen und vertiefende Rückblicke.
Acht Arbeiten in Reinschrift (einschließlich der Prüfungsarbeit).</td><td>Kl. O I</td><td>Geometrie.
Analytische Geometrie der Ebene, insbesondere der Kegelschnitte. Wiederholungen und zusammenfassende Rückblicke.</td><td>Stereometrie II. Teil. Kegelschnitte in elementarer Behandlungsweise. Mathematische Geographie. Wiederholungen und zusammenfassende Rückblicke.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Arithmetik und Algebra.
Kubische Gleichungen in knapper Behandlungsweise.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">Binomischer Lehrsatz. Einfache unendliche Reihen. Eingestreute Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Wiederholungen und Rückblicke.</td></tr>
</table>

gabe des Unterrichts wird es hingestellt, die Schülerinnen zu gewandtem, sicheren Auffassen, zu kurzer, knapper, ungekünstelter Darstellungsweise heranzubilden. Der Gedächtnisstoff soll auf das Allernotwendigste eingegrenzt werden; nicht die Menge der Kenntnisse, sondern der Grad ihrer Beherrschung soll ausschlaggebend sein. Beständige Anregung der Mädchen zur Selbsttätigkeit unter Vermeidung vorschneller Hilfen wird als ein Bildungsmittel von besonderem Werte hingestellt. Der neueren Methodik – gemeint sind, ohne daß es näher ausgesprochen wird, die modernen Reformbestrebungen – wollen die Bemerkungen zu den Lehrordnungen die gebührende Beachtung sichern; es wird hingewiesen auf die Verwendung „karierten Papiers"; und ganz im Sinne der Breslauer Vorschläge der Unterrichtskommission liegt es doch auch, wenn gewarnt wird vor zu frühem Einsetzen abstrakter Ideengänge und vor Formelüberladung. Auch darin findet sich ein weiterer Berührungspunkt, daß der mathematische Unterricht, der planmäßig durch den Rechenunterricht vorbereitet werden soll, seinerseits immer die rückwärtige Verbindung mit dem Rechenunterricht zu halten hat.

7. Die Prüfungen.

Die sächsische Neuordnung trifft genaue Bestimmungen über das Prüfungswesen an den höheren Mädchenbildungsanstalten. Drei Arten von Prüfungen beanspruchen unser besonderes Interesse: 1) die Jahresprüfungen, 2) die Abgangsprüfung beim Abschluß des Lehrganges der höheren Mädchenschule, 3) die Reifeprüfung an der dreiklassigen und sechsklassigen Studienanstalt.

a) Die Jahresprüfungen.

Die Jahresprüfungen[1]) erfolgen gegen Schluß des Winterhalbjahres in allen Klassen und bestehen aus einem schriftlichen und mündlichen Teil. Außer den sprachlichen Arbeiten ist an der höheren Mädchenschule in den Klassen VII–V eine Rechenarbeit[2]), in den Klassen IV–I eine mathematische Arbeit[3]) sowie an den Studienanstalten in allen Klassen eine mathematische Arbeit[4]) anzufertigen. Für die Rechenarbeiten beträgt das Höchstzeitmaß 2 Stunden, für die mathematische Arbeit haben an der höheren Mädchenschule die Schülerinnen der Klassen IV und III $2^1/_2$ Stunden,[5]) diejenigen der Klassen II und I 3 Stunden zur Verfügung.[6]) An der dreiklassigen Studienanstalt sind für die Anfertigung der mathematischen Arbeit 4 Stunden,[7]) an der sechsklassigen Studienanstalt 3 bis 4 Stunden[8]) zu gewähren. Über

1) Vgl. Sonderdruck aus dem Gesetz- und Verordnungsblatt für das Königreich Sachsen vom Jahre 1910, Seite 140ff., S. 66ff. und S. 145ff.

2) Ebenda, S. 66 (§ 101). 3) Ebenda, S. 66 (§ 101).

4) Ebenda, S. 66 (§ 101) und S. 146 (§ 62). 5) Ebenda, S. 66 (§ 101).

6) Ebenda, S. 66 (§ 101). 7) Ebenda, S. 66 (§ 101).

8) Ebenda, S. 146 (§ 62).

Zahl und Art der Aufgaben finden sich in den Bestimmungen keine Angaben; nur ganz allgemein wird gesagt, daß die Prüfungsarbeiten vermöge ihres tunlichst zusammenfassenden Charakters noch mehr als die übrigen einzelnen schriftlichen Arbeiten den Stand des Wissens und Könnens der Schülerinnen bekunden und zugleich zeigen sollen, was die Klassen und die einzelnen Schülerinnen ohne Beihilfe innerhalb einer bestimmten Zeit zu leisten vermögen.[1]) Die Prüfungsarbeiten müssen dem Unterrichtsziele der Klassen entsprechen.[2]) An der höheren Mädchenschule und der dreiklassigen Studienanstalt sind sie vorher dem Schulleiter vorzulegen[3]); an der sechsklassigen Studienanstalt kann der Rektor verlangen, daß sie ihm vor der Prüfung zur Genehmigung vorgelegt werden.[4]) Der schriftlichen Prüfung folgt kurz vor Ostern eine öffentliche mündliche Prüfung, zu der die Behörden, die an der Schule ein Interesse haben, sowie auch die Angehörigen der Schülerinnen und die Freunde der Anstalt einzuladen sind.[5]) Bei der mündlichen Prüfung, die in ungekünstelter und mit den Schülerinnen nicht vorbereiteter Weise Einblicke in die von der Schule gepflegte Lehr- und Lernarbeit geben soll, sind die Prüfungsarbeiten durchgesehen und beurteilt aufzulegen.[6]) Alle Klassen[7]) sind in mindestens je einem Fache zu prüfen.[8]) Es muß demnach nicht in jeder Klasse im Rechnen und in der Mathematik geprüft werden, aber es kann jedoch hie und da geschehen. Für ein einzelnes Jahr darf die mündliche Prüfung nur mit ministerieller Genehmigung ausfallen.[9]) Wie zu erwarten ist, sollen die Jahresprüfungen neben den Klassenleistungen die Unterlagen für die Versetzungsbeschlüsse abgeben.[10]) Unstatthaft ist die Versetzung einer Schülerin in die nächsthöhere Klasse, wenn sowohl die mündlichen wie schriftlichen Leistungen einer Schülerin in einem der sprachlichen Fächer oder im Rechnen (Mathematik) „ungenügend" sind und dieser Ausfall nicht mindestens durch „gute Leistungen" in anderen Fächern der genannten Art ausgeglichen wird.[11]) Diese Vorschrift verschafft dem Rechnen und der Mathematik in unzwei-

---

1) Vgl. Sonderdruck aus dem Gesetz- und Verordnungsblatt für das Königreich Sachsen vom Jahre 1910, S. 66 (§ 100).

2) Ebenda, S. 67 (§ 101) und S. 146 (§ 62). 3) Ebenda, S. 67 (§ 101).

4) Ebenda, S. 146 (§ 62).

5) Ebenda, S. 67 (§ 102) und S. 146 (§ 63); doch kann laut S. 66 (§ 100) für die oberen Klassen der höheren Mädchenschule und die Klassen der dreiklassigen Studienanstalt vom Schulleiter die Öffentlichkeit beschränkt oder auch aufgehoben werden. Für die sechsklassige Studienanstalt ist eine derartige Befugnis nicht vorgesehen.

6) Ebenda, S. 67 (§ 102) und S. 146 (§ 63);

7) Außer OI der sechsklassigen Studienanstalt (vgl. S. 146 (§ 63).

8) Ebenda, S. 67 (§ 102) und S. 146 (§ 63).

9) Ebenda, S. 67 (§ 102) und S. 146 (§ 63).

10) Ebenda, S. 67 (§ 103) und S. 147 (§ 64).

11) Ebenda, S. 68 (§ 104); für die sechsklassige Studienanstalt ist eine solche Bestimmung nicht erlassen worden.

deutiger Weise die gebührende Geltung, weil ein völliges Versagen in diesen Fächern ohne Ausgleichsobjekt für die betreffenden Schülerinnen verhängnisvoll werden muß. Aber auch nach erfolgter Versetzung kann – allerdings nur in besonders dringenden Fällen – eine zu Ostern aufgerückte Schülerin zu Pfingsten oder Johanni in die frühere Klasse zurückversetzt werden, wenn sie sich unfähig erweist, in der höheren Klasse mit fortzukommen.[1]) Auch nach dieser Richtung könnte das mathematische Fach gelegentlich beteiligt sein.

Im allgemeinen dürfte wohl die Meinung dahin gehen, daß solche Jahresprüfungen, wie sie die sächsischen Bestimmungen vorsehen, eine rückständige und höchst unerwünschte Einrichtung sind. Man sollte in Sachsen Preußen darin folgen, daß man von dieser Art der Prüfungen absieht. Sind sie schon für Knaben bedenklich, wie viel mehr erst bei Mädchen!

b) Die Abgangsprüfung an der höheren Mädchenschule und die Reifeprüfung an den Studienanstalten.

Die Abgangsprüfung an der höheren Mädchenschule und die Reifeprüfungen an den Studienanstalten sollen dartun, ob die Schülerinnen die Lehrziele in allen wissenschaftlichen Fächern der obersten Klasse erreicht haben.[2]) Diese Prüfungen dürfen mit rechtlicher Wirkung nur an öffentlichen Anstalten abgelegt werden, sofern nicht private höhere Mädchenschulen auf Grund ministerieller Verfügung das Recht zur Abnahme der Prüfung erhalten haben.[3]) Der Verlauf dieser Prüfungen ist der übliche. Sie gliedern sich in einen schriftlichen und mündlichen Teil. Die Mathematik ist in allen Fällen schriftliches und mündliches Prüfungsfach.[4]) Über die Zahl der zu stellenden Aufgaben, die, sofern sie nicht von dem Schulleiter selbst gestellt werden, diesem vorher zur Genehmigung vorzulegen sind[5]), ist keine Bestimmung getroffen. An der höheren Mädchenschule haben die Mädchen für die mathematische Arbeit 4 bis 5 Stunden, an der dreiklassigen Studienanstalt 5 bis 6 Stunden, und an der sechsklassigen Studienanstalt 6 Stunden Zeit.[6]) Minderleistungen im Prüfungsergebnis können ausgeglichen werden, also auch in der Mathematik und durch die Mathematik. Die betreffende Bestimmung lautet für alle Anstalten so, daß ungenügende Leistungen in einem einzelnen Fache oder kaum genügende Leistungen in zwei Fächern durch besonders tüchtige in einer der Sprachen oder in der Mathematik oder in zwei anderen Fächern

1) Vgl. Sonderdruck aus dem Gesetz- und Verordnungsblatt für das Königreich Sachsen vom Jahre 1910, S. 68 (§ 64) und S. 147 (§ 65).

2) Ebenda, S. 70 (§ 107) und S. 148 (§ 67).

3) Ebenda, S. 70 (§ 107) und S. 148 (§ 67).

4) Ebenda, S. 72 (§ 112) und S. 151 (§ 72).

5) Ebenda, S. 73 (§ 112) und S. 151 (§ 72).

6) Ebenda, S. 73 (§ 112) und S. 151 (§ 72).

als ausgeglichen erachtet werden können, sofern es sich nicht um so erhebliche Lücken handelt, daß völlige Unreife ausgesprochen werden muß. Nicht zulässig ist ein derartiger Ausgleich, falls im Deutschen die Gesamtzensur auf „ungenügend" lautet; dann ist das Reifezeugnis überhaupt zu versagen.[1]) Die hiermit genannte Bestimmung schließt es aus, daß junge Mädchen mit gänzlichem Ausfall an mathematischem Wissen jemals im Königreich Sachsen ein Reifezeugnis erlangen können.

Reifeprüfungsaufgaben wenigstens als Proben für die gestellten Anforderungen mitzuteilen, bin ich nicht in der Lage, da mir solche Aufgaben nicht zugänglich gewesen sind.

8. Zur Ausbildung der Lehrkräfte.

Betreffs der Ausbildung der Lehrkräfte für Mathematik und der maßgebenden Prüfungsordnungen im Bereiche des Königreichs Sachsen verweise ich auf die Abhandlung von A. Witting.[2]) Nur die Bemerkung sei hier angefügt, daß an der Universität Leipzig Frauen unter denselben Bedingungen wie Männer immatrikuliert werden[3]); das Studium der Pädagogik steht auch Lehrerinnen frei, deren Zeugnis „den für die wissenschaftliche Hauptzensur bestimmten ersten Zensurgrad (vorzüglich = I) erlangt haben." Solche Damen können nach einem Triennium auf Grund einer pädagogischen Prüfung die sog. Kandidatur der Pädagogik für die Anstellung als wissenschaftliche Lehrerinnen an höheren Mädchenbildungsanstalten erlangen.

9. Einstweilige Stellung der Neuordnung zum höheren Lehrerinnenseminar und zur Frauenschule.

Die sächsische Neuordnung enthält keinerlei Bestimmungen über höhere Lehrerinnenseminare, die es bisher in Sachsen nicht gibt, und ebensowenig Einzelverordnungen über die Frauenschule.

Aus dem Jahresbericht der Städtischen höheren Mädchenbildungsanstalt zu Chemnitz (Ostern 1912), Progr. Nr. 60 entnehme ich, daß an der dort eingerichteten Frauenschule als Pflichtfach Wirtschaftslehre (1 Stunde) mit folgendem Pensum gelehrt wurde: „Steuern, Steuerdeklaration, — Sparkasse (Zinsen, Zinseszins), Wertpapiere, Hypotheken. — Wechsel, Scheck, Bankverkehr, Postscheckverkehr. — Versicherungen, Renten. — Nebenherlaufend: Andauernde Übungen in Prozentrechnung." Die Frauenschule an der Städtischen höheren Mädchenschule zu Dres-

1) Vgl. Sonderdruck aus dem Gesetz- und Verordnungsblatt für das Königreich Sachsen vom Jahre 1910, S. 75 (§ 115) und S. 53 (§ 175).

2) Vgl. A. Witting. Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen, diese IMUK-Abhandlungen Bd. II, Heft 2, Leipzig (Teubner) 1910, S. 38ff.

3) Vgl. Thedens, S. 49.

den-Altstadt lehrte laut Jahresbericht Ostern 1912, Progr. Nr. 78 kaufmännische Buchführung als Wahlfach mit zweistündigem Unterricht. Gelehrt wurde: „Einführung in die kaufmännische Buchführung. Verbuchung eines zweimonatigen Geschäftsganges in einfacher Buchführung. Unterschied zwischen einfacher und doppelter Buchführung. Wichtiges aus dem Wechselverkehr. Verbuchung eines zweimonatigen Geschäftsganges in doppelter Buchführung." Diese Beispiele belegen wohl zur Genüge die Absicht der sächsischen Neuordnung, für die Frauenschule in allen Fächern, also auch soweit das Rechnen dabei in Frage kommt, Freiheit walten zu lassen.

E. Das Großherzogtum Hessen.

1. Die Grundzüge der Neuordnung von 1911.

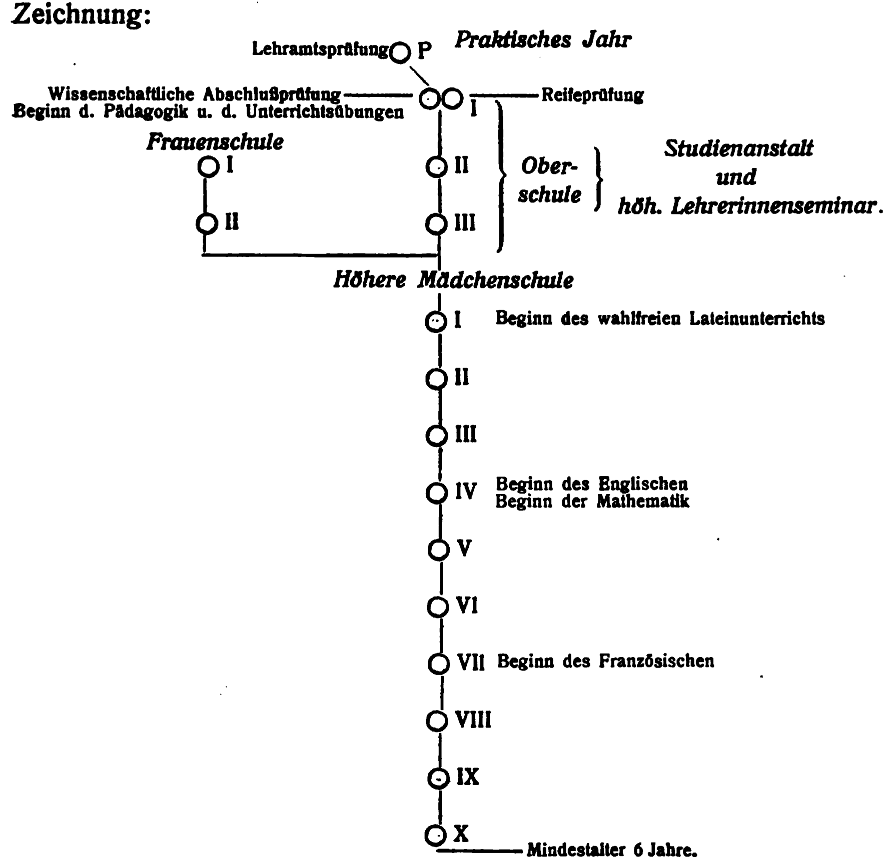
Hessen besitzt seit dem 14. Januar 1911 „Richtlinien für die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Hessen"[1], aber noch keine einheitlichen Lehrpläne. Hier kam es bei der Reform seines Mädchenschulwesens nicht darauf an, erst die zehnklassige höhere Mädchenschule als Normaltypus zu schaffen, da diese Schulart dort im wesentlichen schon längst vorhanden war. Zur Geltung zu bringen war, unter Angleichung an die grundsätzliche Auffassung der preußischen Neuordnung, die stärkere Betonung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildungselements, und in Aussicht zu nehmen war ein dem besonderen Landesinteresse entsprechender Ausbau des höheren Bildungswesens für die weibliche Jugend über die Ziele der zehnklassigen höheren Mädchenschule hinaus. Aus sachlichen Gründen schien es der hessischen Unterrichtsverwaltung nicht geraten, das preußische Vorbild ungeändert zu übernehmen. Den praktischen Bedürfnissen des kleineren Staates glaubte man vielmehr durch die Wahl eines einfacher gearteten Systems gerecht zu werden. So schuf man für Hessen nicht verschiedenartige, von der höheren Mädchenschule abzweigende Formen von Studienanstalten, sondern nur eine einzige, sich an die absolvierte höhere Mädchenschule anschließende Studienanstalt mit oberrealschulartigem Charakter, die nach drei Jahren zur Reifeprüfung führt. In diese Studienanstalt treten aber auch alle jungen Mädchen ein, in deren Absicht die Vorbereitung zum höheren Lehrerinnenberuf ohne akademische Weiterbildung liegt. Nach zweijährigem gemeinsamen Unterricht mit den späteren Studentinnen trennen sich die Wege, indem im dritten Jahre die dem Hochschulstudium zustrebenden jungen Damen im wesentlichen zur Oberrealschulreife geführt werden, während die künftigen nicht akademisch gebildeten Lehrerinnen für höhere Mädchenschulen ihrem späteren Berufsbedürfnisse entsprechend besonders in der Pädagogik und in mäßigem Umfange auch in der Unterrichtsunterweisung fortgebildet wer-

1) Abgedruckt in der Beilage zu Nr. 13 der Darmstädter Zeitung vom 16. Januar 1911.

den sollen. In den meisten Stunden aber bleiben die Schülerinnen der Studienanstalt auch im dritten Jahre mit den Anwärterinnen für das höhere Lehrerinnenexamen vereint, so daß also, abgesehen von der soeben erwähnten Trennung während des dritten Jahres, die künftigen Studentinnen und die späteren Lehrerinnen eine und dieselbe „Oberschule" besuchen. Den künftigen Lehrerinnen eröffnet die Reifeprüfung am Ende des dritten Jahres, also nach Absolvierung der drei wissenschaftlichen Klassen, den Eintritt in das der eigentlichen Berufsvorbereitung dienende praktische Jahr. Außer der Oberschule hat Hessen noch die zweiklassige Frauenschule in Aussicht genommen, in deren Errichtung und Ausgestaltung die wichtigste Aufgabe der ganzen Reform gesehen wird. Die „Richtlinien" betonen es ganz unzweideutig, daß weit wichtiger als der Besuch der Studienanstalt, „der nur für eine kleine Minderheit innerlich berechtigt sein kann", der Besuch einer Schule erscheint, „die sich nur den künftigen Lebensaufgaben der gebildeten deutschen Frau und Mutter widmen will."

2. Die Gliederung der höheren Bildungsanstalten für Mädchen.

Das Schema für die Hessische Gliederung verdeutlicht die folgende Zeichnung:



Da Lehrpläne und Lehraufgaben noch nicht erschienen sind, so wird zurzeit an den einzelnen höheren Mädchenschulen nach Lehrplanentwürfen unterrichtet, die zwar im großen und ganzen übereinstimmen, aber doch einzelne Verschiedenheiten aufweisen.

3. Die Stundentabelle und das Lehrziel der höheren Mädchenschule.

Die Stundenverteilung für die höhere Mädchenschule durch Verfügung vom 14. April 1909 wird in folgender Weise geregelt:[1])

	Klasse										Summe
	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I	
Religion	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	20
Deutsch	12	10	8	6	5	5	4	4	4	4	62
Französisch	—	—	—	6	5	5	4	4	4	4	32
Englisch	—	—	—	—	—	—	4	4	4	4	16
Geschichte	—	—	—	—	2	2	2	2	2	3	13
Geographie	—	—	2	2	2	2	2	2	2	2	16
Rechnen u. Mathematik	4	4	4	5	5	5	4	4	4	4	43
Naturkunde	—	—	—	2	2	2	3	3	3	3	18
Schreiben	—	2	3	2	1	—	—	—	—	—	8
Zeichnen	—	—	—	—	2	2	2	2	2	2	12
Nadelarbeit	—	2	2	2	2	2	2*	2*	2*	2*	10(18)
Singen	—	—	1	1	1	2	2	2	2	2	13
Turnen	—	1	2	2	2	2	2	2	2	2	17
Summe *) wahlfrei	18	21	24	30	31	31	31 (33)	31 (33)	31 (33)	32 (34)	280 (288)

Auffallend im Vergleich zur preußischen Stundentafel ist die ganz nachdrückliche Betonung des Rechen- und Mathematikunterrichts. Den insgesamt 30 preußischen Stunden stehen 43 in Hessen gegenüber; dieser Unterschied von 13 Stunden bedeutet insgesamt rund 520 Unterrichtsstunden, wovon 360 auf das Rechnen und 160 auf die Mathematik entfallen. Hessen vermeidet so den erheblichen Fehler des preußischen Plans, der zwar den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern ein größeres Gewicht für die Ausbildung der Mädchen einräumen will, aber nicht die dazu nötige Stundenzahl bereit hält.

Auf der Dresdener Tagung des Deutschen Vereins für das Höhere Mädchenschulwesen (1911) hat sich Geh. Schulrat Dir. Dr. Otto[2]) (Darmstadt) in seinem über die hessische Neuordnung gehaltenen Vortrage zu dieser Sache mit folgenden Worten geäußert: „Soll in einem Fache, das im großen und ganzen der Eigenart weiblichen Denkens und weiblichen Geschmackes ferner steht als der des männlichen Geschlechts auf den Altersstufen, in denen die Mädchen einer gewissen Schonung bedürfen, wirklich Ersprießliches geleistet werden, so muß man ihnen Zeit gönnen. Es muß im Unterrichte viel erklärt und vor allem viel geübt und fort-

1) Vgl. Anhang 3 zu den „Richtlinien".
2) Vgl. Frauenbildung, 10. Jahrg., 1911, S. 539 ff.

während wiederholt werden. Wir fürchteten, daß eine knappere Bemessung der Stundenzahl dazu führen müßte, daß die Schülerinnen zum Schaden für ihre Gesundheit und zur „Plage für Vater, Mutter, Schwestern, Brüder“ mit häuslichen Übungen und Wiederholungsaufgaben überbürdet würden.“

Für die Oberschule geben die Richtlinien keine Stundentafel; dagegen für die Frauenschule zu Mainz findet sich in ihnen eine vorläufige Stundentafel[1]), aus der zu entnehmen ist, daß für beide Jahre für Rechnen, Buchführung, Vermögensverwaltung zusammen eine verbindliche Wochenstunde angesetzt ist.

Hinsichtlich des Lehrziels der höheren Mädchenschule liefert die hessische Knabenrealschule den Maßstab mit dem Unterschiede, daß bei den Mädchen eine kleine Überlegenheit in den Sprachen und eine Minderleistung in der Mathematik für angemessen gehalten wird. Auf den Lehrplan der Knabenrealschule will ich hier nicht näher eingehen, da das Erforderliche darüber bereits von anderer Seite[2]) in diesen IMUK-Abhandlungen gesagt ist. Aus ihm streichen die Richtlinien für die höheren Mädchenschulen die Logarithmen und die Elemente der Trigonometrie.

Da nach dem oben mitgeteilten Lehrplan an den höheren Mädchenschulen Hessens teils seit 1909, teils seit 1910 unterrichtet wird, so kann diese Reform, die sich im wesentlichen auf die vier obersten Klassenstufen der höheren Mädchenschule erstreckt, erst zu Ostern 1913 bzw. Ostern 1914 durchgeführt sein. Demnach kann, da Hessen die Studienanstalt nicht abzweigt, sondern auf die höhere Mädchenschule aufsetzt, frühestens zu Ostern 1913 eine Studienanstalt im Großherzogtum Hessen eröffnet werden. Beabsichtigt sind solche Anstalten zunächst in Darmstadt und Mainz.

4. Die Koedukation.

Mit dem Augenblick der Eröffnung solcher Studienanstalten fällt für die diesen Städten angehörenden Mädchen die Möglichkeit der Gemeinschaftserziehung in höheren Knabenschulen fort. Dagegen wird an den Orten, die nur eine reformierte zehnsufige höhere Mädchenschule haben (Offenbach, Worms, Gießen) solchen Schülerinnen, die nach Absolvierung der höheren Mädchenschule ohne Wohnortswechsel das Reifezeugnis einer neunstufigen Anstalt erlangen wollen, der Besuch der Oberrealschule von Obersekunda an weiterhin gestattet. Die bedingungslose Aufnahme in die

1) Vgl. Anhang 2 zu den „Richtlinien“.

2) Vgl. H. Schnell, Der mathematische Unterricht an den Höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Großherzogtum Hessen, diese IMUK-Abhandlungen, Bd. II Heft 5, Leipzig (Teubner) 1910, S. 12 u. 13. Bemerkt sei, daß in dieser Abhandlung (S. 9) auch einiges über die höheren Mädchenschulen berichtet wird. Die Verfügung vom 14. 4. 1909 betr. der Stundentafel für die höheren Mädchenschulen ist dabei jedoch nicht erwähnt.

Oberrealschulobersekunda wird jedoch abhängig davon gemacht, daß die betreffenden Schülerinnen im letzten Schuljahr der höheren Mädchenschule an einem freiwilligen Mathematikkursus teilgenommen haben, der ihnen das mathematische Pensum der Untersekunda einer Realschule unverkürzt darbietet.

Die „Richtlinien" weisen zwar darauf hin, daß es nahe gelegen hätte, das mathematische Lehrziel der obersten Klasse der höheren Mädchenschule überhaupt mit dem der Untersekunda einer Realschule gleichzustellen, um dann allen nach erfolgreichem Besuch aus der höheren Mädchenschule abgehenden Mädchen den bedingungslosen Übergang in die Obersekunda der am Orte vorhandenen Oberrealschule zu sichern. Nach den an den höheren Bürgerschulen gemachten günstigen Erfahrungen hätten die Mädchen ein solches Pensum wahrscheinlich wohl bewältigen können. Indessen ist man den so bezeichneten Weg doch nicht gegangen, da es für richtiger gehalten wurde, „die mathematischen Forderungen nicht nach den Bedürfnissen einer kleinen Minderheit zu gestalten, sondern sie im Rahmen des Ganzen festzusetzen unter dem Gesichtspunkt einer abgeschlossenen, aber die Bildungsmomente des Faches sichernden Darbietung. Zugleich wird durch die Differenz in den mathematischen Zielen der Eintritt in die Obersekunda einer Oberrealschule nicht als die normale Fortsetzung der höheren Mädchenschule gekennzeichnet; diese Nebenwirkung ist durchaus erwünscht."

Ein Beispiel für den mathematischen Unterricht der jungen Mädchen nach dem Realschullehrplan gibt der Jahresbericht der höheren Mädchenschule zu Offenbach am Main über das Schuljahr 1912 (Progr. Nr. 250).[1]) Dieser Bericht enthält (S. 4) den Hinweis, daß im Schuljahre 1911/12 die Schülerinnen der Klasse Ia und ein Teil der Schülerinnen der Klassen IIa und IIb in der Mathematik, Physik und Chemie nach dem Realschullehrplan unterrichtet wurden. „Den demnächst" (d. h. zu Ostern 1912) „aus Ia abgehenden Schülerinnen steht der Eintritt in die Obersekunda einer Oberrealschule offen, und diejenigen von ihnen, die sich später dem höheren Lehrerinnenexamen zu unterziehen gedenken, können statt der zwei untersten Seminarklassen die Obersekunda und die Unterprima einer Oberrealschule besuchen." Die Unterrichtsverteilung (S. 6) sieht für solche weitergehenden Schülerinnen im 9. und 10. Schuljahrstatt der sonst üblichen vier sogar sechs Mathematikstunden für die Woche vor. Über die Lehrstoffgliederung geben die Angaben für die einzelnen Klassen genauere Auskunft (S. 16 u. 17). Es ist nicht erforderlich, hier noch genauer darauf zurückzugreifen, da der wesentliche Unterschied in der mathematischen Zielleistung der höheren Mädchenschule gegenüber der Realschule — Trigonometrie, Logarithmen — schon oben nämlich auf S. 131 betont worden ist. Nur auf einen Punkt, der vielleicht nur durch eine redaktionelle Auslassung begründet ist, möchte

1) Vgl. dort: S. 4, S. 6 sowie S. 16, 17, 18.

ich noch kurz eingehen. Während für die Schülerinnen, die nicht in höhere Anstalten übergehen, im Lehrstoff der obersten Klasse (10. Schuljahr) die Übersicht über den in der Algebra durchgenommenen Lehrstoff die graphische Darstellung der Funktionen ersten Grades ausdrücklich anführt, fehlt die Graphik – wenigstens in der veröffentlichten Übersicht – im Lehrstoff, der mit den weitergehenden Schülerinnen durchgenommen wurde. Ich möchte es als äußerst erwünscht bezeichnen, die in den Schuljahresberichten bekannt zu gebenden Lehrstoffübersichten, einerseits möglichst genau abzufassen, damit irrtümliche Schlußfolgerungen aus ihnen vermieden werden, andererseits aber auch im Falle bemerkenswerter Eigentümlichkeiten und etwa beabsichtigter Abstriche besonders darauf aufmerksam zu machen.

5. Einige Angaben über weiterführende Bildungsanstalten.

Für die Einrichtung der ersten hessischen Frauenschule zu Mainz gibt der Jahresbericht von Ostern 1912 die wissenswerten Mitteilungen. Unterrichtsgegenstände waren Deutsch (2 Std.), Französisch (2 Std.), Englisch (2 Std.), Pädagogik (2 Std.), Rechnen und Buchführung (1 Std.), Wohlfahrtspflege (1 Std.), Bürgerkunde (1 Std.), Kunstgeschichte (2 Std.), Naturwissenschaftliche Haushaltungskunde bzw. Haushaltungschemie (1 Std.), Hausarbeit (3 Std.), Kochen (4 Std.), Nadelarbeit (3 Std.). Im Rechnen wurde durchgenommen:

a) Wiederholungsaufgaben aus den Gebieten der Bruchrechnung, des Dreisatzes, der Gesellschafts- und Mischungsrechnung. – Lohnrechnung, Zinsrechnung, Berechnung von Ausstattungen. Die für die Führung der Haushaltsbücher notwendigen Rechnungsarten: Prozentrechnung, Aufstellung von Voranschlägen für den Haushalt, Einkaufsrechnungen, Berechnung des Nährstoffgehalts verschiedener Speisen, Steuerrechnungen.

b) Aufstellung des Haushaltungsvoranschlags (nach Jahr, Monat, Woche, wobei besonders auf die verschiedenen Arten der Lebensbedürfnisse Bedacht zu nehmen ist). Führung eines Wirtschaftshauptbuches und eines Haushaltungsbuches nach einem gegebenen Schema. Ausfüllen der wichtigsten Formulare für den Post- und Eisenbahnverkehr (Briefaufschriften, Paketadressen, Postanweisungen, Frachtbriefe usw.).

Betreffs der Lehrziele der Studienanstalt enthalten die „Richtlinien“ nur eine ganz allgemeine Bemerkung. Sie sollen parallel gehen mit denen der Oberrealschule, aber immer unter Betonung der weiblichen Eigenart, so daß auch hier wieder den etwas verminderten Anforderungen in der Mathematik eine Mehrforderung in Deutsch und den Fremdsprachen gegenübersteht. Die „Richtlinien“ begründen diese Maßnahme durch die „größere Beweglichkeit, die für diese Fächer und in diesem Alter den Mädchen zugesprochen werden kann.“

Der Nachweis des erfolgreichen Besuchs der Studienanstalt soll an das Bestehen einer besonderen Prüfung geknüpft werden, die stattfinden soll, solange die Reifeprüfung für Knabenschulen besteht. In bezug auf diese Prüfung sagen dann die Richtlinien: „Es wird erstrebt, an diese

Prüfung die gleiche Berechtigung zu knüpfen, welche die Maturität einer Oberrealschule den Mädchen gewährt."

Hinsichtlich des Lehrerinnenseminars für das höhere Lehramt sind die Verhältnisse insofern noch nicht ganz geklärt, als es noch der Prüfung bedarf, welche Stellung dem Lehrerinnenseminar für das höhere Lehramt in der Organisation zugewiesen werden soll. Nur grundsätzlich ist einiges schon festgelegt worden. An dem bisherigen Aufbau des Seminars auf die durchlaufene zehnklassige höhere Mädchenschule wird auch künftig festgehalten. Seit 1909 ist an Stelle der dreijährigen Ausbildungszeit die vierjährige getreten, die entsprechend dem preußischen Vorgange in einen dreijährigen und einen sich daran anschließenden einjährigen Abschnitt zerlegt ist. In den ersten drei Jahren soll die wissenschaftliche Allgemeinbildung zum Abschluß kommen; das letzte, vierte, Jahr soll hauptsächlich der methodisch-didaktischen Ausbildung gewidmet sein.

Die an Stelle der augenblicklich geltenden Übergangslehrpläne zu Ostern 1913 oder 1914 zu erwartenden endgültigen Lehrpläne will man — so äußern sich die „Richtlinien" — mit den Plänen der Studienanstalt in Einklang bringen, um so zu erreichen, daß sich nur eine einzige Oberschule auf die zehnklassige höhere Mädchenschule aufbaut.

6. Die Prüfung für das Lehramt an höheren Mädchenschulen.

Erlassen ist inzwischen schon die Verordnung, die Prüfung der Anwärterinnen für das Lehramt an höheren Mädchenschulen betreffend, vom 23. Dezember 1911, nebst den dazu gegebenen Ausführungsbestimmungen.[1])

In ihrer Form lehnt sich diese Prüfungsordnung ganz an die preußische an. Die gegen Ende des dritten Seminarjahres einsetzende Prüfung heißt „wissenschaftliche Abschlußprüfung", die Prüfung gegen Ende des praktischen Jahres „Fachprüfung". Bei der Abschlußprüfung ist die Mathematik sowohl im schriftlichen wie mündlichen Teile ausdrücklich vorgeschriebenes Prüfungsfach. Zur schriftlichen Bearbeitung sollen jedesmal vier Aufgaben aus verschiedenen Gebieten bei fünfstündiger Arbeitszeit gestellt werden. Für die Feststellung des Gesamtergebnisses der ganzen Prüfung ist die Vorschrift gegeben worden, daß es der Prüfungsbehörde zustehen soll, „nach pflichtgemäßem Ermessen darüber zu entscheiden, ob und inwieweit etwa nicht genügende Leistungen in einem Lehrgegenstande durch um so befriedigendere Leistungen in einem anderen Lehrgegenstande als ausgeglichen zu erachten sind. Bei nicht genügenden Gesamtleistungen im Deutschen, oder in beiden Fremdsprachen, oder in einer Fremdsprache und in der Mathematik, oder insgesamt in drei wissenschaftlichen Fächern gilt die Prüfung jedoch als nicht bestanden." Hiernach ist es wie in Preußen möglich, daß unter Beobachtung

1) Vgl. · egierungsblatt Nr. 1 vom 8. Januar 1912.

der einmal gezogenen Grenzen die Leistungen in der Mathematik ausgleichen, aber auch ausgeglichen werden können.

Für die Fachprüfung finden sich keine besonderen Bestimmungen hinsichtlich der Mathematik vor, die sehr wohl als Prüfungsfach in Frage kommen kann für die Bearbeitung der Lehrprobenentwürfe, für die praktischen Lehrproben und für die mündliche Prüfung. Auch soll an geeigneter Stelle die Befähigung und Übung im Zeichnen an der Wandtafel ermittelt werden. Das auf Grund der Fachprüfung erworbene Zeugnis heißt „Zeugnis der Lehrbefähigung für Höhere Mädchenschulen". In diesem Zeugnis über die Lehrbefähigung ist, sofern das frühere Zeugnis über die wissenschaftliche Abschlußprüfung in einzelnen Fächern (z. B. in der Mathematik) ungenügende Noten enthält, durch einen besonderen Zusatz hervorzuheben, daß die Lehrbefähigung für diese Fächer so lange ausgeschlossen ist, als nicht durch eine Ergänzungsprüfung genügende Kenntnisse nachträglich nachgewiesen sind. Solchen Bewerberinnen soll aber auch eröffnet werden, daß der nachträgliche Nachweis in ihrem eigenen Interesse liegt, da sonst die Verwendungsmöglichkeit eingeschränkt bleibt. Durch diese Maßregel verhindert Hessen, daß zum Unterrichte im Rechnen oder in der Mathematik Lehrerinnen zugelassen werden, denen die genügende Befähigung fehlt. Das ist eine Einrichtung, die im Interesse der erfolgreichen Gestaltung des mathematischen Unterrichts nur mit Genugtuung begrüßt werden kann.

Im Gegensatz zu Preußen schließt Hessen in die Lehrbefähigung für höhere Mädchenschulen diejenige für Volksschulen nicht ein. Hessen hält mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der Ziele des Lehrerinnenseminars für das höhere Lehramt und des Seminars für Volksschullehrerinnen daran fest, die letztere Seminargattung unverändert weiter zu erhalten.

7. Voraussichtliche Einwirkung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer auf die künftige Zusammensetzung der Lehrerkollegien.

Über die Zusammensetzung der Lehrerkollegien bringen die „Richtlinien" wiederum nur ganz allgemeine Angaben, die besagen, daß für die höheren Mädchenschulen wesentliche Änderungen nicht notwendig werden und daß für Studienanstalt und Lehrerinnenseminar gleichartige Grundsätze gelten sollen. Wegen der Einführung der Mathematik und der weitergehenden Forderungen in den naturwissenschaftlichen Fächern wird jedoch die Anstellung von wissenschaftlich vorgebildeten Lehrkräften erforderlich werden; insbesondere werden auch akademisch gebildete Oberlehrerinnen in die Schulkollegien der höheren Mädchenschulen, der Frauenschulen, der Lehrerinnenseminare und Studienanstalten eintreten müssen.

8. Schlußbemerkung.

Die im Vorstehenden geschilderte augenblickliche Lage des höheren Mädchenschulwesens in Hessen, ist so, daß die mathematischen Lehrpläne für die verschiedenen Anstaltstypen noch ausstehen, und daß es auch sonst noch an manchen Einzelbestimmungen, z. B. bezüglich der Gestaltung der Lehrerkollegien fehlt. Erst die Zukunft wird nach dieser Richtung das begonnene Werk zum Abschluß bringen.

Verglichen mit der preußischen und sächsischen Neuordnung zeichnet sich das in Hessen geschaffene System durch Einfachheit, Einheitlichkeit und Klarheit aus. In mehr als einer Hinsicht ist das von Hessen gegebene Beispiel geeignet, zur Nachahmung anzureizen, wenn es sich in anderen mit ihrer Mädchenschulreform noch nicht fertigen Staaten um die Beschreitung neuer Wege handelt oder wenn es aus bereits veröffentlichten Reformplänen Fehler zu beseitigen gilt.

F. Das Großherzogtum Baden.

1. Allgemeines.

Über den mathematischen Unterricht an den höheren Mädchenschulen Badens hat H. Cramer[1]) in diesen IMUK-Abhandlungen bereits einiges mitgeteilt. Wenn im folgenden nochmals auf diesen Gegenstand eingegangen wird, so besteht dabei die Absicht, manches etwas ausführlicher zu besprechen.

In Baden erfreut sich das höhere Mädchenschulwesen schon seit dem Jahre 1877 der staatlichen Fürsorge im Sinne der 1872 gefaßten Weimarer Beschlüsse des Deutschen Vereins für das höhere Mädchenschulwesen.[2]) Die erste landesherrliche Verordnung zur Regelung des badischen höheren Mädchenschulwesens wurde am 29. Juni 1877 erlassen; an ihre Stelle trat 32 Jahre später die Verordnung vom 18. September 1909,[3]) die heute noch in Kraft ist.

Es gibt in Baden zunächst die höhere Mädchenschule. Jungen Mädchen, die sich über das Ziel der höheren Mädchenschule hinaus noch eine umfassendere Bildung aneignen wollen, stehen verschiedene Wege offen; 1) der Besuch eines Lehrerinnenseminars, 2) der Besuch eines Mädchengymnasiums oder einer Mädchenoberrealschule, 3) der Besuch einer höheren Knabenlehranstalt. Dazu ist zu bemerken, daß das Mädchen-

1) Vgl. H. Cramer: Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Großherzogtum Baden, Leipzig (Teubner) 1910, diese IMUK-Abhandlungen, Bd. II Heft 4, S. 1, 6, 20–25.

2) Vgl. J. Wychgram, Geschichte des höheren Mädchenschulwesens in Deutschland und Frankreich; in Schmid, Geschichte der Erziehung, Stuttgart (J. G. Cotta), 1901, V, 2, S. 278. – Ferner: Thedens, S. 37.

3) Vgl. Verordnungsblatt des Großherzoglichen Oberschulrats, Nro XXI, 1909 Landesherrliche Verordnung vom 18. September 1909, die Einrichtung der Höheren Lehranstalten betreffend.

gymnasium in Karlsruhe und die Mädchenoberrealschule in Mannheim nur Mädchen zum Studium vorbereiten. Voraussichtlich werden demnächst zu diesen Anstalten noch besondere Mädchenrealgymnasien in Heidelberg und Freiburg i. B. hinzukommen.

2. Die höhere Mädchenschule.

a) Grundzüge der Organisation.

Nach der Verordnung vom 18. September 1909 zählen die höheren Mädchenschulen Badens zu den höheren Lehranstalten und sind derselben Aufsichtsbehörde unterstellt wie die höheren Knabenschulen. Die höheren Mädchenschulen haben einen siebenjährigen Lehrgang. Mit ihnen können Vorschulklassen verbunden werden, die einen Ersatz für den Besuch der entsprechenden Klassen der Volksschule bilden. Die Klassen der höheren Mädchenschule werden von unten aufsteigend als siebente, sechste,... erste bezeichnet. An die oberste Klasse kann sich ein Fortbildungskurs von ein bis zwei Jahren anschließen (§ 4). Der Unterricht an den höheren Mädchenschulen umfaßt folgende Pflichtfächer: Religion, Deutsch, Französisch, Englisch, Geschichte, Erdkunde, Mathematik, Naturbeschreibung, Physik, Chemie, Mineralogie, Geologie, Schreiben, Zeichnen, Singen, Turnen mit Bewegungsspielen, weibliche Handarbeiten; daneben kann wahlfreier Unterricht eingerichtet werden in Stenographie und Handfertigkeit sowie für die Übungen in Physik, Chemie und Naturbeschreibung (§ 6). – Mit höheren Mädchenschulen können auch Gymnasien, Realgymnasien oder Oberrealschulen verbunden werden. Dabei gilt als Regel, daß der Unterricht in den drei unteren Jahrgängen gemeinsam ist. Den höheren Mädchenschulen können überdies – sofern sie nicht schon mit anderen Anstaltsarten verbunden sind – besondere bis zu vier Klassen umfassende Unterrichtskurse zur Ausbildung von Lehrerinnen angegliedert werden. Keine Anstalt darf mehr als zwei lehrplanmäßig verschiedene Abteilungen umfassen (§ 7).

Die Verwaltung, Beaufsichtigung und Leitung sämtlicher höheren Lehranstalten sowie die Besetzung der Lehrerstellen an denselben ist Sache des Staates. Bei Anstalten, an deren Unterhalt Gemeinden beteiligt sind, kann den Gemeinden bei der Besetzung von Lehrerstellen ein Mitwirkungsrecht, bei den Anstalten für Mädchen überdies das Recht der Besetzung der nichtetatmäßigen Lehrerinnenstellen vorbehaltlich der Genehmigung der Oberschulbehörde eingeräumt werden (§ 9). – Die Aufnahme in die unterste Klasse einer höheren Mädchenschule ist erst nach zurückgelegtem neunten Lebensjahre zulässig. Zur Aufnahme in diese Klasse werden im allgemeinen die Kenntnisse verlangt, die durch einen dreieinhalbjährigen Besuch der Volksschule erworben werden[1]) (§ 13). Prüfungen sind für die höhere Mädchenschule nicht vorgesehen.

1) Vgl. hierzu Thedens, S. 38 und 39.

Geleitet wird jede höhere Mädchenschule von einem Direktor. Zum Amt eines solchen Anstaltsleiters dürfen nur Lehrer berufen werden, die geeignet sind, den Unterricht in einem wissenschaftlichen Fache der obersten Klasse zu übernehmen (§ 27). Zur Mitwirkung bei der Beaufsichtigung und Leitung jeder höheren Lehranstalt, also auch jeder höheren Mädchenschule wird ein Beirat bestellt, dem als Mitglieder angehören: 1) zwei bis sechs aus der Zahl der Einwohner am Sitz der Anstalt auf die Dauer von sechs Jahren zu ernennende Personen, 2) der Leiter der Anstalt, 3) ein weiterer Lehrer der Anstalt, der auf Vorschlag der Lehrerversammlung von der Oberschulbehörde für die Dauer von 3 Jahren bezeichnet wird, 4) ein am Sitz der Anstalt wohnender, von der Oberschulbehörde auf die Dauer von sechs Jahren zu ernennender Arzt (§ 29). Bei den Lehranstalten für Mädchen können die soeben unter Ziffer 1 genannten Mitglieder des Beirats bis zu einem Dritteil auch Frauen sein.

b) Der Lehrplan.

An die Stelle des ersten Lehrplans vom 29. Juni 1877, der inzwischen besonders durch die Verordnung vom 27. Oktober 1892 gewisse Veränderungen erfuhr, ist mit dem 9. Juni 1905 der jetzt gültige Lehrplan getreten[1]). Zu diesem Lehrplan wurden unter dem 8. Dezember 1905 vorläufige Anweisungen nebst Erläuterungen über die Gestaltung des Lehrstoffs in Erdkunde, Größenlehre und Naturkunde erlassen. Das waren gerade die Fächer, für welche der neue Lehrplan eine gegen früher erweiterte Unterrichtszeit festgesetzt hatte.[2])

Die für die höhere Mädchenschule vorgeschriebene Stundentafel ist die folgende:

Klassen	VII	VI	V	IV	III	II	I	Zusammen	Die entsprechende Zahl für die Knabenrealschule (VI—U II)
Religion....	2	2	2	2	2	2	2	14	12
Deutsch	6	5	6	6	4	5	5	37	26
Französisch.	5	6	5	5	5	4	4	34	30
Englisch ...	–	–	–	–	4	5	5	14	13
Geschichte .	–	–	2	2	2	2	2	10	8
Größenlehre	4	4	4	4	3	3	3	25	30
Erdkunde ..	2	2	2	2	2	1	1	12	} 26
Naturkunde..	2	2	2	2	2	3	3	16	
Schreiben ..	2	2	–	–	–	–	–	4	5
Zeichnen ...	1	1	2	2	2	2	2	12	12
Gesang	2	2	1	1	1	1	1	9	–
Turnen	2	2	2	2	2	2 (+ 1)	2 (+ 1)	14 (+ 2)	12
Handarbeit .	2	2	2	2	2	2	2	14	–
Zusammen .	30	30	30	30	31	32 (+ 1)	32 (+ 1)	215 (217)	174

1) Vgl. Verordnung des Großherzoglichen Oberschulrats, Nro XV, 1905.
2) Ebenda, Nro XV, den Lehrplan der Höheren Mädchenschule betreffend.

Diese Übersicht läßt erkennen, daß auch in Baden an den höheren Mädchenschulen der Löwenanteil an den Stundenzahlen den Sprachen, und unter diesen dem Deutschen und Französischen zufällt. Diese beiden Fächer zusammen nehmen zu fast gleichen Teilen während des siebenjährigen Lehrganges schon den dritten Teil der ganzen Unterrichtszeit in Anspruch. In die übrigen zwei Drittel teilen sich im ganzen noch elf Fächer; unter diesen steht voran die Größenlehre (Rechnen und Mathematik) mit dem Anteil von etwas weniger als einem Achtel der ganzen Unterrichtszeit. Trotzdem ist die dem Rechnen und der Mathematik im ganzen zugewiesene Stundenzahl erheblich günstiger ausgefallen als in Preußen[1]), erreicht fast denselben Wert wie in Hamburg[2]) und Sachsen[3]), bleibt aber noch beträchtlich hinter dem hessischen[4]) Ansatze zurück. Baden hält somit bezüglich des Zeitmaßes für Rechnen und Mathematik an den höheren Mädchenschulen zusammen mit Sachsen und Hamburg die Mitte zwischen Hessen und Preußen.

c) Das Lehrziel im Rechnen und in der Mathematik.

Die schon oben angeführte Verordnung des Großherzoglichen Oberschulrats vom 8. Dezember 1905 bestimmt die Einzelheiten des im Rechnen und in der Mathematik durchzunehmenden Stoffes. Aus den getroffenen Festsetzungen geht hervor, daß, abgesehen von einleitenden geometrischen Übungen in der Klasse V der eigentliche mathematische Unterricht wie in allen anderen Staaten in der Klasse IV beginnt. Das Rechnen wird bis in die oberste Klasse hinein fortgeführt; für jede Klasse ist eine besondere Lehraufgabe im Rechnen amtlich vorgeschrieben worden.

Im Einzelnen lauten die Bestimmungen folgendermaßen[5]):

Klasse VII:

Einüben des Einmaleins. Rechnen mit Münzen, Längenmaßen und Gewichten, dabei Einführung in die dezimale Schreibweise.

Klasse VI:

Rechnen mit Flächen- und Raummaßen. Einfache Schlußrechnungen mit ganzen Zahlen und mit Dezimalzahlen. Anfänge des Bruchrechnens: Entstehung der Brüche, Zu- und Abzählen gleichnamiger Brüche.

Klasse V:

Gemeine Brüche in allen Rechnungsarten. Dezimalbrüche. Angewandtes Rechnen, insbesondere der Zweisatz. Einleitende Übungen der Geometrie: Behandlung einiger Körper und der an ihnen auftretenden Figuren.

Klasse IV:

Rechnen: Schlußrechnen an möglichst vielseitigem Stoff und mit verschiedenen Rechnungsverfahren. Proportionen.

Geometrie: Behandlung regelmäßiger Figuren (Quadrat, regelmäßiges Dreieck und Sechseck, Kreis) und des Rechtecks. Strecken und Winkel, Lage zweier Geraden, insbesondere senkrechte und parallele Gerade.

---

1) Vgl. diese Abhandlung S. 39. 2) Ebenda S. 107.

3) Ebenda S. 119. 4) Ebenda S. 130.

5) Vgl. Verordnungsblatt des Großherzoglichen Oberschulrats 1905, Nr. XV, S. 298 und 299.

Klasse III:

Rechnen: Fortführung des Geschäftsrechnens.

Geometrie: Das Dreieck, das Viereck, der Kreis, Symmetrie.

Arithmetik und Algebra: Addition und Subtraktion von allgemeinen Zahlen, im Anschluß daran die entsprechenden Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

Klasse II:

Rechnen: Die Elemente des kaufmännischen Rechnens.

Geometrie: Flächengleichheit und Flächenberechnung. Ähnlichkeitslehre. Graphische Darstellung von Zahlen und Zahlenreihen.

Arithmetik und Algebra: Multiplikation und Division mit allgemeinen Zahlen. Faktorenzerlegung. Bruchrechnen. Die entsprechenden Gleichungen des ersten Grades. Proportionen.

Klasse I:

Rechnen: Einführung in das Verständnis wirtschaftlicher Verhältnisse, insbesondere auch des Familien-, Gemeinde- und Staatshaushalts, sowie des Versicherungswesens.

Geometrie: Betrachtung von räumlichen Gebilden, Berechnung der Oberflächen und Inhalte einiger Körper (Würfel, Quader, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel, Kugel).

Arithmetik und Algebra: Rechnen mit Potenzen. Das Zahlensystem. Die Dezimalbrüche. Die Elemente des Wurzelrechnens. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

Es fällt auf, daß man in Baden hinsichtlich der mathematischen Zielforderungen ziemlich hinter Preußen zurückbleibt; so werden beispielsweise die quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten an den badischen höheren Mädchenschulen überhaupt nicht durchgenommen.

Interessant ist aber, daß nach dem eigenen Urteil der Breslauer Unterrichtskommission[1]) der badische Lehrplan, abgesehen von der unzureichenden Stundenzahl, mannigfache Berührungspunkte mit den erst später erschienenen Stuttgarter Vorschlägen von 1906 aufweist.

d) Über den Rechenlehrstoff auf der Oberstufe.

Was im einzelnen nach amtlicher Absicht den Stoff für den Rechenunterricht in den Klassen IV—I ausmachen soll, ist aus dem Lehrplan nicht zu ersehen, da die Angaben nicht nur zu knapp, sondern auch zu allgemein gehalten sind.

Tatsächlich deckt denn auch die Durchsicht der Jahresberichte badischer höherer Mädchenschulen aus dem Jahre 1912 bei der Angabe der durchgenommenen Lehraufgaben für Rechnen weitgehende Verschiedenheiten auf; nicht nur daß dort, wo Vorschulklassen bestehen, schon in den ersten 3 Schuljahren an verschiedenen Orten recht ungleichartig verfahren wird, sondern daß besonders in den oberen Klassen von der vierten aufwärts der Sinn der amtlichen Bestimmungen auf recht mannigfache Weise gedeutet zu werden scheint.

---

1) Vgl. Gesamtbericht von Gutzmer, S. 203 — Ferner: die oben (S. 95) zitierte Abhandlung von G. Noodt, S. 24 und 25.

Um das zu erläutern, gebe ich folgende Proben in Gestalt einer Tabelle:

Klasse	Höh. Mädchenschule zu Offenburg[1])	Liselotteschule zu Mannheim[2])	Lessingschule zu Karlsruhe[3])	Friedrich-Luisenschule zu Konstanz[4])
IV	Schlußrechnen an vielseitigem Stoff. Proportionen.	Geschäftsrechnungen. Proportionen.	Schlußrechnungen. Zinsrechnung.	Zinsrechnung. Rabattrechnung. Gewinn- u. Verlustrechnung. Proportionen.
III	Fortführung des Geschäftsrechnens.	Fortführung des Geschäftsrechnens.	Teilungs-, Gesellschafts- und Mischungsrechnungen.	Fortführung des Geschäftsrechnens.
II	Berechnen des Zinses mit Zinszahlen. Konto-Korrente. Wechselrechnungen. Wertpapiere.	Fortführung des Geschäftsrechnens.	Elemente des kaufmännischen Rechnens.	Die Elemente des kaufmännischen Rechnens.
I	Einführung in das Verständnis wirtschaftlicher Verhältnisse. Kranken-, Unfall-, Invaliditäts- und Altersversicherung.	Geschäftsrechnen. Einführung in das Verständnis wirtschaftlicher Verhältnisse sowie des Versicherungswesens.	Terminrechnung; Wertpapiere; Wiederholungen aus allen Gebieten des bürgerlich. Rechnens u. aus der Bruchlehre.	Einführung in das Verständnis wirtschaftl. Verhältnisse. Krankenversicherung. Unfallversicherung. Invaliditäts- u. Altersversicherung. Feuerversicherung. Lebensversicherung. Scheck. Wechsel. Wertpapiere. Staatssteuern und Umlagen. Geldwährung. Geld- u. Börsenwesen. Wiederholung der Zins- und Prozentrechnung, der Teilungs- und Gesellschaftsrechnung.

e) Über die Erläuterungen zu dem Lehrplan.

Zugleich mit dem Lehrplan veröffentlichte der Oberschulrat die dazu gehörigen „Erläuterungen", und zwar in so ausführlicher Form, daß dadurch die Freiheit des Lehrers betreffs der Unterrichtsgestaltung ernstlich berührt wird.

1) Vgl. Jahresbericht über das Schuljahr 1911/12, Offenburg i. B. (H. Zuschneid) 1912, S. 7 und 8.

2) Vgl. Schuljahr 1911/12, Mannheim (J. Boos) 1912; Progr. Nr. 216, S. 19 u. 20.

3) Vgl. Jahresbericht über das Schuljahr 1911/12, Karlsruhe (Malsch & Vogel) 1912; Progr. Nr. 149, S. 12.

4) Vgl. Jahresbericht für das Schuljahr 1911/12, Konstanz (Reuß & Itta) 1912; Progr. Nr. 188, S. 14.

Da diese „Erläuterungen" schon an anderer Stelle in diesen IMUK-Abhandlungen[1]) im Wortlaute abgedruckt sind, verzichte ich hier auf die wörtliche Wiedergabe und ziehe nur solche Punkte aus ihnen zur Erörterung heran, die mir als das Wesentliche darin erscheinen oder zu Bemerkungen Anlaß geben.

Zuerst betonen die „Erläuterungen", daß sich die Lehrpläne und die Unterrichtsweise der höheren Knabenschulen nicht einfach auf den mathematischen Unterricht an den höheren Mädchenschulen übertragen lassen, da an den Knabenschulen das Endziel des ganzen Unterrichts die Vorbereitung der Schüler für die wissenschaftliche Arbeit auf der Hochschule sei. Deswegen umfasse der mathematische Unterricht an den Knabenanstalten mehr oder weniger vollständig das Gesamtgebiet der Elementarmathematik, von dem sich aber nicht ohne weiteres wegen des streng logischen, in sich geschlossenen Aufbaus für die Mädchenschulen ein Teil abschneiden lasse. Man müsse daher diesen Unterricht an den Mädchenschulen aus den eigenen Bedürfnissen dieser Anstalten heraus aufbauen und sowohl bei der Auswahl des Stoffes, wie auch bei seiner didaktischen Verarbeitung die besonderen Eigentümlichkeiten der Mädchenschulen beachten, die in der Regel ihre Schülerinnen nach sieben Schuljahren unmittelbar in das Leben hinaus entlassen.

Im Gebiet des Rechnens, der Arithmetik und der Algebra sollen die Schülerinnen einen tieferen Einblick in die Gesetzmäßigkeit der elementaren Rechenoperationen gewinnen, in weitem Umfang in die Gebiete des angewandten Rechnens eingeführt und mit den Verhältnissen des praktischen Lebens vertraut werden. Über das elementare Zahlenrechnen hinaus sollen sie das Rechnen mit allgemeinen Zahlen erlernen. Gefordert wird auf allen Gebieten die Erziehung zu strengem Denken und besonnenem Urteilen, sowie die Pflege der Selbständigkeit und Selbsttätigkeit. Einblick in den Zusammenhang und die Notwendigkeit der einzelnen Rechenoperationen und Fähigkeit zur zusammenhängenden Wiedergabe der Aufgaben und zur selbständigen Bildung von Beispielen soll angestrebt werden. Zur Beherrschung der Zahlen und der Rechengesetze soll ausgedehntes Kopfrechnen führen.

Das Einmaleins soll bis zur rein mechanischen Beherrschung eingeübt werden. Das Bruchrechnen soll sich unter Vermeidung verwickelter Rechnungen und großer Zahlen auf die einfachsten Aufgaben beschränken. Die dezimale Schreibweise und das Rechnen mit Dezimalzahlen soll an dem Rechnen mit Münzen, Maßen und Gewichten vorbereitet und geübt werden.

Das angewandte Rechnen, das, auf allen Unterrichtsstufen sorgfältig gepflegt, seine Aufgaben aus den verschiedenartigsten Anwendungsgebieten des bürgerlichen Lebens wählen soll, soll durch seine knappen, aber ausreichenden Sacherklärungen den Rechenunterricht zum Sach-

1) Vgl. H. Cramer, diese IMUK-Abhandlungen, Bd. II Heft 4, S. 22ff.

unterricht gestalten. Von den zur Verwendung kommenden Zahlen und Maßen wird verlangt, daß sie den Verhältnissen der Wirklichkeit entsprechen. Nach rechnerischer Behandlung jeder Aufgabe soll durch schätzungsartige Prüfung das Ergebnis auf seine Richtigkeit hin beurteilt werden.

Besonderer Wert wird gelegt auf die Weckung des Verständnisses für die Grundlagen des Wirtschaftslebens und für die Gestaltung des Haushalts in Familie, Gemeinde und Staat. Auch dem Versicherungswesen, besonders der Arbeiterversicherungsgesetzgebung, soll Beachtung zu teil werden. Es will mir scheinen, daß gerade diese zuletzt genannten Vorschriften an den einzelnen Anstalten in sehr verschieden starkem Grade Berücksichtigung finden.

Für die Behandlung der allgemeinen Arithmetik und Algebra wird der wissenschaftliche Aufbau des gesamten arithmetischen Lehrgebäudes abgelehnt. Vorgeschrieben wird die Beschränkung auf die vier niederen Rechnungsarten unter Hinzunahme der Anfangsgründe der Potenz- und Wurzellehre. Ausdrücklich verboten wird die Berücksichtigung von Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten, das tiefere Eindringen in die Wurzellehre sowie das Rechnen mit Logarithmen. Die Gleichungslehre geht nicht über die Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten hinaus.

Für die Einübung der arithmetischen Zeichensprache wird der engste Anschluß an das Rechnen mit den natürlichen Zahlen vorgeschrieben; insbesondere sollen die allgemein gefaßten Gesetze, Regeln und Formeln immer wieder auf bestimmte Zahlen angewandt und so sie in ihrer Bedeutung dem Verständnisse nähergerückt werden.

Die Lehre von den Gleichungen soll nicht als ein in sich abgerundetes und abgeschlossenes Kapitel im Unterricht auftreten, sondern in ihren einzelnen Teilen in zweckmäßiger Weise an die für sie in Betracht kommenden Rechenoperationen in Gestalt von Anwendungen angeschlossen werden.

Der Unterricht in der Geometrie soll, mit anschaulicher Figurenbetrachtung unter Voranstellung regelmäßig gestalteter Gebilde beginnend, möglichst viele Formen, wie sie sich im Schulzimmer, an Modellen und an Gebrauchsgegenständen aus Gewerbe und Kunstgewerbe finden, heranziehen. War es nötig, daß die amtlichen Erläuterungen hierfür sogar noch weitere Beispiele anführten und die Lehrkräfte auf Berücksichtigung von „Tapetenmustern, Ofenkacheln, Tonplatten, Parkettmustern, Fenster- und Türfüllungen“ hinwiesen? Solche Einzelheiten können nach meinem Empfinden ohne Schaden aus amtlichen Kundgebungen, die doch in erster Linie die großen Gesichtspunkte für die Unterrichtsgestaltung betonen sollen, fortbleiben, da verständige Lehrkräfte auch ohne solche Hilfe die richtigen Beispiele zu finden wissen.

An den Figuren soll nun zunächst die Fähigkeit klarer Beschreibung und das Messen geübt werden. Dann erst soll das Zeichnen der Figuren

folgen, wobei im Anfang grundsätzlich die erforderlichen Hilfsmittel, nämlich: Lineal, Maßstab, Winkelscheit, Winkelmesser, Zirkel zu benutzen und bestimmt gewählte Maße zugrunde zu legen sind. Der Sinn für Maßverhältnisse soll besonders auch durch die Übung des Augenmaßes beständig gepflegt werden.

Die Arbeit am Modell sowie die Herstellung einfachster Modelle wird empfohlen. Betont wird sodann die Notwendigkeit der Erziehung der Schülerinnen zu selbsttätiger Verwendung der gewonnenen Kenntnisse, z. B. bei Herstellung von Entwürfen einfacher Ornamente, und die Beeinflussung der Schülerinnen in ästhetischer Hinsicht.

Abgelehnt wird in den Erläuterungen die Aufstellung und Einprägung von Definitionen für die Grundgebilde (Punkt, Gerade, Winkel, Fläche); wohl aber soll die Vorstellung von diesen Gebilden durch vielseitige Betrachtung, Zeichnen, Modellieren bis zur völligen Klarheit herausgearbeitet werden.

Bei der Einübung der geometrischen Grundoperationen und Konstruktionen wird Gewicht gelegt auf Erlernung der verschiedenartigen Ausführungsmöglichkeiten, damit die Schülerinnen mit den verschiedenen Arbeitsmethoden durch stetige Übung vertraut werden.

Das Prinzip der Beweglichkeit der Figuren soll im geometrischen Unterricht schon früh Geltung erlangen, damit die Gebilde den Schülerinnen nicht als starr und unbeweglich erscheinen. Die Operationen des Umwendens, Drehens, Verschiebens von Figuren oder Figurenteilen müssen zu wohlbekannten Arbeitsmitteln werden. Auch das Symmetrieprinzip soll zur Vertiefung des geometrischen Kenntnisschatzes mithelfen, wobei seine Bedeutung für die Gestaltung großer Gruppen von Naturgebilden nicht außer acht zu lassen ist.

Endzweck des ganzen geometrischen Unterrichts soll sein die Erziehung zu räumlichem Denken, die Befähigung zu innerer Anschauung und zur Erfassung begrifflicher Abstraktionen. Darum muß immer die Beschäftigung mit körperlichen Gebilden im Vordergrunde stehen und die sorgfältige Arbeit am konkreten Modell soll durch Ausbildung der Abstraktionsfähigkeit in zielgerechter Abstufung und Steigerung schließlich zur Beschäftigung mit dem nur in der Phantasie möglichen reinen geometrischen Gebilde hinführen. Nicht minder sollen, selbst bei rein anschaulich gefundenen Tatsachen, die Schülerinnen das Bewußtsein der zwingenden Notwendigkeit gewinnen, bis schließlich auf den obersten Klassenstufen auch die Fähigkeit zu voller, streng wissenschaftlicher Beweisführung vorhanden ist.

Als Ganzes beurteilt, wollen die „Erläuterungen", einen gesunden, in sich festgefügten Aufbau des mathematischen Unterrichts an den Mädchenanstalten anbahnen und vieles in ihnen, wie zum Beispiel der Hinweis auf die Beweglichkeit der Gebilde, ferner auf die Pflege der Raumanschauung entspricht gänzlich den Anschauungen, wie sie sich in den „Meraner" und „Stuttgarter" Vorschlägen finden. Inwieweit

diese „Meraner“ Vorschläge, die ja etwas früher in dem gleichen Jahre 1905 an die Öffentlichkeit gelangten, schon die Auffassungen des badischen Oberschulrats beeinflußt haben mögen, entzieht sich meiner Kenntnis; und um so weniger möchte ich mit Bestimmtheit einen direkten Einfluß dieser Vorschläge auf den Lehrplan der Mädchenanstalten vermuten, als sie zunächst nur im Hinblick auf die höheren Knabenschulen aufgestellt waren. In dieser Annahme bestärkt mich der weitere Umstand, daß die „Erläuterungen“ vom Jahre 1905 an der „Pflege des funktionalen Denkens“ ganz vorbeigehen.

Von Bedeutung aber bleibt es, daß im Großherzogtum Baden früher als in irgendeinem anderen deutschen Bundesstaat auch dem mathematischen Unterrichte an den höheren Mädchenschulen feste Bahnen gewiesen worden sind, und wenn das zudem in guter Anpassung an gesunde, neuzeitliche Forderungen der mathematischen Didaktik geschehen ist oder sein sollte, so ist das als ein besonderes Verdienst der badischen Schulverwaltung zu würdigen.

3. Das höhere Lehrerinnenseminar.

a) Allgemeines.

Das Lehrerinnenseminar schließt sich an die anerkannte höhere Mädchenschule an und gehört, obwohl eine Trennung in Volksschulseminar und höheres Lehrerinnenseminar nicht besteht, zu den höheren Lehranstalten. Der Lehrgang des Seminars erstreckt sich über drei Jahre. Der Eintritt in die unterste Seminarklasse ist an die Bedingungen geknüpft, daß die Schülerin in dem Jahre des Eintritts das 16. Lebensjahr erreicht hat und daß sie die Lehraufgaben der höheren Mädchenschule beherrscht. Der Nachweis hierfür kann erbracht werden durch das Abschlußzeugnis der 1. Klasse der höheren Mädchenschule, wenn die Durchschnittsnote mindestens „3“ lautet, oder durch eine besondere Aufnahmeprüfung. Nach Ablauf der ersten beiden Seminarjahre tritt die Schülerin in die erste Lehrerinnenprüfung ein, in der jedoch keine Fremdsprachen geprüft werden. Schülerinnen, die überhaupt nur diese Prüfung abzulegen beabsichtigen, können sich vom Unterricht in einer Fremdsprache befreien lassen. Nach Ablauf eines weiteren Jahres kann dann die zweite, die sog. höhere Lehrerinnenprüfung abgelegt werden, die die Fächer Deutsch, Geschichte, Französisch und Englisch umfaßt. Also Mathematik nicht!

Kandidatinnen, die nur die erste Prüfung bestanden haben, müssen, wenn sie später sog. Hauptlehrerinnen werden wollen, wie die männlichen Kollegen, die sog. „Dienstprüfung“ ablegen. Die bestandene höhere Lehrerinnenprüfung jedoch befreit von der Dienstprüfung und verleiht die Anstellungsfähigkeit an höheren Mädchenschulen sowie an den erweiterten Volksschulen der größeren Städte des Landes.

Auf die wissenschaftliche Ausbildung in den ersten zwei bzw. drei

Jahren folgt ein halbjähriger praktischer Kurs; es beträgt demnach die Ausbildungszeit einer künftigen Lehrerin, je nachdem sie für die Volksschule allein oder auch für die höhere Mädchenschule vorgebildet ist, $2\frac{1}{2}$ bzw. $3\frac{1}{2}$ Jahre.[1])

b) Der Lehrplan und die Mathematik.

Der Lehrplan am Lehrerinnenseminar hat folgende Gestalt:

	Lehrerinnenseminar				
	I	II	III	P.H.[2])	
Religion	2	2	1	–	
Deutsch	4	4	5	3	
Französisch	4	4	8	3 (Französisch und Englisch)	
Englisch	4	4	7		
Pädagogik	2	2	1	1	
Geschichte	3*)	3*)	4*)	1	*) davon je 1 Kunstgeschichte
Erdkunde	2	2	–	1	
Größenlehre	3	3	–	3	
Naturkunde	3	3	–	2	
Schreiben	–	–	–	1	
Zeichnen	2	2	–	1	
Singen	1	2	–	–	
Turnen	1	1	–	–	
Handarbeiten	1**)	1**)	–	–	**) wahlfrei
Italienisch	–	2**)			
Geigenspiel	–	–	2**)	2**)	
Insgesamt	31	32	26	16	

Auffallend an der vorstehenden Stundentafel ist die überaus bescheidene Rolle, die der Mathematik (Größenlehre) im Rahmen der Ausbildung der späteren Lehrerinnen zugewiesen ist, und sonderbar geradezu der Umstand, daß im dritten Jahre für die angehenden höheren Lehrerinnen die Mathematik gänzlich gestrichen ist? Sollte das deswegen geschehen sein, damit diese jungen Mädchen, die doch in erster Linie berufen sind, an höheren Mädchenschulen zu wirken, sich durch nichts von dem verdoppelten Betriebe der neueren Sprachen ablenken lassen? Oder glaubt man, daß es unter ihnen keine Persönlichkeiten gibt, bei denen sich gerade die mathematischen Fähigkeiten für den Lehrberuf an den höheren Mädchenschulen zur Entfaltung bringen ließen. So, wie es jetzt ist, dient das Lehrerinnenseminar in Baden während des dritten Jahres ausschließlich der Ausbildung von Sprachlehrerinnen für die höheren Mädchenschulen.

1) Vgl. hierzu: Jahresbericht der Friedrich-Luisenschule zu Konstanz (Höhere Mädchenschule mit Lehrerinnenseminar) für das Schuljahr 1911–12, Konstanz (Reuß & Itta), Progr. Nr. 188, S. 16 und 17. – Auch: Thedens, S. 41 und 42.

2) Mit Ausnahme der Pädagogik nur Lehrübungsstunden.

c) Beispiel aus den Jahresberichten einiger Anstalten.

Das bestätigen denn auch die Lehrstoffübersichten, die in den Schulberichten veröffentlicht worden sind. Vorgelegen haben mir die Berichte aus Freiburg i. B., Heidelberg, Konstanz und Karlsruhe. Ich kann im allgemeinen nicht finden, daß es in den beiden Seminarjahren, die dem Abschluß der höheren Mädchenschule folgen, mit den mathematischen Kenntnissen der Seminaristinnen überall erheblich vorwärts ginge. Auch ergibt sich, daß die Anforderungen in der Mathematik an den verschiedenen Lehrerinnenbildungsanstalten recht verschiedenartig festgesetzt zu werden scheinen. Um das zu belegen, mögen in vergleichender Übersicht die vorliegenden Angaben auf S. 148 abgedruckt werden.

d) Die Mathematik in den Prüfungsanforderungen.

Diese Lehrstoffübersichten müssen als recht ungleichartig bezeichnet werden, obwohl doch die Anstalten, die sie veröffentlicht haben, auf das gleiche Ziel hinarbeiten. Ferner aber ergibt sich z. B. aus der Konstanzer Übersicht in keiner Weise, in welcher Art der gedankliche Fortschritt bei dem Aufbau des Lehrstoffs sich vollzogen hat. Es bleibt nur der Gesamteindruck: ein recht bunter Strauß!

In der ersten Lehrerinnenprüfung, die sich auf Grund der Verordnung vom 18. Dezember 1884 und 3. November 1905 vollzieht und die Befähigung zum Unterricht an der Volksschule sowie an mittleren und höheren Mädchenschulen verleiht, soweit dort die Fächer der Volksschule in Frage kommen, sind die Anforderungen im Rechnen folgendermaßen festgesetzt[1]):

„Fertigkeit im schriftlichen und mündlichen Rechnen mit ganzen und gebrochenen Zahlen (gemeine und zehnteilige Brüche); Gewandtheit in Anwendung derselben zur Lösung von Aufgaben, die dem bürgerlichen Leben entnommen sind; Kenntnis der regelmäßigen geometrischen Raumformen und ihre Berechnung, die Fähigkeit, das eingeschlagene Verfahren klar darzustellen und zu begründen."

Aus dieser Fassung geht gar nicht hervor, inwieweit die Mathematik als solche bei der Prüfung zur Geltung kommt; jedenfalls kann der auf das Rechnen sich beziehende Teil der Verordnung so verstanden werden, daß auf die Berücksichtigung der allgemeinen Arithmetik kein besonderer Wert gelegt wird. Auch ist der Ausdruck „regelmäßige geometrische Raumformen" mit einer nicht unerheblichen Unklarheit behaftet. Ganz streng aufgefaßt müßte er die Einschränkung der geometrischen Prüfungsanforderungen auf ein winziges Minimum bedingen.

Schon weil ein gediegener Rechenunterricht auch an der Volksschule nur von Lehrkräften erteilt werden kann, die hinreichenden Einblick in die allgemein gefaßte Arithmetik genommen haben, müßte der Ersatz der oben mitgeteilten unbestimmten Fassung der Prüfungsanforderungen im Rechnen durch eine klarere Festsetzung angestrebt werden.

1) Vgl. H. Cramer, diese IMUK-Abhandlungen, Bd. V, Heft 3, S. 65.

Tabelle zu S. 147.

	Lehrerinnenbildungsanstalt zu Freiburg i/B.[1]	Lehrerinnenseminar zu Heidelberg[2]	Lehrerinnenseminar an der Friedrich Luisenschule zu Konstanz[3]	Lehrerinnenseminar zu Karlsruhe[4]
1. Seminarjahr	Potenzen. Wurzeln. Imaginäre Zahlen. Logarithmen. Gleichungen. Geschäftsrechnen. Dreieck, Viereck, Vieleck, Kreis. Flächenberechnungen.	1. Geometrie: Elemente der ebenen Geometrie. 2. Arithmetik: Vertiefende Wiederholung des Schulrechnens mit ganzen und gebrochenen Zahlen. Buchstabenrechnen. Quadratwurzel. Proportionen. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten.	Die natürliche und erweiterte Zahlenreihe. Wissenschaftliche Erklärung der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Potenzen. Wurzeln. Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln. Die Zahlenebene. Imaginäre und komplexe Größen. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Proportionen. Gemeine Brüche und Dezimalbrüche. Zweisatz-, Zins- und Prozentrechnung. Teilungs- und Gesellschaftsrechnung. Gold- und Silberwährung. Geld- und Börsenwesen: Wechsel, Scheck und Wertpapiere. Kopfrechnen. Planimetrie und Flächenberechnung. Kongruenzsätze. Lehrsatz des Pythagoras. Kreis.	1. Geometrie: Planimetrie. 2. Arithmetik: Die vier Grundrechnungsarten. Zahlensysteme. Potenzen und Wurzeln. Lineare Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Verhältnisgleichungen. Diophantische Gleichungen. Kettenbrüche.
2. Seminarjahr	Imaginäre Zahlen. Logarithmen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszinsrechnungen. Quadratische Gleichungen. Ähnlichkeit. Grundzüge der Trigonometrie.	1. Rechnen: Aufgaben aus dem kaufmännischen und bürgerlichen Rechnen. Zahlentheoretisches, Potenzen, Wurzeln, Proportionen. Gleichungen 1. und 2. Grades. Anwendungen. 2. Formenlehre: Geometrie. Berechnung der Oberfläche und des Rauminhaltes einfacher Körper.	Logarithmen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Wechsel und Scheck. Wechseldiskontaufgaben. Geld- und Börsenwesen. Das dekadische Zahlensystem. Regeldetri. Zins- und Prozentrechnung. Teilungs- und Gesellschaftsrechnung. Mischungs- und Legierungsrechnung. Teilbarkeitsregeln mit Beweisen. Brüche und Dezimalbrüche. Der Anfangsunterricht in Bruchlehre in der Volksschule. Kopfrechnung. Berechnung der Oberflächen und der Inhalte der Körper. Zweistrahl. Projektionalität der Strecken. Trigonometrie.	1. Geometrie: Die trigonometrischen Funktionen. Auflösung des rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecks. Oberflächen- und Inhaltsberechnung. 2. Arithmetik: Wurzeln und Logarithmen. Exponentialgleichungen. Reihen. Quadratische Gleichungen. — Rabatt-, Mischungs- und Gesellschaftsrechnungen. Berechnung des Zinses mit Hilfe von Zinszahlen. Kontokorrent. Wechsel.

1) Vgl. Neununddreißigster Jahresbericht, Schuljahr 1911–12, Freiburg i. B. (H. M. Poppe & Sohn), Progr. Nr. 109, S. 16.

2) Vgl. Fünfunddreißigster Jahresbericht über das Schuljahr 1911–1912, Heidelberg (J. Hörning), Progr. Nr. 157, S. 25 und 26.

3) Vgl. Jahresbericht für das Schuljahr 1911–1912, Konstanz (Reuß & Itta), Progr. Nr. 188, S. 18 und 19.

4) Vgl. H. Cramer, diese IMUK-Abhandlungen Bd. V, Heft 3, S. 65.

Auf die Ausbildung und die Prüfung der anderen noch an den höheren Bildungsanstalten für Mädchen wirkenden Lehrkräfte einzugehen, liegt hier keine Veranlassung vor, da dafür die von H. Cramer schon an anderer Stelle in diesen Abhandlungen besprochenen Verhältnisse in Betracht kommen.[1])

4. Das Mädchengymnasium.

a) Allgemeines.

Das seit 1893 bestehende, jetzt mit der Lessingschule verbundene Mädchengymnasium zu Karlsruhe zweigt nach dem 7. Schuljahre, also nach der Klasse IV, von der höheren Mädchenschule ab und führt seine Zöglinge in weiteren 6 Jahren zur Reifeprüfung. Besondere Lehrpläne sind für diese Anstalt nicht aufgestellt worden. Das Mädchengymnasium richtet sich nach dem Frankfurter Reformlehrplan und verleiht seinen Schülerinnen die für sie in Betracht kommenden Berechtigungen des Knabengymnasiums.

b) Der Lehrplan.

Da es an anderer Stelle, z. B. bei H. Cramer (diese IMUK-Abhandlungen Bd. II, Heft 4), noch nicht geschehen ist, so gebe ich hier die Gesamtstundentabelle[2]) für die Gymnasiastinnen, damit man beurteilen kann, wie sich die Mathematik in den Gesamtlehrbetrieb einordnet.

	Vorschule			Höhere Mädchenschule				Gymnasium						Summe von VII–O I
	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	Unter-Tertia	Ober-Tertia	Unter-Sekunda	Ober-Sekunda	Unter-Prima	Ober-Prima	
Religion	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	20
Deutsch	6	7	6	6	5	6	6	2	2	2	2	3	4	38
Französisch	–	–	–	5	6	5	5	3	3	2	2	2	2	35
Englisch	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2*)	2*)	2*)	(6)
Lateinisch	–	–	–	–	–	–	–	10	10	8	8	8	7	51
Griechisch	–	–	–	–	–	–	–	–	–	8	8	8	8	32
Geschichte	–	–	–	–	–	2	2	3	3	3	3	3	3	22
Geographie	–	–	2	2	2	2	2	2	2	–	–	–	–	12
Mathematik (Größenlehre)	6	6	6	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	40
Naturkunde (und Physik)	1 Ansch.	1 Ansch.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	20
Schreiben	–	2	2	2	2	–	–	–	–	–	–	–	–	4
Zeichnen	–	–	–	1	1	2	2	2	2	2*)	2*)	2*)	2*)	10 (18)
Singen	1	2	2	2	2	1	1	1*)	1*)	1*)	1*)	1*)	1*)	6 (12)
Turnen	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2*)	2*)	2*)	2*)	12 (20)
Handarbeiten	2	2	2	2	2	2	2	–	–	–	–	–	–	–
Im ganzen	19	24	26	30	30	30	30	32 (33)	32 (33)	31 (36)	31 (38)	32 (39)	32 (39)	310 (338)

* wahlfrei.

1) Vgl. H. Cramer, diese IMUK-Abhandlungen, Bd. II, Heft 4, S. 41 ff.

2) Vgl. Jahresbericht über das Schuljahr 1911/1912, Karlsruhe (Malsch & Vogel), Progr. Nr. 149, S. 8.

Diese Übersicht besagt, daß am Mädchengymnasium in Karlsruhe der Mathematik der ihr gebührende Einfluß im Rahmen der Unterrichtsverteilung eingeräumt ist. Sie nimmt der Stundenzahl nach unmittelbar hinter dem Latein die zweite Stelle ein.

c) Der Lehrstoff in der Mathematik.

Interessant ist aber auch die in dem genannten Jahresbericht mitgeteilte Lehrstoffübersicht[1]), bei deren Wiedergabe ich mich hier auf die Klassen des Gymnasiums beschränken kann.

U III: Arithmetik: Die drei ersten Grundrechnungsarten.
Geometrie: Grundbegriffe, Symmetrie, Lehre vom Dreieck und Kreis.

O III: Arithmetik: Faktorenzerlegung. Division. Proportionen. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.
Geometrie: Lehre vom Kreis, Parallelogramm und Vieleck. Konstruktionen.

U II: Arithmetik: Wurzeln. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten. Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Textaufgaben.
Geometrie: Flächenverwandlung und Berechnung geradliniger Figuren. Maß und Verhältnis von Strecken. Ähnlichkeit. Kreislehre und Kreisberechnungen.

O II: Arithmetik: Logarithmen. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten. Textaufgaben.
Geometrie: Goniometrie und Trigonometrie.

U I: Arithmetik: Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten.
Geometrie: Stereometrie.

O I: Arithmetik: Kombinatorik; binomischer Lehrsatz und Reihen transcendenter Funktionen. Komplexe Zahlen. Elemente der Differential- und Integralrechnung.
Geometrie: Kegelschnitte in analytischer und synthetischer Behandlung. Sphärische Trigonometrie.

Man wird zugeben müssen, daß der Unterricht, so gegliedert, zu einer vernünftig abgemessenen Zielhöhe führt. Manche Dinge erscheinen zwar etwas spät auf dem Plan, wie z. B. die quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten erst in O II; aber bezeichnend ist die Tatsache, daß die kubischen Gleichungen fehlen, dagegen die Infinitesimalrechnung in O I berücksichtigt wird.

5. Die Mädchenoberrealschule.

a) Allgemeines.

Seit 1909 hat Baden in Mannheim die jetzt mit der Liselotteschule verbundene Mädchenoberrealschule, die von der höheren Mädchenschule nach dem 6. Schuljahre, also nach der Klasse V abzweigt und die Mädchen in 6 weiteren Jahren zur Reifeprüfung führt. Die Mädchenoberrealschule hat somit einen im ganzen zwölf Jahre umfassenden Lehrgang und arbeitet nach dem Lehrplan der badischen Knabenoberrealschulen, deren Berechtigungen sie, soweit sie Zweck und Sinn für Mädchen haben, durch die bestandene Reifeprüfung ihren Abiturientinnen verleiht.

---

1) Vgl. a. a. O. S. 17 und 18.

b) Der Lehrplan.

Die Zöglinge der Mädchenoberrealschule in Mannheim[1]) genossen thre Ausbildung bisher nach folgender Unterrichtsverteilung:

	Vorschule			Unterstufe			Oberrealschule						Summe von VII—O I (9 Jahre)	Entsprechende[2]) Zahl für die Knabenoberrealschule VI—O I (9 Jahre)
	X	IX	VIII	VII	VI	V	U III	O III	U II	O II	U I	O I		
Religion	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	18	18
Deutsch	10	8	7	6	5	6	4	4	4	4	4	4	41	38
Französisch	—	—	—	5	6	5	6	5	5	4	4	4	44	39
Englisch	—	—	—	—	—	—	4	4	4	4	4	4	24	25
Geschichte	—	—	—	—	—	2	2	2	2	3	3	3	17	17
Geographie	—	—	2	2	2	2	2	2	—	—	—	—	10	
Naturgeschichte	—	—	—	2	2	2	2	2	—	—	—	—	10 } 41	} 44
Physik	—	—	—	—	—	—	—	2	2	3	3	3	13	
Chemie	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	2	2	8	
Rechnen	6	6	6	4	4	4	3	} 5						
Mathematik	—	—	—	—	—	—	2		} 7	7	7	7	} 50	} 48
Darstellende Geometrie	—	—	—	—	—	—	—	—						
Zeichnen	—	—	—	1	1	2	2	2	2	2	2	—	14	18
Schreiben	—	3	3	2	2	—	—	—	—	—	—	—	4	5
Turnen	—	—	—	2	2	2	2	2	2	2	2	2	18	18
Gesang	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	—	—	9	—
Handarbeiten	2	2	2	2	2	2	—	—	—	—	—	—	6	—
Tanz	—	—	—	—	—	—	—	—	2	1	—	—	3	—
Latein*)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3*)	3*)	3*)	(9)	wahlfrei
Im ganzen	21	22	23	30	30	30	32	33	35	35 (38)	33 (36)	31 (34)	289 (298)	

*) wahlfrei.

Auch in diesem Lehrplan tritt die Mathematik (einschl. Rechnen und darstellende Geometrie) mit der ihr zukommenden Bedeutung hervor; sie steht nicht nur während der hier besonders berücksichtigten letzten neun Schuljahre, sondern auch noch bei Einrechnung der drei Vorschuljahre der Gesamtstundenzahl nach an der Spitze aller Fächer.

c) Der mathematische Lehrstoff.

Der Lehrstoff in der Mathematik war an der genannten Anstalt von Kl. UIII ab wie folgt gegliedert:

U III: Rechnen: Prozentrechnung (allgemeine Prozentrechnung, Zinsrechnung, Rabatt- und Diskontrechnung). Teilungs- und Mischungsrechnung. Terminrechnung. Einführung in die allgemeine Arithmetik.

1) Vgl. Jahresbericht über das Schuljahr 1911/12, Mannheim (J. Boos), Progr. 216, S. 12—35.

2) Vgl. Schulverordnungsblatt für das Großherzogtum Baden, 1912 Nr. XVI, Bekanntmachung des Großherzoglichen Ministeriums des Kultus und Unterrichts: Die Lehrpläne der Realgymnasien mit neusprachlichem Unterbau, der Oberrealschulen und Realschulen betreffend. S. 157. Dieser erst kürzlich festgesetzte Plan tritt mit Beginn des Schuljahres 1912/13 in Kraft.

Geometrische Anschauungslehre: Raumgrößen, ihre Ausdehnungen und Begrenzungen. Dreieck, Viereck, Kreis. Berechnung einfacher Flächen und Körper.

O III: Rechnen: Rechnungen des bürgerlichen und des kaufmännischen Lebens.
Arithmetik: Die 5 ersten Rechnungsarten in allgemeinen Zahlen. Maß der Zahlen, Teilbarkeit, Faktorenzerlegung. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. Proportionen. Protenzrechnen.
Geometrie: Die Raumgrößen, Strecke, Winkel, Dreieck, Viereck, Kreis, Symmetrie, Kongruenz. Geometrische Örter. Gleichheit, Verwandlung, Teilung der ebenen Figuren. Flächenmessung. Körperberechnung.

U II: Rechnen: Lösungen von Aufgaben aus dem Geschäftsrechnen (mit Algebra).
Arithmetik: Potenz- und Wurzelrechnen. Irrationalzahlen. Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten.
Geometrie: Proportionalität und Ähnlichkeit ebener Gebilde. Vergleichung der Inhalte. Kreisberechnung.
Darstellender Unterricht: Geometrisches Zeichnen ebener Gebilde. Übungen im Gebrauch von Zirkel, Lineal und Reißfeder an Flächenmustern, Kreiseinteilungen und entsprechenden geometrischen Konstruktionen.

O II: Arithmetik: Logarithmen. Arithmetische und geometrische Reihen; Zinseszins und Rentenrechnung. Quadratische Gleichungen.
Geometrie: Goniometrie, ebene Trigonometrie.
Darstellende Geometrie: Schrägbilder von Flächen und Körpern; orthogonale Projektion einfacher Körper. Darstellung von Punkt und Gerade.

U I: Arithmetik: Kombinatorik. Der binomische Satz für positive ganze Exponenten. Komplexe Zahlen. Höhere und besonders kubische Gleichungen. Graphische Funktionen. Die Gleichungen des Kreises, der Parabel, Ellipse. Die verschiedenen Formen der Gleichung der Geraden. Differenzen- und Differentialquotient von $y = ax^n$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\lg x$, $y = u + v$, $u \cdot v$, $u : v$, $y = \arcsin x$.
Geometrie: Stereometrie, sphärische Trigonometrie (Nepersche Regeln, Sinus- und Cosinussatz).
Darstellende Geometrie: Orthogonale Projektion. Rekonstruktion der wahren Größe von Strecken, Winkeln und Vielecken.

O I: Maxima und Minima. Unendliche Reihen. Flächenberechnung durch Integration. Harmonische Punkte und Strahlen. Vollständiges Viereck und Vierseit. Die Kegelschnitte als geometrische Örter. Analytische Geometrie der Ebene. Körperschnitte. Entwicklungen.

Die Stoffeinteilung entspricht im wesentlichen dem von H. Cramer[1]) in diesen IMUK-Abhandlungen schon veröffentlichten Lehrplan vom 27. März 1895 für die badischen Knabenoberrealschulen. Dieser Lehrplan ist aber inzwischen durch Bekanntmachung vom 12. Juni 1912 durch einen neuen Plan[2]) ersetzt, der nunmehr, d. h. mit Beginn des Schuljahres 1912/13 auch für die Mädchenoberrealschule Geltung erlangt haben dürfte.

d) Stellungnahme zu dem neuen Lehrplan von 1912 für die badischen Oberrealschulen.

Eine nicht unerhebliche Schwierigkeit hinsichtlich der Anpassung des Lehrganges der Mädchenoberrealschule an diese neuesten Vorschriften

1) Vgl. H. Cramer, diese IMUK-Abhandlungen, Bd. II, Heft 4, S. 18ff.

2) Darauf wird H. Cramer in dem demnächst erscheinenden Hefte 8 von Bd. II dieser IMUK-Abhandlungen noch eingehen.

dürfte wohl darin liegen, daß die Mädchen in den Klassen VII, VI, V, die den Klassen VI, V, IV der Knabenoberrealschule entsprechen, im Rechnen nach dem Plane der höheren Mädchenschule unterrichtet werden, wobei alles rein Mathematische, abgesehen von dem geometrischen Anschauungskurs in der Kl. V, aus dem Spiele bleibt. Auf der Knabenoberrealschule dagegen sollen in Zukunft die einfachsten geometrischen Betrachtungen schon in Kl. VI einsetzen und dann systematisch so weiter geführt werden, daß die Kl. UIII in der Arithmetik sich mit der Einführung in die Buchstabenrechnung und mit Gleichungen 1. Grades, in der Geometrie aber schon „Oberfläche und Inhalt von Kreiszylinder, Kreiskegel und Kugel; zeichnende Darstellung von einfachen Zahlenreihen und von Wertetabellen einfacher Funktionen" bringen soll.

Wie die von der höheren Mädchenschule auf die Mädchenoberrealschule übergehenden Mädchen den soeben bezeichneten Vorsprung, den die Knaben bis zum Eintritt in die Untertertia erlangen, ausgleichen sollen, ist vor der Hand nicht recht einzusehen. Mir scheint, daß einmal dieser Punkt, sodann aber auch die Frage der Erwägung wert wäre, ob man nicht auch in Baden gut täte, für die besonderen Anstalten, die nur Mädchen zum Studium vorbereiten sollen, auch ganz eigenartige, nicht mit den Plänen der Knabenanstalten übereinstimmende Lehrpläne aufzustellen. Dabei müßte dann gleichzeitig ganz allgemein die Gesamtausbildungszeit der Mädchen vom Eintritt in die unterste Klasse der Vorschule bis zur Reifeprüfung auf 13 Jahre festgesetzt werden. Auch auf der Oberrealschule! Gerade da können die jungen Mädchen angesichts der hohen Zielforderungen in der Mathematik und in anderen Fächern die verlängerte Ausbildungszeit recht gut gebrauchen.

Zur Begründung der soeben aufgestellten Forderung sei noch erwähnt, daß der neue mathematische Lehrplan für die Primen der Ober-Oberrealschulen den folgenden Stoff vorschreibt:

UI: Algebra: Ergänzung der Zinseszins- und Rentenrechnung. Kombinatorik. Binomischer Satz für ganze positive Exponenten. Gaußsche Zahlenebene. Die Einheitsgleichung[1]). Gleichungen dritten Grades und einiges aus der Theorie der höheren algebraischen Gleichungen und ihre näherungsweise Lösung an der Hand von Funktionskurven. Der Differentialquotient, geometrisch abgeleitet zunächst an ganzen algebraischen Funktionen, an der gleichseitigen Hyperbel und an der Sinus- und Kosinuslinie, Bildung des Differentialquotienten für Potenz, Sinus- und Kosinus, Maxima und Minima. Diskussion von Kurven.

Geometrie: Sphärische Trigonometrie. Dimensionen von Kugel und Kugelstücken. Die Gleichung der geraden Linie, des Kreises, von Pol und Polare. Die Mittelpunktsgleichungen der Kegelschnitte; Gleichungen einiger geometrischer Örter. Grund- und Aufriß von Prisma, Zylinder, Pyramide und Kegel; ebene Schnitte durch Körper; Netzabwicklungen. Die Grundsätze der projektiven Geometrie.

OI: Übersicht über den Aufbau der Arithmetik. Einfachste Reihenentwicklung, Berechnung von e und π. Exponentiale, logarithmische Funktion, von zyklometrischen Funktionen Arcustangens und Arcussinus. Einführung des Begriffs des

1) Gemeint ist die Gleichung: $x^n = 1$

Integrals. Unbestimmte Integrale und bestimmte Integrale als Berechnungsbeispiele an Flächen, Körpern, Drehungsmomenten und Trägheitsmomenten.
Verschiebung und Drehung des Koordinatensystems. Reduktion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades auf die Hauptachse.
Die Kegelschnitte als projektive Gebilde. Geometrische Verwandtschaften.
Perspektive, Bewegungskurven, Krümmungskreis. Methode und geschichtliche Entwicklung der Mathematik.

Im Vergleich zu den Schlußforderungen der mit 13 Schuljahren abschließenden preußischen Oberrealschulkurse geht Baden demnach ganz erheblich weiter, und darum muß, wenn die straffe Anspannung der Kräfte den badischen Mädchen nicht gesundheitlichen Schaden bringen soll, für sie die jetzt noch bestehende zwölfjährige Oberrealschulausbildung um ein Jahr verlängert werden!

6. Die Koedukation.

Über die Möglichkeit, daß Mädchen zum Besuch von höheren Lehranstalten für Knaben zugelassen werden können, bestimmt § 8 der „Landesherrlichen Verordnung vom 18. September 1909“[1]) das Folgende:

„Zum Besuch von Realschulen und Oberrealschulen, die für Knaben bestimmt sind, dürfen Mädchen zugelassen werden, wenn an dem Orte eine besondere höhere Lehranstalt für Mädchen nicht besteht.

Abgesehen hiervon bedürfen Mädchen zur Aufnahme in Knabenschulen jeweils im einzelnen Fall der Genehmigung der Oberschulbehörde. Die Genehmigung soll in der Regel versagt werden, wenn an dem Ort eine Anstalt für Mädchen errichtet ist, die die gleichen Bildungsziele verfolgt, wie die Knabenanstalt, für welche die Aufnahme nachgesucht wird.“

In solchen Fällen, wie den hierdurch bezeichneten, genießen die Mädchen genau dieselbe mathematische Ausbildung wie die mit ihnen zusammenunterrichteten Knaben. Über diesen koedukativen Unterricht hat sich H. Cramer[2]) in seinem Berichte schon soweit geäußert, daß ich es mir hier versagen kann, an dieser Stelle noch näher darauf einzugehen.

G. Das Königreich Württemberg.

1. Allgemeines.

Das württembergische höhere Mädchenschulwesen wurde bald nach den Weimarer Beschlüssen des Deutschen Vereins von der Regierung unter Würdigung jener Beschlüsse staatlich geordnet. Seit dem Jahre 1877 besteht diese später ergänzte Regelung[3]). Da nun in Württemberg das in die letzten Jahre fallende Vorgehen anderer deutscher Staaten, das Mädchenschulwesen in weiterem Umfange wieder neu zu ordnen, bisher keine Nachahmung gefunden hat, so liegen die Verhältnisse dort

1) Vgl. Verordnungsblatt des Großherzoglichen Oberschulrats, 1909, Nr. XXI, S. 301.
2) Vgl. H. Cramer, diese IMUK-Abhandlungen, Bd. II, Heft 4, S. 3 und 4.
3) Vgl. Thedens, S. 34.

zurzeit noch verhältnismäßig einfach. Es gibt in Württemberg zunächst die zehnklassige höhere Mädchenschule, die nach dem „Lehrplan der höheren Mädchenschulen“ von 1903[1]) unterrichtet. An weiterführenden Bildungsanstalten gibt es nur das private Königin Charlotte-Gymnasium und das höhere Lehrerinnenseminar, beide in Stuttgart.

2. Die höhere Mädchenschule.

a) Die Stundentafel.

Aus dem Lehrplan ersieht man, daß die Klassenzählung an den höheren Mädchenschulen, die seit dem 1. September 1903 wie die Knabenschulen der „Königlichen Ministerialabteilung für die höheren Schulen“ unterstellt sind[2]), wie in Bayern den Schuljahren entsprechend mit I beginnend durchgeführt wird. Gleich auf der ersten Seite bringt der Lehrplan die Stundentafel, die ich wieder abdrucke.

Fächer	Klasse I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	Zusammen
1. Religion	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	25
2. Deutsch	11	9	9	5	5	4	4	4	4	4	59
3. Französisch	–	–	–	7	7	6	7	5	4	4	40
4. Englisch	–	–	–	–	–	–	–	4	5	5	14
5. Arithmetik	4	4	4	4	4	3	3	2	2	2	32 } 38
und Geometrie	–	–	–	–	–	–	–	–	3	3	6 }
6. Anschauungsunterricht	1	1	1	–	–	–	–	–	–	–	3 }
7. Naturgeschichte (mit Gesundheitsl.)	–	–	–	–	1	2	2	2	–	–	7 } 14
8. Naturlehre (Physik und Chemie)	–	–	–	–	–	–	–	–	2	2	4 }
9. Erdkunde	–	–	–	1	1	2	2	2	2	2	12
10. Welt- und Kunstgeschichte	–	–	–	–	1	2	2	2	3	3	13
11. Schönschreiben	–	2	2	2	1	1	–	–	–	–	8
12. Zeichnen	–	–	–	–	–	2	2	2	2	2	10
13. Singen	–	–	1	2	2	2	2	1	–	–	10
14. Turnen	–	–	1	1	2	2	2	2	2	2	14
15. Handarbeiten	3	3	3	3	3	2	2	2	–	–	21
Zusammen	22	22	24	28	30	30	30	30	31	31	278
Ohne Handarbeiten	19	19	21	25	27	28	28	28	31	31	257

Diese Stundentafel weicht von denjenigen anderer deutschen Staaten nicht unerheblich ab. Im übrigen will sie von einem besonderen Gesichtspunkt aus gewürdigt sein, der den methodischen Bemerkungen zum Französischen entnommen werden muß. Dort findet sich wörtlich der Satz[3]): „Beim fremdsprachlichen Unterricht darf nicht aus dem Auge gelassen werden, daß auch er seinen Beitrag zur logischen Schulung des Geistes liefern muß, da für die höhere Mädchenschule im sprachlichen Unterricht das Schwergewicht des gesamten Unterrichtsbetriebes liegt.“ Dieser Ausspruch ist bezeichnend für die amtliche Wertung der württembergischen

1) Vgl. Lehrplan für die höheren Mädchenschulen in Württemberg, 1903, Stuttgart (Decker & Hardt); eingeführt durch Erlaß des Kgl. Ministeriums des Kirchen- und Schulwesens vom 9. März 1903.

2) Vgl. Thedens, S. 34. 3) Vgl. den Lehrplan, S. 13.

höheren Mädchenschulen. Sie sollen durchaus Sprachschulen sein; daher denn auch die besonders in den mittleren Klassen so starke Vorherrschaft des Französischen. Die drei Sprachen Deutsch, Französisch und Englisch nehmen von der Gesamtstundenzahl (278) zusammen schon 113 fort, d. h. 41 Proz. Die Arithmetik (einschl. Rechnen) und Geometrie sind auf die einzelnen Klassen noch mit leidlichen Ansätzen gekommen; jedenfalls kann man sagen, daß der württembergische Plan in den fünf ersten Jahrgängen ein im ganzen ausreichendes Stundenmaß für das Rechnen bereit hält. Dann aber tritt das Rechnen etwas mehr zurück, um in den letzten beiden Schuljahren der mit nur 2 × 2 Stunden bedachten Arithmetik in allgemeiner Fassung Platz zu machen. Die Geometrie kommt auch erst mit dem 9. und 10. Schuljahre zu ihrem Recht mit 2 × 3 Stunden. Damit besteht betreffs des eigentlichen mathematischen Unterrichts an den württembergischen höheren Mädchenschulen noch ein Zustand, der im Vergleich zu der Regelung in den übrigen Staaten, die in dieser Abhandlung vorher besprochen sind, als wenig erfreulich bezeichnet werden muß. Eine der Hauptaufgaben der hoffentlich bald einsetzenden Neuordnung in Württemberg muß wohl die bessere Wertung und auch die schon frühere Einführung des mathematischen Unterrichts an den Mädchenanstalten bilden.

b) Die amtlichen Vorschriften für Rechnen und Mathematik.

Die Einzelvorschriften für den Rechen- und Mathematikunterricht geben zunächst für die Arithmetik, sodann für die Geometrie jedesmal Lehrziel, Lehraufgabe und methodische Bemerkungen an[1]. In der folgenden Darstellung will ich die Dinge so gruppieren, daß die Angaben über die Lehrziele zusammengefaßt werden; dann folgen die Lehraufgaben für die einzelnen Klassen und endlich vereint die methodischen Bemerkungen. Im übrigen zitiere ich wörtlich:

α) Das Lehrziel.

Arithmetik: Gründliches Verständnis der Rechnungsarten, Gewandtheit im Zahlenrechnen und Lösung von einfachen Aufgaben des bürgerlichen Rechnens sowie von Gleichungen ersten Grades.

Geometrie: Elementare Geometrie bis zur Kreisberechnung. Übung in geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

β) Die Lehraufgaben.

Kl. I: Zu- und Abzählen mit den Zahlen 1–6 im Zahlenraum von 1–100.

Kl. II: Die vier Grundrechnungsarten mit unbenannten großen Zahlen von 1–999 mit Beschränkung auf einziffrige Multiplikatoren und Divisoren. Das 1 mal 1 und 1 in 1.

Kl. III: Numerieren bis zu siebenstelligen Zahlen, die vier Grundrechnungsarten mit unbenannten ganzen Zahlen, einfache Übungen mit benannten ganzen Zahlen.

Kl. IV: Fortsetzung der Übungen mit unbenannten und benannten ganzen Zahlen. Münzen, Maße und Gewichte.

1) Vgl. den Lehrplan, S. 14–17.

Kl. V: Einleitung in die Raumlehre. Zu- und Abzählen gleichnamiger Brüche. Multiplikation und Division der Brüche mit ganzen Zahlen. Erweitern und Vereinfachen der Brüche. Zweisatz- und einfache Dreisatzaufgaben, soweit sie zur Einübung der Bruchlehre geeignet sind.

Kl. VI: Gemeine und Dezimalbrüche. Dreisatzaufgaben.

Kl. VII: Fortsetzung der Übungen aus der Bruchlehre. Schlußrechnung. Prozentrechnung und ihre Anwendung auf Zins-, Gewinn- und Verlustrechnung.

Kl. VIII: Teilungs- und Gesellschaftsrechnung. Mischungsrechnung. Obligationen und Wechselrechnung.

Kl. IX: Arithmetik: Wiederholung der Grundrechnungsarten unter Benützung allgemeiner Zahlzeichen. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Daran anknüpfend Textgleichungen, deren Inhalt vorwiegend den Aufgaben des bürgerlichen Rechnens zu entnehmen ist.

Geometrie: Lehre von den Strecken und Winkeln, die wichtigsten Sätze vom Dreieck. Parallelogramm und Trapez. Übungen im Lösen von einfachen Konstruktionsaufgaben.

Kl. X: Arithmetik: Ergänzung der Lehre von den Grundrechnungsarten. Potenzen mit ganzen Exponenten. Wurzeln (insbesondere Quadratwurzeln). Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Auch hier sind die angewendeten Aufgaben in erster Linie dem Kreise des gewöhnlichen Rechnens zu entnehmen.

Geometrie: Kreislehre. Flächeninhalt von Figuren. Ähnlichkeit. Das Wichtigste aus der Kreisberechnung. Konstruktionsaufgaben.

γ) Die methodischen Bemerkungen zu den Lehraufgaben.

Arithmetik: In der Arithmetik ist der Hauptwert auf die Übung in der Behandlung der Zahlgrößen und auf das Verständnis der Rechenoperationen zu legen. Das Kopfrechnen darf gegen das schriftliche Rechnen im Unterricht nicht zurücktreten. Beim schriftlichen wie beim mündlichen Rechnen ist streng auf mathematisch richtige Behandlung, beim schriftlichen Rechnen auch auf klare übersichtliche Darstellung zu sehen.

In den oberen Klassen sollen von den Aufgaben des bürgerlichen Rechnens nur die einfacheren durchgenommen werden. Künsteleien sind zu vermeiden.

Schwierige Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik, insbesondere verwickelte Multiplikationsaufgaben von mehrgliedrigen Ausdrücken miteinander und Division mehrgliederiger Ausdrücke durch mehrgliedrige sind nicht zu verlangen. In der Lehre von den Wurzeln genügt es, so weit zu gehen, als zum Verständnis von Aufgaben aus der Flächenberechnung und der Hauptsätze der Physik notwendig ist. Von den Gleichungen sind vorwiegend solche mit reinen Zahlenkoeffizienten zu behandeln.

Geometrie: Es soll dem Lehrer unbenommen sein, den ersten Unterricht in der Geometrie als Anschauungsunterricht zu erteilen. Nach einem solchen einleitenden Unterricht, der sich bis zur Lehre von der Kongruenz der Dreiecke erstrecken kann, sollen die übrigen Teile des Systems in strenger Weise behandelt werden. Es kommt dabei nicht sowohl auf Behandlung einer möglichst großen Anzahl von Sätzen und Aufgaben an als darauf, daß die wichtigsten Sätze gründlich verstanden und in ihrer Anwendung auf einfache Aufgaben gut eingeübt werden. Dieser Einübung dient auch das geometrische Zeichnen, das im engsten Anschluß an den geometrischen Unterricht zu treiben ist.

δ) Bemerkungen zu den amtlichen Festsetzungen.

Württemberg läßt an seinen höheren Mädchenschulen, wie es u. a. Preußen auch hat, im Rechenunterricht gleichfalls schon im dritten Schul-

jahre mit großen Zahlen arbeiten, ist aber im Vorteil durch seine größere Stundenzahl. Daß ich meinerseits auch hier die bekannten Bedenken wiederholen könnte, brauche ich wohl nicht erst besonders zu erwähnen. Bis zur Klasse VII einschließlich nimmt dann der Stoffaufbau in planmäßiger Weise an Inhalt und Umfang zu. Das für Klasse VIII vorgeschriebene Pensum sollte man jedoch lieber streichen, dafür schon mit der eigentlichen Mathematik um soviel früher beginnen und dann den Rechenstoff von Klasse VIII an geeigneten Stellen im mathematischen Unterricht verarbeiten. Der mathematische Lehrstoff in den Klassen IX und X konnte angesichts der bestehenden Sachlage nicht weiter ausgreifend gestaltet werden und hält sich bei bescheidener Zielhöhe im richtigen Verhältnis zur verfügbaren Zeit. Wünschenswert ist natürlich baldiger Fortschritt zu umfassenderen Leistungen.

Die methodischen Bemerkungen enthalten, so kurz wie sie glücklicherweise sind, klare Grundsätze und berühren dadurch wohltuend, daß sie alles, was nach Künstelei aussieht oder was mit lästigem, ermüdenden Aufwand verknüpft ist, der Behandlung im Unterricht entzogen sehen wollen. Beachtenswert ist der bündige Hinweis auf die Forderung streng mathematischer Behandlung des Rechenstoffes bei der mündlichen wie schriftlichen Bearbeitung.

c) Die Abgangsprüfung.

Schließlich muß noch eine in Württemberg an den höheren Mädchenschulen bestehende Einrichtung besprochen, auf die ich ausführlicher in der Absicht eingehe, um zu zeigen, wie sehr dabei die Mathematik in den Hintergrund gedrängt wird.

An den voll ausgebauten zehnklassigen höheren Mädchenschulen Württembergs besteht nämlich die Einrichtung der Abgangsprüfung, die durch die „Bestimmungen für die Abgangsprüfung an den höheren Mädchenschulen Württembergs vom 1. März 1907“[1]) im einzelnen geregelt ist. Der Zweck dieser Prüfung ist, zu ermitteln, ob die Schülerinnen dasjenige Maß der Schulbildung erlangt haben, welches den Lehrzielen und Lehraufgaben des Lehrplans für die höheren Mädchenschulen entspricht (§ 1). Die Berechtigung zur Abhaltung der Prüfung steht allen voll ausgebauten und staatlich anerkannten höheren Mädchenschulen zu (§ 2_1). Die Teilnahme an der Prüfung ist freiwillig (§ 2_2). Zu der Prüfung, welche innerhalb der letzten 6 Wochen des Schuljahres vorzunehmen ist, können nur Schülerinnen der obersten Klasse zugelassen werden, welche ihr mindestens 1 Jahr angehört und an allen Unterrichtsfächern teilgenommen haben (§ 3_1)[2]). Über die Zulassung entscheidet die

1) Vgl. Bestimmungen für die Abgangsprüfung an den höheren Mädchenschulen Württembergs vom 1. März 1907, Stuttgart (Decker & Hardt) 1907.

2) Unter gewissen Verhältnissen mögliche Befreiungen vom Unterricht in Religion, Zeichnen und Turnen bleiben ohne Einfluß auf die Zulassung. (Vgl. Anmerkung zu § 3_1).

Ministerialabteilung für die höheren Schulen, der die bis zum 1. Februar beim Rektorat der Schule eingegangenen Meldungen mit Beifügung der Personalien und Schulzeugnisse zugestellt werden (§ 3_2). Den Vorsitz in der aus den zuständigen Lehrern oder Lehrerinnen der obersten Klasse bestehenden Prüfungskommission führt der dazu bestellte „K. Kommissär" (§ 4_1), der entweder selbst Mitglied der Ministerialabteilung für die höheren Schulen ist oder dessen Befugnisse auf den Rektor ganz oder teilweise übertragen werden können (§ 4_2). Für jedes Prüfungsfach gibt es einen Berichterstatter, der in der Regel der Lehrer des betreffenden Fachs in der obersten Klasse ist, und einen vom Rektor aus der Zahl der übrigen Kommissionsmitglieder zu bestellenden Mitberichterstatter (§ 4_3).

Die Prüfung erstreckt sich auf Deutsch, Französisch, Englisch und Mathematik. Im schriftlichen Teile sind zu liefern 1) ein deutscher Aufsatz, 2) eine Übersetzung eines nicht zu schwierigen Stückes aus dem Deutschen ins Französische, 3) ein nicht zu schwieriges französisches Diktat mit Übersetzung ins Deutsche, 4) eine Übersetzung eines nicht zu schwierigen Stückes aus dem Deutschen, 5) die Lösung einiger arithmetischen und geometrischen Aufgaben (§ 5_1). Die mündliche Prüfung erstreckt sich nur auf Französisch und Englisch, wobei die Befreiung von der Prüfung in einem Fache oder auch in beiden Fächern möglich ist (§ 5_3).

So erfreulich die Berücksichtigung der Mathematik bei der schriftlichen Prüfung ist, um so eigenartiger ist die Zuspitzung der mündlichen Prüfung auf die Fremdsprachen allein. Das hat natürlich seinen Grund in der schon oben erwähnten Tatsache des gewaltigen den fremden Sprachen eingeräumten Übergewichts.

Wie für jedes andere Fach sind auch für die mathematische Prüfung mindestens zwei Aufgabenreihen zu stellen, aus denen der Berichterstatter der Ministerialabteilung die Auswahl trifft, wenn er es nicht vorziehen will, sämtliche oder einzelne Aufgaben selbst zu stellen (§ 6_1). Wie üblich, wird der verschlossene die Aufgaben enthaltene Umschlag in Gegenwart der Schülerinnen unmittelbar vor der schriftlichen Prüfung geöffnet (§ 6_2).

Für die deutsche und mathematische Arbeit sind je 3 Stunden, für jede der 3 fremdsprachlichen Arbeiten je 2 Stunden angesetzt (§ 7_3). Die Beurteilung der Arbeiten geschieht nach folgender Zeugnisskala: vorzüglich (8), sehr gut (7), gut (6), befriedigend (5), genügend (4), nicht ganz genügend (3), ungenügend (2), ganz ungenügend (1) (§ 8_2) — eine recht weitschichtige Stufenfolge, wie sie anderswo nicht vorhanden ist.

Nach Beendigung der mündlichen Prüfung werden in einer Schlußberatung der Prüfungskommission die von den Prüflingen erlangten Zeugnisse in eine Liste eingetragen und nach Einsetzung der Schulzeugnisse in Geschichte, Erdkunde und Naturlehre das Gesamtzeugnis festgestellt. Hierbei wird das Zeugnis im deutschen Aufsatze doppelt gerechnet. Die übrigen 6 Prüfungszeugnisse: Französisch Komposition,

Französisch Exposition (Diktat und Übersetzung gleich gewertet), Französisch mündlich, Englisch mündlich, Mathematik sowie die 3 Schulzeugnisse werden je einfach gezählt (§ 10_1). Wer nicht mindestens das Durchschnittszeugnis „genügend"(= 4) erreicht, hat die Prüfung nicht bestanden (§ 10_2).

Gerade wegen dieses letzten Satzes habe ich vorher etwas weiter ausgeholt. Es fällt nämlich auf, daß die Schulleistungen in den Gegenständen, die schriftliche Prüfungsfächer sind, also auch in der Mathematik, bei der Prüfung gar nicht zur Geltung kommen. Das dürfte als eine starke und auch nicht unbedenkliche Abweichung von dem in Deutschland sonst wohl allgemein üblichen entgegengesetzten Verfahren zu bezeichnen sein. Andererseits aber erdrücken die sprachlichen Prüfungsleistungen, falls sie mindestens befriedigend oder besser ausfallen, die anderen Zeugnisse in dem Maße, daß diese gar keinen nennenswerten Einfluß mehr auf das Bestehen oder Nichtbestehen ausüben können. Da nirgend davon die Rede ist, daß im Falle nicht genügender Leistungen in einem Fache um so befriedigendere in einem anderen Fache vorliegen müssen, so kann es m. E. in Württemberg vorkommen, daß Schülerinnen mit sehr schwachen Leistungen in Geschichte, Erdkunde und Naturlehre unter Hinzutritt von ganz ungenügenden Leistungen in der Mathematik die Prüfung bestehen. Man kann mit Leichtigkeit passende Beispiele bilden. Die Mathematik ist eben ganz und gar Nebenfach.

Auf die weiteren Bestimmungen der Prüfungsordnung brauche ich nicht einzugehen, da sie hier keine Bedeutung gewinnen.

d) Die Koedukation.

Durch Ministerialerlaß vom 14. Januar 1909[1]) ist für die Handhabung der Koedukation in Württemberg eine feste Ordnung erlassen worden, deren Hauptpunkte ich hier kurz anführen möchte, weil in allen Fällen der Koedukation die betreffenden Mädchen denselben mathematischen Unterricht wie die mit ihnen zusammen unterrichteten Knaben genießen und dann den Anforderungen der Knabenanstalten zu genügen haben:

Mädchen können zum Unterricht der höheren Knabenschulen in außerordentlicher Weise zugelassen werden, und zwar mit Genehmigung der Ministerialabteilung. Die Zulassung kann jederzeit auf Antrag der Schulleitung insbesondere auch wegen ungenügender Leistungen zurückgezogen werden. Für Orte, an denen eine unter Aufsicht der Ministerialabteilung stehende höhere Mädchenschule sich befindet, wird die Zulassung zu den entsprechenden Knabenschulen oder Klassen derselben in der Regel nicht gewährt (§ 1). Die Zulassung gilt ordentlicher Weise für den gesamten lehrplanmäßigen Unterricht der betr. Klasse (mit

1) Vgl. Amtsblatt des Königlich Württembergschen Ministeriums des Kirchen- und Schulwesens, 1909. No. 1.

Ausnahme des Turnens), wobei in dem Unterricht zwischen Knaben und Mädchen kein Unterschied zu machen ist. Teilnahme an einzelnen Fächern wird nur ausnahmsweise gestattet (§ 3).

Das ist das Wesentliche. Beachtenswert ist dabei, daß die Koedukation auch in Württemberg nicht als anzustrebende Norm, sondern nur als Ausnahme hingestellt wird.

3. Zur Lehrerinnenbildung.

An den württembergischen höheren Mädchenschulen unterrichten neben männlichen Lehrkräften, über deren Ausbildung man das Nähere in der IMUK-Abhandlung von E. Geck[1]) nachsehen wolle, in überwiegender Mehrzahl Damen. Unter diesen interessieren uns die im Volksschulseminar ausgebildeten Lehrkräfte hier weniger, da in diesen IMUK-Abhandlungen darüber auch schon das Erforderliche berichtet ist[2]). Indessen müssen wir hier verzeichnen, wie es in Württemberg mit der Ausbildung der Damen steht, die im höheren Lehrerinnenseminar vorgebildet worden sind. Ein solches höheres Seminar besteht als staatliche Anstalt in Stuttgart[3]). Es ist auf drei Jahrgänge berechnet. Die dieses höhere Lehrerinnenseminar besuchenden Damen legen die sog. Dienstprüfung für Hauptlehrerinnen an unteren und mittleren Klassen höherer Mädchenschulen ab, die durch Verfügung des K. Ministeriums vom 28. März 1906 geregelt ist[4]). Diese Dienstprüfung, deren Bestehen zur Anstellung an den unteren und mittleren Klassen höherer Mädchenschulen befähigt, wird in der Regel jährlich einmal im Frühjahr durch eine von der Ministerialabteilung für die höheren Schulen berufene aus Lehrkräften des höheren Lehrerinnenseminars und der höheren Mädchenschulen bestehende Kommission unter Leitung eines Mitgliedes der Ministerialabteilung abgehalten (§ 2). Die Bewerberinnen müssen mindestens 19 Jahre alt und deutsche Reichsangehörige sein. Die Prüfung ist wieder schriftlich und mündlich (§ 5) und wird im übrigen in 2 Abschnitten abgenommen. Am Schluß des vorletzten Seminarkurses findet die Prüfung in Religion, Deutsch, Mathematik, Erdkunde, Naturgeschichte und Naturlehre statt, am Schluß des letzten Seminarkurses folgt die Prüfung in den übrigen Fächern, nämlich in Französisch, Englisch, Geschichte, Gesundheitslehre, Pädagogik. Auch die praktischen Lehrproben werden mit diesem zweiten Prüfungsabschnitt verbunden (§ 6). Freiwillig ist die Prüfung in Musik, Zeichnen und Gesang (§ 5).

---

1) Vgl. E. Geck, diese IMUK-Abhandlungen Bd. II Heft 3.

2) Vgl. E. Geck, diese IMUK-Abhandlungen, Bd. V, Heft 3, S. 102 u. 103.

3) Vgl. Thedens, S. 36.

4) Vgl. Prüfungsordnung für Hauptlehrerinnen höherer Mädchenschulen vom 28. März 1906, Stuttgart (Vereins Buchdruckerei) 1906; auch im Reg.-Bl. für 1906, S. 97 ff.

Die Anforderungen in der Mathematik sind die folgenden (§ 7_5).

Arithmetik: Kenntnis der elementaren Rechnungsarten, lineare Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten quadratische Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten, Potenzen, Logarithmen. Arithmetische Reihen, erster Ordnung, geometrische Reihen nebst Anwendungen auf einfache Aufgaben der Zinseszins- und Rentenrechnung.

Geometrie: Die wichtigsten Lehrsätze der ebenen Geometrie nebst Anwendungen auf einfache Aufgaben. Elemente der Trigonometrie, insbesondere des rechtwinkligen Dreiecks. Die einfachen Körper, ihre Berechnung und ihre zeichnerische Darstellung.

Das sind recht einfache Anforderungen, wie jeder Fachmann zugeben wird. Dazu kann in Mathematik eine der beiden Lehrproben treten, von denen aber eine in einer Fremdsprache abgehalten werden muß.

Also tritt auch hier am Seminar der sprachliche Charakter in der Ausbildung der künftigen Lehrerinnen wieder scharf in den Vordergrund und wie in Baden fällt im 3. Seminarjahre die Beschäftigung mit der Mathematik fort.

Bemerkenswert ist übrigens, daß die angezogene Prüfungordnung keinerlei Angaben über Zahl und Art der zu stellenden Aufgaben enthält sowie nichts über die für die Bearbeitung gestattete Zeitdauer sagt. Es scheint somit, als ob in Württemberg nach dieser Richtung keine festen Vorschriften beabsichtigt sind.

Außer den Hauptlehrerinnen, die an unteren und mittleren Klassen höherer Mädchenschulen unterrichten, gibt es noch eine besondere Gruppe von Hauptlehrerinnen, die sich besonders für den Unterricht an den oberen Klassen dieser Anstalten ausweisen müssen. Diese Damen erwerben ihre Lehrbefähigung nach den Vorschriften für die „Dienstprüfungen für die Hauptlehrerinnen an oberen Klassen höherer Mädchenschulen“[1]. Diese Dienstprüfungen entsprechen genau den auch für Herren vorgeschriebenen Dienstprüfungen für das humanistische oder das realistische Lehramt. Zu diesen Dienstprüfungen werden Bewerberinnen zugelassen, die im Besitze des Reifezeugnisses einer deutschen höheren Schule (Gymnasium, Realgymnasium oder Oberrealschule) sind[2] (§ 12). Das Zeugnis über die Befähigung zur Anstellung an unteren und mittleren Klassen höherer Mädchenschulen ist für die Zulassung zu den Dienstprüfungen für das höhere Lehramt dem Reifezeugnis einer deutschen Oberrealschule gleichgestellt; in solchen Fällen genügt die Einschreibung der Bewerberin als Hörerin an der Hochschule (§ 13)[3].

In dieser Bestimmung haben wir eine spezifisch württembergische Einrichtung. Das württembergische höhere Lehrerinnenseminar ermöglicht seinen Absolventinnen, ohne daß sie noch ein „Praktisches Jahr“

1) Vgl. die bereits angeführte Prüfungsordnung, S. 10.
2) Vgl. Regierungsblatt für 1898, S. 85ff. und S. 180ff.
3) Vgl. auch Thedens, S. 37.

zu absolvieren brauchen und ohne daß von ihnen, wie von den entsprechenden Damen in Preußen, noch für einige Jahre praktische Schultätigkeit verlangt wird, den direkten Übertritt zur Hochschule. Württemberg kennt den vierten Weg nicht und erspart den Lehrerinnen, die höheren Zielen zustreben wollen, einige Jahre Zeitverlust.

Eine ganz andere und zugleich sehr wichtige Frage ist aber die, ob denn nun die Damen, die mit den mathematischen Seminarkenntnissen zur Hochschule kommen und dort Mathematik studieren wollen, nicht mit recht erheblichen Schwierigkeiten zu kämpfen haben. M. E. muß dem so sein; denn wenn auch das Zeugnis, mit dem sie vom Seminar entlassen werden, in seiner rechtlichen Wirkung dem Zeugnis einer deutschen Oberrealschule gleichgestellt ist, so ist damit noch auf keine Weise ausgedrückt, daß nun auch der Kenntnisstand z. B. in der Mathematik der gleiche ist. Im Gegenteil, ein Blick in die Abhandlung von E. Geck[1]) genügt, um die weitgehende Überlegenheit der Oberrealschule darzutun. In die Einzelheiten der „Dienstprüfung für das humanistische oder realistische Lehramt" brauche ich mich hier nicht einzulassen, da alles Wissenswerte darüber in der soeben zitierten Abhandlung von E. Geck bereits ausgeführt worden ist.

H. Das Königreich Bayern.

1. Grundzüge der Neuordnung von 1911.

Das höhere Bildungswesen für die weibliche Jugend hat Bayern durch die mit dem Beginn des Schuljahres 1911/12 in Kraft getretene „Schulordnung für die höheren Mädchenschulen" vom 8. April 1911[2]) neu geregelt. Dadurch ist in Bayern ein bedeutender Schritt vorwärts getan, obwohl man nicht in allen Punkten so weit wie in Preußen, Sachsen, Hamburg, Hessen und anderen Staaten gegangen ist.

Als Aufgabe ist den sich an das vierte Volksschuljahr anschließenden, sechsstufigen „höheren Mädchenschulen" vorgezeichnet, „den heranwachsenden Mädchen eine erweiterte Bildung in vaterländischem Geiste zu gewähren und sie zugleich auf positiver religiöser Grundlage zu sittlicher Tüchtigkeit zu erziehen"[3]). Der Übertritt von der Volksschule in die unterste Klasse der höheren Mädchenschule ist an eine Aufnahmeprüfung gebunden, die nur bei mindestens gutem Überweisungszeugnis erlassen werden darf. Die Aufnahme erfolgt stets unter dem Vorbehalt des Bestehens einer achtwöchigen Probezeit. Die Gesamtausbildungszeit für ein Mädchen, das die ganze höhere Mädchenschule in regelrechtem Aufstiege durchläuft, beträgt demnach einschließlich der vorangegange-

1) Vgl. E. Geck, diese IMUK-Abhandlungen, Bd. II, Heft 3.

2) Vgl. Ministerialblatt für Kirchen- und Schulangelegenheiten im Königreich Bayern, 1911, Nr. 10, S. 189ff., München (Kastner & Callwey). — Ferner: Thedens, S. 50ff.

3) Vgl. § 2 und § 3 der Schulordnung.

nen vierjährigen Elementarausbildung zehn Jahre, so daß Bayern sich damit auch grundsätzlich zu der zehnstufigen höheren Mädchenschule bekannt hat.

Von den Schwesteranstalten in anderen Staaten, wie Preußen, Sachsen, Hessen, Hamburg, Baden unterscheidet sich jedoch die bayrische höhere Mädchenschule durch den ganz wesentlichen Umstand, daß sie nur eine Fremdsprache, und zwar das Französische, als Pflichtfach durchführt, dagegen das Englische nur als Wahlfach behandelt. Den Naturwissenschaften und der Mathematik wird auch in Bayern besondere Beachtung zuteil. Das Französische setzt in der untersten, d. h. in der I. Klasse der höheren Mädchenschule ein, Raumlehre (Planimetrie) in der III. Klasse, Arithmetik und Algebra in der IV. Klasse, Physik in der IV. Klasse, Chemie in der V. Klasse.

An die vierte Klasse der höheren Mädchenschule kann mit Genehmigung der Aufsichtsbehörde, nämlich der zuständigen Kreisregierung, eine sog. Realabteilung angegliedert werden, die auf zwei Klassen berechnet ist (§ 26). Die Realabteilung hat die Aufgabe[1], auf Grund der in den vier unteren Klassen der höheren Mädchenschule erworbenen Kenntnisse die Vorbereitung der Mädchen für eine selbständige wirtschaftliche Stellung im Leben durch verbindlichen Betrieb einer zweiten Fremdsprache und durch stärkere Betonung der Mathematik und Naturkunde zu fördern.

Die Aufnahme in die unterste Klasse der Realabteilung setzt den erfolgreichen Besuch der vierten Klasse einer höheren Mädchenschule voraus (§ 26). Schülerinnen, welche die Realabteilung zu besuchen beabsichtigen, werden schon in der IV. Klasse mit dem Studium des Englischen zu beginnen haben, um es in der Realabteilung fortsetzen zu können.

Mit Ausnahme der Mathematik, der Physik und der Chemie haben alle Fächer der Realabteilung den Lehrstoff mit der höheren Mädchenschule gemeinsam. Es kann daher der Unterricht für Schülerinnen der Realabteilung und der höheren Mädchenschule, die erwähnten Unterrichtsgegenstände ausgenommen, gemeinsam erteilt werden. Bei solchem gemeinsamen Unterricht ist an der höheren Mädchenschule die vierte Stunde im Deutschen vorzugsweise der Lektüre, die vierte Stunde im Französischen hauptsächlich der Ausbildung im mündlichen Gebrauch der Sprache zu widmen.

Aber auch auf weiterführende Bildungswege hat die bayrische Neuordnung Bedacht genommen. Es ist in § 28 der Schulordnung die Bestimmung getroffen, daß an die höhere Mädchenschule, wo hierfür ein besonderes Bedürfnis besteht, mit Genehmigung der obersten Schulaufsichtsstelle humanistische oder reale Gymnasialkurse angeschlossen werden können. Schulen, welche hinsichtlich ihrer Einrichtung oder

1) Vgl. S. 252 der Schulordnung.

ihres Lehrpersonals den Vorschriften nicht genügen oder in ihren Leistungen nicht befriedigen, darf die Genehmigung zur Angliederung dieser Kurse nicht erteilt werden.

Die Gymnasialkurse reihen sich an die dritte Klasse der höheren Mädchenschule an und umfassen sechs Jahreskurse. Ein junges Mädchen, das in regelrechtem Aufstiege alle Stufen eines humanistischen oder realen Gymnasialkurses durchgemacht hat, muß, die vorangegangenen sieben Jahre mitgerechnet, im ganzen zu seiner Ausbildung 13 Jahre aufwenden. Diese Zahl entspricht den Verhältnissen in Preußen, Sachsen und Hessen.

Die Aufnahme in die Gymnasialkurse ist abhängig von dem erfolgreichen Besuch der dritten Klasse einer höheren Mädchenschule und erfolgt stets unter dem Vorbehalt einer achtwöchigen Probezeit. Die Schülerinnen der obersten Klasse der Gymnasialkurse unterziehen sich der Absolutorialprüfung nach den einschlägigen Bestimmungen (§ 28_2).

Unterstellt sind die höheren Mädchenschulen mit Gymnasialkursen der obersten Schulaufsichtsstelle (§ 28_8).

An die höhere Mädchenschule kann mit Genehmigung der Aufsichtsbehörde eine Einrichtung zur Heranbildung der Mädchen für die Tätigkeit der Frau in der Familie und im Leben — Frauenschule — angeschlossen werden. Die Aufnahme in diese Schule, die dem mathematischen Bildungsstoff keinerlei Beachtung mehr schenkt, ist an den erfolgreichen Besuch der höheren Mädchenschule gebunden (§ 27_1).

Die Schulleitung führt die Bezeichnung „Direktorat", der Leiter oder die Leiterin heißen „Direktor". Die hauptamtlich an einer höheren Mädchenschule beschäftigten Lehrer und Lehrerinnen führen auf die Dauer dieser Verwendung, wenn sie die Lehramtsprüfungen für die humanistischen und realistischen Mittelschulen abgelegt haben, die Bezeichnung „Reallehrer", „Reallehrerin", andernfalls die Bezeichnung „Hauptlehrer", „Hauptlehrerin" (§ 23_1).

Die Leiter und Leiterinnen von höheren Mädchenschulen müssen die Prüfung für das Lehramt an den humanistischen und realistischen Unterrichtsanstalten oder die Prüfung für das Lehramt an Lehrer- und Lehrerbildungsanstalten oder die Prüfung für Sprachlehrerinnen an den höheren Mädchenschulen bestanden haben und eine mindestens fünfjährige Lehrtätigkeit an einer humanistischen oder realistischen Unterrichtsanstalt, an einer Lehrer- oder Lehrerinnenbildungsanstalt oder an einer höheren Mädchenschule zurückgelegt haben (§ 24_1).

Wie beim Unterricht in Deutsch, Geschichte, Erdkunde genügt an den höheren Mädchenschulen für den Unterricht in Rechnen (Mathematik) und Naturkunde der Nachweis der bestandenen Prüfung für das Lehramt an den humanistischen und realistischen Unterrichtsanstalten oder der Prüfung für das Lehramt an den Lehrer- und Lehrerinnenbildungsanstalten oder der Anstellungsprüfung für den Volksschuldienst (§ 24_2).

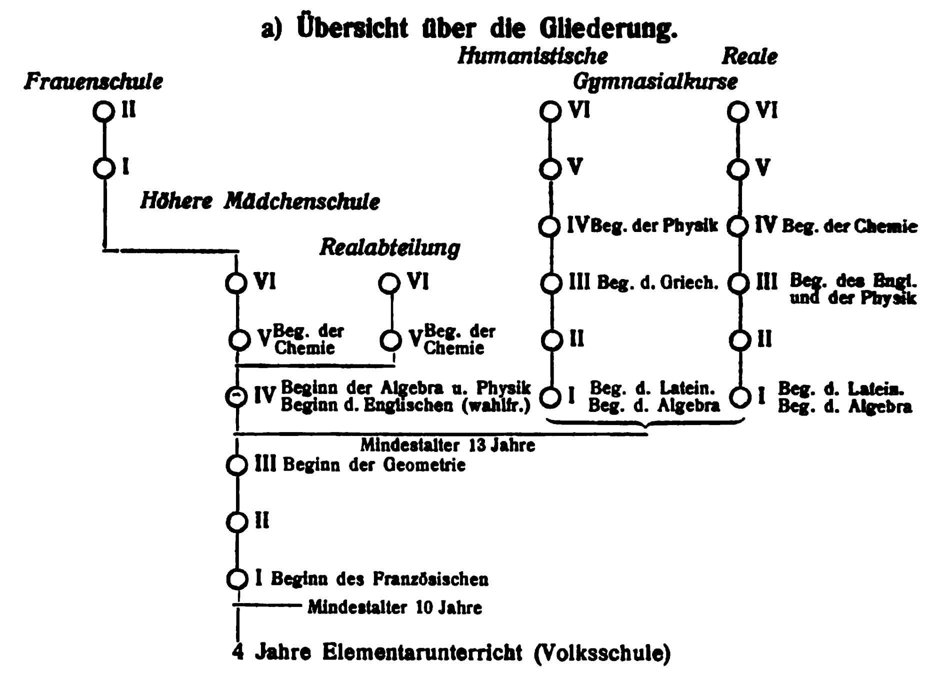
In der Realabteilung darf der Unterricht in Mathematik, Naturbe-

schreibung, Physik und Chemie nur von Personen erteilt werden, die die Prüfung für Mathematik und Physik oder in der Chemie und den beschreibenden Naturwissenschaften an den humanistischen und realistischen Unterrichtsanstalten oder die mathematische und naturwissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an den Lehrer- und Lehrerinnenbildungsanstalten bestanden haben (§ 26_4). An den Gymnasialkursen dürfen nur Lehrkräfte Unterricht erteilen, die die Prüfung für das Lehramt an den humanistischen und realistischen Unterrichtsanstalten bestanden haben (§ 28_7). Zur Leitung von höheren Mädchenschulen mit Gymnasialkursen werden nur Personen zugelassen, die neben der zuletzt genannten Lehrbefähigung auf eine mindestens fünfjährige Tätigkeit an humanistischen oder realistischen Unterrichtsanstalten aufzuweisen haben (§ 28_8).

2. Die Gliederung und die Stundentafeln der Anstalten.

Auf Grund der im vorhergehenden Abschnitt gegebenen Darstellung bedarf die nachfolgende Skizze für die Darstellung der Gliederung der einzelnen Anstaltsformen und ihres Verhältnisses zueinander einer weiteren Erläuterung nicht.

a) Übersicht über die Gliederung.



Der Anteil, den die Mathematik einschließlich des Rechnens an der Stundenzumessung erhalten hat, erhellt aus den nun folgenden Stundentafeln; ich habe die Tafeln so gestaltet, daß jedesmal eine leichte Übersichtlichkeit über den ganzen Lehrplan möglich ist.

b) Stundentafel für die höhere Mädchenschule.

	I	II	III	IV	V	VI	Summe
a) Pflichtfächer:							
Religionslehre	3	3	3	2	2	2	15
Deutsche Sprache	5	5	5	4	4	4	27
Französische Sprache	5	5	5	4	4	4	27
Geschichte	–	–	2	2	2	2	8
Erdkunde	2	2	2	2	1	1	10
Rechnen und Raumlehre	4	4	4	3	3	3	21
Naturbeschreibung [1])	2	2	2	1	1	1	9
Physik [1])	–	–	–	2	2	2	6
Chemie [1])	–	–	–	–	1	1	2
Zeichnen	2	2	2	2	2	2	12
Schreiben	1	1	–	–	–	–	2
Handarbeiten	2	2	2	2	2	2	12
Turnen	2	2	2	2	2	2	12
Gesang	1	1	1	1	1	1	6
Zusammen	29	29	30	27	27	27	169
b) Wahlfächer:							
Englische Sprache	–	–	–	3	3	3	9
Stenographie	–	–	–	–	2	2	4
Schulküche	–	–	–	–	–	4	4

1) Die Fächer Naturbeschreibung, Physik, Chemie sind in der von der Regierung veröffentlichten Stundentafel als „Naturkunde“ zusammengefaßt. Hier ist die Trennung in die Einzelbestandteile auf Grund der in der Lehrstoffübersicht gegebenen Anweisung erfolgt.

c) Stundentafel für die Realabteilung nebst den ihr vorangehenden Klassen.

	I	II	III	IV	Realabteilung V	Realabteilung VI	Summe
a) Pflichtfächer:							
Religionslehre	3	3	3	2	2	2	15
Deutsche Sprache	5	5	5	4	3	3	25
Französische Sprache	5	5	5	4	3	3	25
Englische Sprache	–	–	–	(3)[1])	4	4	8 (11)
Geschichte	–	–	2	2	2	2	8
Erdkunde	2	2	2	2	1	1	10
Mathematik	4	4	4	3	5	5	25
Naturbeschreibung	2	2	2	1	1	1	9
Physik	–	–	–	2	3	3	8
Chemie	–	–	–	–	2	2	4
Zeichnen	2	2	2	2	2	2	12
Schreiben	1	1	–	–	–	–	2
Handarbeiten	2	2	2	2	–	–	8
Turnen	2	2	2	2	2	2	12
Gesang	1	1	1	1	–	–	4
Zusammen	29	29	30	27	30	30	175 (178)
b) Wahlfächer:							
Englische Sprache	–	–	–	3	–	–	3[2])
Gesang	–	–	–	–	1	1	2
Stenographie	–	–	–	–	2	2	4
Handarbeiten							

1) Zwar wahlfrei, aber doch für die Besucherinnen der Realabteilung erforderlich. 2) Oben schon mitgezählt.

d) Stundentafel für die Gymnasialkurse nebst den ihnen vorangehenden Klassen der höheren Mädchenschule.

α) Humanistische Gymnasialkurse.

	Höhere Mädchenschule			Humanistische Gymnasialkurse						Summe
	I	II	III	I	II	III	IV	V	VI	
a) Pflichtfächer:										
Religionslehre	3	3	3	2	2	2	2	2	2	21
Deutsche Sprache	5	5	5	3	3	3	3	3	3	33
Lateinische Sprache	—	—	—	8	8	6	6	6	6	40
Griechische Sprache	—	—	—	—	—	7	7	7	7	28
Französische Sprache	5	5	5	3	3	2	2	2	2	29
Geschichte	—	—	2	2	2	2	3	3	3	17
Erdkunde	2	2	2	2	2	—	—	—	—	10
Rechnen u. Mathematik	4	4	4	4	4	4	3	3	3	33
Naturbeschreibung	2	2	2	2	2	2	—	—	—	12
Physik	—	—	—	—	—	—	2	2	2	6
Zeichnen	2	2	2	2	2	—	—	—	—	10
Turnen	2	2	2	2	2	2	2	2	2	18
Schreiben	1	1	—	—	—	—	—	—	—	2
Handarbeiten	2	2	2	—	—	—	—	—	—	6
Gesang	1	1	1	—	—	—	—	—	—	3
Zusammen	29	29	30	30	30	30	30	30	30	268
b) Wahlfächer:										
Englische Sprache	—	—	—	—	—	—	2	2	2	6
Italienische Sprache	—	—	—	—	—	—	—	2	2	4
Zeichnen	—	—	—	—	—	2	1	1	1	5
Stenographie	—	—	—	—	2	2	—	—	—	4
Gesang	—	—	—	1	1	1	1	1	1	6

β) Realgymnasialkurse.

	Höhere Mädchenschule			Realgymnasialkurse						Summe
	I	II	III	I	II	III	IV	V	VI	
a) Pflichtfächer:										
Religionslehre	3	3	3	2	2	2	2	2	2	21
Deutsche Sprache	5	5	5	3	3	3	3	3	3	33
Lateinische Sprache	—	—	—	8	8	5	5	5	5	36
Französische Sprache	5	5	5	3	3	3	3	3	3	33
Englische Sprache	—	—	—	—	—	5	4	4	3	16
Geschichte	—	—	2	2	2	2	2	2	3	15
Erdkunde	2	2	2	2	2	—	—	—	—	10
Rechnen u. Mathematik	4	4	4	4	4	4	3	3	3	33
Naturbeschreibung	2	2	2	2	2	—	—	—	—	10
Physik	—	—	—	—	—	2	2	2	2	8
Chemie	—	—	—	—	—	—	2	2	2	6
Zeichnen	2	2	2	2	2	2	2	2	2	18
Turnen	2	2	2	2	2	2	2	2	2	18
Schreiben	1	1	—	—	—	—	—	—	—	2
Handarbeiten	2	2	2	—	—	—	—	—	—	6
Gesang	1	1	1	—	—	—	—	—	—	3
Zusammen	29	29	30	30	30	30	30	30	30	268
b) Wahlfächer:										
Italienisch	—	—	—	—	—	—	—	2	2	4
Stenographie	—	—	—	—	2	2	—	—	—	4
Gesang	—	—	—	1	1	1	1	1	1	6

3. Der Lehrplan für Rechnen und Mathematik.

Als Anlage zu der Schulordnung ist ein Lehrplan[1]) erschienen, der zunächst methodische Bemerkungen für die einzelnen Unterrichtsfächer und dann die betreffenden Lehrstoffverteilungen auf die einzelnen Klassenstufen gibt. Hier interessieren nur die auf Rechnen und Mathematik sich beziehenden Angaben.

a) Die methodischen Bemerkungen.

Die methodischen Bemerkungen für den Unterricht in Rechnen und Raumlehre (Mathematik) an der höheren Mädchenschule lauten wörtlich wie folgt[2]):

Der Rechenunterricht hat vor allem Sicherheit und Geläufigkeit im schriftlichen und mündlichen Rechnen mit bestimmten Zahlen zu erstreben, aber auch den mathematischen Unterricht vorzubereiten. Alle Rechengesetze sind mit Hilfe einfacher, leicht übersehbarer Beispiele abzuleiten und durch fortgesetzte Übungen, die vom Leichteren zum Schwereren fortschreiten, einzuprägen. Dabei sind gekünstelte Aufgaben mit gehäuften Schwierigkeiten überall auszuschließen. Die Aufgaben sollen womöglich dem praktischen Leben entnommen werden. Bei ihrer Besprechung wird die Schätzung des Resultats eine gute Übung im Kopfrechnen bieten, das überhaupt nicht vernachlässigt werden darf. Die Einführung der Maße und Gewichte hat an der Hand von Anschauungsmitteln zu geschehen, welche einen Begriff von den Größenverhältnissen geben, bei Besprechung der Münzen sind die Wertverhältnisse möglichst anschaulich zu machen. Um die Größen- und Wertverhältnisse klar zu erfassen, ist auch die graphische Darstellung heranzuziehen, die sich überhaupt beim Vergleichen der Größen und bei der Darstellung aufeinanderfolgender Größenänderungen (z. B. Temperaturen) empfiehlt.

In den zwei letzten Klassen wird das Rechnen mit besonderer Rücksicht auf das praktische Leben betrieben und durch Unterricht in der Buchführung ergänzt.

In der Algebra finden die methodischen Bemerkungen über den Rechenunterricht sinngemäße Anwendung, es empfiehlt sich sogar, öfter zur Veranschaulichung die allgemeinen Zahlen durch bestimmte zu ersetzen. Die Umsetzung von Aufgaben in Gleichungen ist von Anfang an, womöglich schon im Rechenunterricht, mit besonderer Sorgfalt zu üben. Bei der Behandlung der Gleichungen ist der Funktionsbegriff anschaulich einzuführen und durch die bereits im Rechnen geübte graphische Darstellung zu erläutern, die sich auch zur Lösung geeigneter Gleichungen verwenden läßt.

Der geometrische Unterricht hat sich auf der Anschauung aufzubauen und deshalb von praktischen Beispielen (Aufnahme des Zimmers, des Ganges, des Schulhofes) und Übungen mit Zirkel und Winkel auszugehen. Dieser propädeutische Teil soll jedoch nicht allzu ausgedehnt behandelt werden und allmählich in einen systematischen Teil übergehen, der einfache Beweise und die Fundamentalkonstruktionen bringt. Um möglichste Klarheit der Raumvorstellungen zu erreichen, müssen vor allem die Zeichnungen an der Tafel und in den Heften sorgfältig ausgeführt werden. Einzelne geometrische Zeichnungen sind mit Feder und Tusche auszuführen und können, wie die graphischen Darstellungen überhaupt, den Schülerinnen auch als Hausaufgabe gegeben werden. Als Konstruktionsaufgaben sind nur solche zu wählen, welche ohne besondere Kunstgriffe lösbar sind. In der räumlichen Geometrie ist die Heranziehung von Modellen unentbehrlich, die vielfach von den Schülerinnen selbst hergestellt werden können. Dazu läßt sich u. a. auch sogenannter

1) Vgl. Ministerialblatt für Kirchen- und Schulangelegenheiten im Königreich Bayern, 1911, S. 211ff. 2) Ebenda, S. 219ff.

Holzdraht verwenden, der an den Enden durch kleine Kugeln aus Modellierton oder Wachs zusammengehalten wird.

Zum Teil gehen diese Vorschriften recht ins Einzelne. Es dürfte zu empfehlen sein, daß die behördlichen Festsetzungen sich nur auf die Betonung der großen Richtlinien in den Lehrplänen einlassen und daß im übrigen die Einzelheiten der Lehrerschaft überlassen bleiben.

Betreffs der Gymnasialkurse ist bestimmt worden, daß der Unterricht in diesen Kursen nach den für die höhere Mädchenschule gegebenen methodischen Bemerkungen erteilt werden soll. Außerdem haben die für die Gymnasien und Realgymnasien in den einzelnen Fächern gegebenen Anleitungen entsprechende Berücksichtigung zu finden[1]).

Weiter heißt es:

„In den drei oberen Kursen soll der Unterricht freier gestaltet und die Selbsttätigkeit der Schülerinnen kräftig angeregt werden. Das in Frage und Antwort sich bewegende katechetische Unterrichtsverfahren ist zwar beizubehalten, jedoch sollen die Darbietungen, wo es der Stoff erlaubt, auch in Form von Vorträgen erfolgen. Auch ist es zulässig, daß ab und zu einzelne Schülerinnen über ein von ihnen besonders gepflegtes Stoffgebiet sich in freiem Vortrage aussprechen. Die Darbietung des zur Wiederholung gegebenen Stoffes hat seitens der Schülerinnen in zusammenfassender Form zu erfolgen. Die zur schriftlichen Bearbeitung gegebenen Themen dürfen von den Schülerinnen auch selbst gewählt und dem in der Schule durchgenommenen Stoff oder der Privattätigkeit entnommen werden."

Vielleicht ist ja die soeben mitgeteilte Bestimmung, was sich nicht klar aus dem Zusammenhange erkennen läßt, in erster Linie mehr auf die nichtmathematischen Fächer, insbesondere auf das Deutsche, gemünzt. Aber anwendbar ist sie sicher mit gutem Erfolge auch auf den mathematischen Unterricht, der bei Berücksichtigung jener Ausführungen in den obersten Klassen nur gewinnen kann. Von dem gleichen Gesichtspunkte aus könnte es auch befürwortet werden, wenn bei den Prüfungsarbeiten den Schülerinnen die Wahl zwischen Aufgaben gelassen würde. So kann schließlich eine bessere Würdigung und Berücksichtigung der Individualität der Examinandin neu erfolgen.

Endlich soll in der Mathematik der Lehrer dem Ineinandergreifen und der gegenseitigen Ergänzung der einzelnen Fächer besondere Aufmerksamkeit schenken[2]).

Unmittelbar hierauf folgt ein Satz, der in seiner Tragweite zunächst nicht verständlich ist. Er lautet:

„Die im Lehrplan dem einzelnen Fache zugemessene Stundenzahl darf, wenn es die Stoffbehandlung fordert, auf Kosten eines anderen erweitert oder zu seinen Gunsten verkürzt werden."

Wie mir Herr K. Landesschulrat Dr. Winter (München) freundlichst mitgeteilt hat, bezieht sich die Bezeichnung „Fach" nur auf die einzelnen Zweige der Mathematik, wie sie im Lehrplan für die einzelnen Kurse festgelegt sind. Innerhalb dieser Einzelgebiete, die der mathematische Unterricht behandeln soll, sind gelegentliche Abweichungen von den vorge-

1) Ministerialblatt für Kirchen- und Schulangelegenheiten, 1911, S. 268.
2) Ebenda, S. 269.

schriebenen Stundenzahlen statthaft, so daß in jedem derartigen Falle ein anderes mathematisches Teilgebiet mit einer entsprechend erhöhten oder erniedrigten Stundenzahl auftreten muß. Die Mathematik als Ganzes erleidet jedoch nie eine Einbuße an der Gesamtstundenzahl.

Die im Vorstehenden wiedergegebenen methodischen Bemerkungen atmen – das muß offen anerkannt werden – durchaus modernen Geist und verraten engen Anschluß an die neuzeitlichen Reformbestrebungen, was für den kundigen Beurteiler offen zutage liegt.

b) Die Lehraufgaben der einzelnen Klassen.

Es erübrigt jetzt noch die Angabe, wie der Lehrstoff im Rechnen und in der Mathematik auf die einzelnen Klassen der verschiedenen Anstaltsarten verteilt worden ist. Die Übersicht hierüber möge wieder in tabellarischer Form (S. 172ff.) gegeben werden, wodurch die Möglichkeit zur Ausführung von Vergleichen erleichtert wird.

	Höhere Mädchenschule
Klasse I.	Kurze Wiederholung der vier Grundrechnungsarten mit reinen und benannten Zahlen. Dezimale Maße, Münzen und Gewichte. Daran anschließend Einführung in die dezimale Schreibweise. Entstehung der gemeinen und Dezimalbrüche. Die Grundrechnungsarten mit Dezimalbrüchen. Einfache Übungen im Kopfrechnen. Gelegentliche graphische Darstellungen z. B. von Einwohnerzahlen, Ländergrößen, Höhen von Bauwerken, Höhenlagen von Stationen bekannter Bahnstrecken. (4 Std.)
Klasse II.	Kennzeichen der Teilbarkeit. Zerlegung in Primfaktoren mit Beschränkung auf dreiziffrige Zahlen. Größter gemeinschaftlicher Teiler und kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches. Die Grundrechnungsarten mit gemeinen Brüchen. Verwandlung von gemeinen in Dezimalbrüche und umgekehrt mit praktischen Beispielen unter mäßiger Erweiterung des Gebietes der zur Verwendung kommenden Maße und Gewichte. Einfache Schlußrechnungen mit zwei Gliedern. Einfache Übungen im Kopfrechnen. Gelegentliche graphische Darstellungen z. B. von Temperaturen, Wasserstand oder Füllung eines Behälters in Abhängigkeit von der Zeit, Preis in Abhängigkeit von der Stückzahl. (4 Std.)
Klasse III	Rechnen: Abgekürztes Rechnen mit Dezimalbrüchen an einfachen Beispielen (durch alle Klassen zu üben). Zusammengesetzte Schlußrechnungen und deren Anwendung auf Prozent- und Zins- oder Diskontrechnungen. Einfache praktische Aufgaben. Gelegentliche graphische Darstellungen z. B. von Wegen in Abhängigkeit von der Zeit; Benützung dieser Darstellungsform zur Lösung von Bewegungsaufgaben. (2 Std.) Planimetrie: Die grundlegenden Begriffe der Planimetrie, Richtung, Winkel, Parallele, Symmetrie (auf dem Wege der Anschauung zu gewinnen). In Verbindung damit ständige Übungen im Zeichnen, im Gebrauch des Lineals, der Winkel, des Zirkels und des Winkelmessers, Messen von Längen und Winkeln. – Sätze über Winkel von sich schneidenden und parallelen Geraden und von Dreiecken. Konstruktion des Dreiecks aus gegebenen Bestimmungsstücken. Kongruenzsätze. Rechtwinklige, gleichschenklige, gleichseitige Dreiecke. Einfache Sätze über das Parallelogramm und das Trapez. Geometrische Örter. (2 Std.)

Klasse IV	**Höhere Mädchenschule (Fortsetzung)** Rechnen: Graphische Darstellung der Funktionen ersten Grades und Benützung zur Lösung der Gleichungen ersten Grades. Rechnerische Auflösung solcher Gleichungen mit numerischen Koeffizienten. Aufgaben aus dem praktischen Leben, namentlich auch aus der Teilungs- und Mischungsrechnung. Einführung in die Buchstabenrechnung. (2 Std.) Planimetrie: Der Kreis. Gleichheit und Ähnlichkeit geradliniger Figuren. Flächenberechnung. Einfache Verwandlungs-, Teilungs- und Konstruktionsaufgaben. (1 Std.)	Kursus I	**Gymnasialkurse [1])** Rechnen und Algebra: Die vier Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Einführung der positiven und negativen Zahlen, entwickelt an praktischen Beispielen und geometrisch veranschaulicht durch die beiderseits unendlich ausgedehnte Zahlenreihe auf der geraden Linie. Rechenregeln für negative Zahlen. Einfache Funktionen ersten Grades und ihre graphische Darstellung. Gleichungen ersten Grades, einschließlich der Verhältnisgleichungen (Proportionen) und deren Verwendung zur Lösung praktischer Aufgaben, namentlich auch von Teilungs- und Mischungsaufgaben. (2 Std.) Planimetrie: Der Kreis. Gleichheit, Verhältnis und Ähnlichkeit geradliniger Figuren. Flächenberechnung. Einfache Verwandlungs-, Teilungs- und Konstruktionsaufgaben. (2 Std.)

Klasse V	**Höhere Mädchenschule (Fortsetzung)** Darstellung von Prismen und Pyramiden in Parallelperspektive und Ableitung ihrer wichtigsten Eigenschaften. Berechnung von Oberfläche und Inhalt solcher Körper. Potenzen und Wurzeln zweiten Grades, reinquadratische Gleichungen. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten. Lösung von Textaufgaben aus dem bürgerlichen Leben. (3 Std.)	**Realabteilung** Algebra: Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Erweiterung der graphischen Darstellung durch Anwendung auf Funktionen höheren Grades. Gleichungen zweiten Grades mit einer und besonders einfache mit mehreren Unbekannten. Ganze und gebrochene Exponenten. (2 St.) Raumlehre: Erweiterung der Kreislehre. Eingehendere Behandlung der regelmäßigen Vielecke und der Kreismessung. Konstruktionsaufgaben, insbesondere algebraisch-geometrische. Sätze über die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen im Raum. Die wichtigsten Eigenschaften von Prisma, geradem Kreiszylinder, Pyramide, geradem Kreiskegel, Pyramiden- und Kegelstumpf. Graphische Darstellung dieser Körper in einfachen Lagen in Parallelperspektive und orthogonaler Projektion. Oberfläche u. Inhalt dieser Körper. (3 Std.)	Kurs. II	**Gymnasialkurse (Fortsetzung)** Algebra: Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Erweiterung der graphischen Darstellung durch Anwendung auf Funktionen höheren Grades. Gleichungen zweiten Grades mit einer und besonders einfache mit mehreren Unbekannten. Ganze und gebrochene Exponenten. (2 Std.) Planimetrie: Fortsetzung der Kreislehre. Regelmäßige Vielecke. Kreismessung. Konstruktionsaufgaben, insbesondere algebraisch-geometrische. (2 Std.)

1) Die humanistischen und realen Gymnasialkurse werden in der Mathematik nach dem gleichen Lehrplan unterrichtet (vgl. S. 295).

Klasse VI	Darstellung von Zylindern, Kegeln, Kugeln und Ableitung ihrer wichtigsten Eigenschaften. Berechnung von Oberfläche und Inhalt solcher Körper. Unrein quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten. Textaufgaben. Die wichtigsten Punkte über Wertpapiere und Zahlungsmittel (Scheck, Wechsel). Geeignete Berechnungen im Anschluß daran Besprechung der einfachen Buchführung. Durchführung eines geeigneten Lehrgangs einer hauswirtschaftlichen und, wo es zweckmäßig erscheint, einer gewerblichen Buchführung. (3 Std.)	Algebra: Logarithmen. Arithmetische und geometrische Reihen. Anwendung der letzteren auf Zinseszins- und Rentenrechnung an einfachen, der Wirklichkeit entnommenen Beispielen mit ganzjährigen Perioden. Benützung der graphischen Darstellung bei passenden Gelegenheiten. (2 Std.) Raumlehre: Einführung der trigonometrischen Funktionen. Die fundamentalen Formeln der Goniometrie. Verwendung zu einfachen Aufgaben der Dreiecks- und Vielecksmessung auch im Gelände. Die regulären Polyeder, insbesondere das Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder. Die Kugel. Einfache Berechnungsaufgaben. (3 Std.)	Kurs. III	Algebra: Logarithmen. Arithmetische und geometrische Reihen. Anwendung der letzteren auf Zinseszins- und Rentenrechnung an einfachen, der Wirklichkeit entnommenen Beispielen mit ganzjährigen Perioden. Benützung der graphischen Darstellung bei passenden Gelegenheiten. (2 Std.) Stereometrie: Sätze über die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen im Raum. Die wichtigsten Eigenschaften von Prisma, geradem Kreiszylinder, Pyramide, geradem Kreiskegel, Pyramiden- und Kegelstumpf. Graphische Darstellung dieser Körper in einfachen Lagen in Parallelperspektive und orthogonaler Projektion. Oberfläche und Inhalt dieser Körper. (2 Std.)

Soweit die tabellarische Anordnung des Lehrstoffs für die einzelnen Klassen. Es erübrigt noch die Angabe des für die drei obersten Gymnasialkurse vorgeschriebenen Stoffes, wobei jedoch die Tabellenform nicht erforderlich wird, da Vergleichsobjekte nicht vorhanden sind.

Kurs. IV. Trigonometrie: Das rechtwinklige Dreieck mit Anwendung auf planimetrische, stereometrische und sonstige praktische Aufgaben. Einfache goniometrische Formeln. (1 Std.)

Stereometrie: Die regulären Polyeder, insbesondere das Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder. Die Kugel. Einfache Berechnungsaufgaben. (2 Std.)

Kurs. V. Trigonometrie: Goniometrische Formeln. Das schiefwinklige Dreieck. Anwendungen. (1 Std.)

Analytische Geometrie: Das rechtwinklige Koordinatensystem. Bestimmung des Punktes. Gleichung der Geraden und des Kreises. Geraden- und Kreisbüschel. Aufgaben darüber. (2 Std.)

Kurs. VI Analytische Geometrie und Differentialrechnung: Kurven zweiten Grades bezogen auf die Hauptachsen. Aufgaben über einfache geometrische Örter. Steigen und Fallen (Maxima und Minima) von ganzen Funktionen unter Einführung des Begriffes des Differentialquotienten. (2 Std.)

Mathematische Geographie: Ausgewählte Kapitel aus der mathematischen Geographie. Koordinatensystem auf der Himmelskugel. Planetensystem. Zeitbestimmung. (1 Std.)

4. Bemerkungen zur Lehrstoffverteilung.

a) Rechnen.

Hinsichtlich der Gliederung des Lehrstoffs dürften noch einige Bemerkungen am Platze sein. Zunächst fällt im Lehrplan für Rechnen auf, daß die Dezimalbrüche den gemeinen Brüchen vorangehen; dagegen

sind schon oben bei anderer Gelegenheit Bedenken grundsätzlicher Art geäußert worden. Es wäre sicher für den folgerichtigen Aufbau des Lehrplans zweckmäßiger gewesen, wenn die Behandlung der gemeinen Brüche vorangestellt wäre, da nur so die Dezimalbruchbehandlung die sichere Grundlage empfängt, der sie nun einmal nicht entraten kann. Im übrigen ist die Stoffverteilung unter Ausschaltung aller Künsteleien geschickt durchgeführt, und Beachtung verdient der Umstand, daß sogar noch für die oberste Klasse (VI) der höheren Mädchenschule ein besonderes, der wirtschaftlichen Ausbildung der Mädchen dienendes Rechenpensum vorgeschrieben ist, durch das u. a. auch die Grundzüge der Buchführung den Schülerinnen vor ihrem Eintritt in das praktische Leben vertraut werden sollen. Als weitere Besonderheit des bayrischen Rechenplanes erscheint ferner die ausdrückliche Betonung der Übung in graphischen Darstellungen schon, bevor der eigentlich mathematische Unterricht einsetzt.

b) Mathematik.

Die Stoffverteilung für den mathematischen Unterricht an der höheren Mädchenschule hält sich mit Rücksicht auf die zu Gebote stehende Stundenzahl gewiß von jeder Übertreibung frei und ist so beschaffen, daß sich bei dem in Aussicht genommenen Zeitmaß die Durchbildung der Schülerinnen in den angesetzten Stoffen sicher erzielen läßt.

An der Realabteilung wird scheinbar besonders in der Klasse V, die einen recht umfangreichen Lehrstoff zugewiesen erhalten hat, ein flottes Tempo angeschlagen werden müssen, wenn der ganze Stoff bewältigt werden soll. Vielleicht schwillt hier die Stoffmenge im Vergleich zur Klasse IV etwas reichlich stark an. In der Zielhöhe steht die Realabteilung hinsichtlich der Leistungen in der Mathematik ganz erheblich über der höheren Mädchenschule.

An den Gymnasialkursen, für die betreffs des mathematischen Lehrplanes kein Unterschied zwischen humanistischen und realen Kursen gemacht worden ist, hat man sich von unten auf unter Vornahme vorsichtiger Stoffteilung im wesentlichen an die für die Realabteilung getroffenen Festsetzungen angeschlossen. Bis in den Kursus IV läßt sich das feststellen.

Weiter nach oben treten dann ganz im Sinne der Reformbestrebungen neben den Elementen der analytischen Geometrie noch die Grundzüge der Infinitesimalrechnung hinzu. Leider aber ist die dafür bereitgestellte Stundenzahl recht bescheiden ausgefallen. Wird der Erfolg dadurch nicht vielleicht sehr beeinträchtigt werden?

Schließlich noch ein kurzes Wort über die zurzeit im mathematischen Unterricht an den bayrischen höheren Bildungsanstalten für die weibliche Jugend tatsächlich bestehenden Zustände. Die neuesten Jahresberichte verschiedener Anstalten über das Schuljahr 1911/12 (z. B. aus

München[1]), Nürnberg[2]), Augsburg[3]), Kaiserslautern[4]), Ludwigshafen a.Rh.[5])), lassen klar erkennen, daß man überall eifrig bestrebt ist, sich der durch die Schulordnung vom 8. April 1911 geschaffenen neuen Lage nach Möglichkeit anzupassen. Das kann natürlich nur ganz allmählich von unten herauf geschehen, so daß erst nach Ablauf von einigen Jahren eine völlige Durchführung der Neuordnung zu erwarten ist.

5. Über die Lehrkräfte.

An den höheren Bildungsanstalten für die weibliche Jugend wirken, abgesehen von den nebenamtlich beschäftigten Damen und Herren, neben dem Leiter oder der Leiterin zurzeit akademisch gebildete Reallehrer sowie Hauptlehrer und Lehrerinnen. Über die Vorbildung der akademisch gebildeten Lehrkräfte hat sich in diesen IMUK-Abhandlungen schon H. Wieleitner[6]) geäußert, und über die Ausbildung des seminaristisch gebildeten Lehrkräfte findet man Näheres in den Ausführungen von G. Kerschensteiner und A. Bock[7]), so daß ich es mir hier versage, auf diese Dinge noch näher einzugehen. Nur darauf möchte ich noch hinweisen, daß Bayern die Einrichtung des sog. höheren Lehrerinnenseminars nicht besitzt und daß daher gewisse Ausbildungsmöglichkeiten für Lehrerinnen fortfallen. Hierüber sagt H. Winter[8]) in seinem zu Dresden vor dem Deutschen Verein im Jahre 1911 erstatteten Berichte über „Die neue Schulordnung für die höheren Mädchenschulen in Bayern" wörtlich folgendes: „Wir haben kein höheres Lehrerinnenseminar und wollen auch keines.[9]) Ein derartig ausgeprägtes Fachschulwesen erscheint uns als ein Fremdkörper innerhalb der Organisation unserer höheren Mädchenschulen. Wir beziehen unsere Lehrerinnen a) aus der Klasse der Volksschullehrerinnen, die sich, soweit es sich um städtische Schulen handelt, die Berufung an

1) Vgl. Jahresbericht der Städtischen höheren Schule in München (Luisenstr. 7) für das Schuljahr 1911/12, München (G. Franzsche Hofbuchdruckerei) 1912.

2) Vgl. Jahresbericht der Städtischen höheren Mädchenschule Findelgasse-Frauentorgraben mit Vorschule und Realgymnasialkursen in Nürnberg. Am Schlusse des Schuljahres 1911/12. Nürnberg (Rob. Stich), Progr. Nr. 245.

3) Vgl. Jahresbericht der Städtischen höheren Mädchenschule in Augsburg für das Schuljahr 1911/12, Augsburg (Th. Lampart) 1912.

4) Vgl. Jahresbericht der Städtischen höheren weiblichen Bildungsanstalt zu Kaiserslautern 1911–1912, Kaiserslautern (C. Schönle) 1912, Progr. Nr. 172.

5) Vgl. Städtische höhere Mädchenschule mit Handelsabteilung zu Ludwigshafen a/Rh. Bericht über das Schuljahr 1911/12, Ludwigshafen a/Rh. (J. Waldkirch & Co.) 1912. Progr. Nr. 210.

6) Vgl. H. Wieleitner, diese IMUK-Abhandlungen, Leipzig (B. G. Teubner) 1910, Bd. II, Heft I, S. 67 ff.

7) Vgl. G. Kerschensteiner und A. Bock, diese IMUK-Abhandlungen, Leipzig (B. G. Teubner) 1912, Bd. V, Heft 3, S. 143 ff.

8) Vgl. H. Winter, Die neue Schulordnung für die höheren Mädchenschulen in Bayern. Frauenbildung, 10. Jahrgang, S. 538.

9) Deshalb ist in Bayern wohl auch der geradlinige Aufbau auf die höhere Mädchenschule bisher nicht in Betracht gezogen worden.

die höhere Schule durch besondere Würdigkeit erwerben, denn auch
Sprachlehrerin muß bei uns durch das Volksschulseminar gegangen s
und durch eine spätere Sonderprüfung ihre Befähigung zum Spra
unterricht erwiesen haben; b) künftighin, so hoffen wir, zum guten T
aus dem neuen Stande der akademischen[1]) Lehrerinnen. Dabei sind ı
sere Schulen bisher völlig unberührt geblieben von den anderwärts a
gerollten Streitfragen über den Anteil, den männliche und weiblic
Lehrerschaft an den Schulen und ihrer Leitung haben sollen. Der Z
nach dominiert — und das halten wir für recht und selbstverständlich
weitaus die Frau. Klosterschulen und Privatschulen sind ja ausschlie
lich in weiblichen Händen, wenn auch die Privatschulen sich da und d
einen stundengebenden Literaturprofessor mieten. Aber auch an d
städtischen Schulen überwiegt fast zu Zweidrittel der Gesamtzahl d
weibliche Element. Die Leitung aller städtischen Schulen ruht in män
licher Hand. Es ist kaum anzunehmen, daß das in absehbarer Zeit a
ders wird."

Gerade der Schlußsatz ist sehr bezeichnend hinsichtlich der Folg rungen, die wir aus ihm ziehen müssen. Er drängt uns zu der Frag an der wir gar nicht vorbeigehen können: „Reicht unter solchen Verhält nissen die Vorbildung und Befähigung der Lehrkräfte, die an der Unter richtserteilung im Rechnen und in der Mathematik beteiligt sind, auc wirklich aus oder liegt nicht vielfach die Unterweisung in diesen Fächer noch in Händen von Personen, die nicht über ihrer Aufgabe stehen?" Ich kann gewisse ernste Befürchtungen nach der eben bezeichneten Richtung nicht unterdrücken und nur dem Wunsche Ausdruck verleihen, daß auch in Bayern der mathematische Unterricht (einschließlich Rechnen) an den höheren Mädchenschulen in Zukunft von Lehrkräften vertreten sein möge, die den Stoff völlig beherrschen und von dem Geiste der modernen Bestrebungen durchdrungen sind.

Schlußwort.

Am Ende meines Berichts angelangt, möchte ich schließlich durch Heraushebung einiger Hauptgesichtspunkte in zusammenfassender Weise die Gesamtlage des mathematischen Unterrichts an den höheren Bildungsanstalten für Mädchen in Deutschland kennzeichnen.

Von der Notwendigkeit, daß auch an den höheren Mädchenschulen der eigentlich mathematische Unterricht nicht fehlen darf, ist man zwar in allen deutschen Staaten überzeugt, und in den verschiedenen Neuordnungsbestimmungen finden sich die bestimmten Hinweise, daß durch Hereinnahme des mathematischen Unterrichts in den Lehrplan der höheren Mädchenschulen die Erziehung der Mädchen zu klarer Denkweise und zu knapper, treffender sachgemäßer Formulierung der Ge-

1) Damit sind die „akademisch gebildeten" Lehrerinnen gemeint.

danken gefördert werden soll. Nur in der Art, wie dieses Ziel erreicht werden soll, gehen die verschiedenen Staaten auseinander. Noch immer hat für jeden Unterricht, wenn sein Erfolg nicht von Anbeginn an in Frage gestellt sein soll, die erforderliche Zeit vorhanden sein müssen. Dem suchen Staaten wie Sachsen, Hessen, Hamburg, Baden, Bayern Rechnung zu tragen; denn sie sorgen dafür, daß zunächst einmal der dem eigentlichen Mathematikunterricht vorangehende Rechenunterricht auf der Unter- und Mittelstufe bei ausreichender Stundenzahl seiner Zweckbestimmung gerecht werden kann. Hinsichtlich des mathematischen Unterrichts finden sich zwar gewisse Verschiedenheiten in den Stundenzahlen; aber im großen und ganzen verlangen doch die genannten Staaten nur solche Zielleistungen, die sich in der verfügbaren Zeit bewältigen lassen.

Nicht so günstig sehe ich die Sachlage in Preußen bezüglich des Rechen- und Mathematikunterrichts an. Von unten herauf fehlt es dort schon im Rechnen an der geeigneten Stundenzahl, so daß es bei der reichlich rasch zunehmenden Stofferweiterung von Klasse zu Klasse mindestens fraglich sein muß, wie man wirkliche Erfolge im Rechenunterricht der Mädchen erzielen will. Es muß daher in Preußen auf die Einführung der vierten Rechenstunde[1]) hingearbeitet werden; sie läßt sich nicht umgehen. Nicht minder aber fordert der mathematische Lehrplan, insbesondere die Verteilung des Lehrstoffs, die sich nur mäßig in die Dreizahl der Stunden fügt, zu aufmerksamer Prüfung heraus. Besonders im 8. und 9. Schuljahr scheint mir auch für die Mathematik die 4. Stunde nötig zu sein, damit weder auf der geometrischen noch auf der arithmetischen Seite der Unterrichtserfolg in Frage gestellt wird. Mit den Mädchen muß im Unterricht, wenn sie festen Boden unter sich fühlen sollen, auch der Übungsstoff ganz besonders gründlich verarbeitet werden.

An den über das Lyzeum hinausführenden Bildungsanstalten ist die den mathematischen Unterricht betreffende Sachlage in den genannten Staaten ebenfalls keine ganz gleichartige. Betrachten wir zuerst die Verhältnisse an den sich vor Absolvierung der ganzen zehnklassigen höheren Mädchenschulen abzweigenden Studienanstalten, wie sie nach dem Gabelungssystem in Preußen, Sachsen, Bayern geschaffen worden sind, so fällt auf, daß in den Klassen der mittleren Lage in Preußen und Bayern eine Erhöhung der Stundenzahl für Mathematik vorliegt, so daß auch die Lehraufgaben für diese Klassen umfassender gestaltet werden können als für die ihnen der Alterslage nach entsprechenden Klassen der höheren Mädchenschule. Für Sachsen ergibt sich aus der tabellarischen Übersicht auf S. 122 und 123, daß die Kl. UIII der sechsklassigen Studienanstalt anscheinend ganz neu mit der Mathematik von unten auf be-

1) Vgl. hierzu u. a.: F. Möhle, Die vierte Rechenstunde, Frauenbildung, 10. Jahrg., 1911, S. 37ff. – Ferner: E. Meyer, Neue Vorschläge zur Umgestaltung des Rechenunterrichts an den höheren Mädchenschulen, Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Jahrg. XVII, 1911, S. 152ff.

ginnt, ohne die Kenntnisse der Kl. IV der höheren Mädchenschule vorauszusetzen. Es will mir scheinen, als ob das einen gewissen Zeitverlust bedeutet; und in der Tat bleibt denn auch die sechsklassige Studienanstalt in Sachsen trotz ihrer größeren Stundenzahl in den ersten 3 Jahren in deutlich sichtbarer Weise in manchen Punkten hinter dem Pensum der höheren Mädchenschulen zurück. Das hätte sich vermeiden lassen, wenn die Kl. UIII mit ihrem Lehrstoff an denjenigen der Kl. IV der höheren Mädchenschule angeschlossen hätte.

In den drei obersten Klassen haben die Studienanstalten mit realgymnasialem und oberrealschulartigem Charakter in allen drei Staaten gut ausreichende Stundenzahlen, die das Reifeziel in der Mathematik ohne Überstürzung zu erreichen ermöglichen. Auch die Zielhöhe ist im allgemeinen nach Grundsätzen, die Billigung verdienen, abgemessen. Doch möchte ich bei dieser Gelegenheit befürworten, daß man sich in manchen Dingen Bayern etwas mehr als Vorbild nehmen könnte. Nur dieser Staat hat bei der Abfassung seiner Lehrpläne für die Studienanstalten den modernen Bestrebungen, die auf Pflege des funktionalen Denkens und auf die Hereinnahme der Elemente der Infinitesimalrechnung abzielen, Rechnung getragen; die übrigen Staaten haben dafür in den Lehraufgaben der einzelnen Klassen keinen Ausdruck gefunden. Es kann aber wirklich weder den jungen Mädchen noch ihrer mathematischen Unterweisung schaden, wenn man modern verfährt und dafür lieber alte Zöpfchen (wie quadratische Gleichungen mit 2 Unbekannten) abschneidet.

Für die gymnasialen Formen der Studienanstalten liegen hinsichtlich des mathematischen Unterrichts die Dinge in den oben genannten Staaten nicht recht übereinstimmend. Preußen und Sachsen gehen an der gymnasialen Anstalt sowohl mit der Stundenzahl als auch mit dem Pensum herunter; Bayern dagegen macht keinen Unterschied in der mathematischen Ausbildung auf der realgymnasialen und gymnasialen Seite. Immerhin aber reichen auch die von den preußischen und sächsischen gymnasialen Studienanstalten vermittelten mathematischen Kenntnisse noch für die Hochschulreife.

Nicht verschieden von dem mathematischen Lehrziele der sechsklassigen Studienanstalt ist in Sachsen das für die dreiklassige Studienanstalt, den geradlinigen Aufbau, vorgeschriebene Lehrziel; auch die Stundenzahlen für beide Anstaltsformen sind in der Endsumme so gut wie gleich. Der Nachteil für den dreiklassigen Aufbau, daß die vor ihm liegenden höheren Mädchenschulklassen nur immer je drei wöchentliche Mathematikstunden aufweisen, wird durch die beiden Umstände ausgeglichen, daß erstens die sechsklassige Studienanstalt von der Klasse UIII an, wie schon erwähnt, mit einer zu ihren Ungunsten eingetretenen Phasenverschiebung im mathematischen Unterricht zu rechnen hat und daß zweitens im dreiklassigen Aufbau ein Unterrichtsbetrieb mit den Stundenzahlen der realgymnasialen sechsklassigen Studienanstalt einsetzt.

Man könnte an dieser Stelle in Versuchung geraten, zu erwägen, welcher Form der Studienanstalt man mehr das Wort reden soll, der Gabelung oder dem Aufbau. Letzten Endes ist das eine Frage, die nicht vom Standpunkte des Mathematikers allein beantwortet werden darf, sondern aus allgemeinen Gründen entschieden werden muß. Bedenklich will es mir vorkommen, daß bei den Mädchen, die eine abgegabelte Studienanstalt besuchen, die Entscheidung für den Eintritt in eine solche Anstalt zu einer Zeit erfolgt, wo man noch gar nicht beurteilen kann, ob denn wirklich solche geistigen Eigenschaften vorhanden sind, die die Ergreifung eines Studiums als möglich erscheinen lassen. Außerdem führt besonders an größeren Orten, wo solche abgegabelten Anstalten sich vorfinden, ihr Vorhandensein zu einer Abwanderung der tüchtigeren Schülerinnen aus dem Lyzeum, das dadurch leicht zu einer Anstalt geringerer Bewertung heruntersinken kann. Wie stimmt das mit der immer wieder unterstrichenen Anschauung, daß das Lyzeum die Schule sein soll, die die gebildete deutsche Frau absolviert haben soll? Die nach dem Gabelungssystem eingerichteten Studienanstalten verleiten vor der Zeit, wo eine solche Frage eigentlich erst spruchreif ist, die noch recht jugendlichen Mädchen in größerer Zahl zum Übertritt in eine Bahn, deren Beschreiten nur einer kleinen Minderzahl vorbehalten bleiben sollte. Ich meine, die Regel für alle gebildeten Frauen müßte es sein, daß sie alle erst einmal das zehnklassige Lyzeum durchgemacht haben. Wer sich dann nach Absolvierung dieser Schulzeit höheren Aufgaben geneigt und gewachsen fühlt, sollte die weitere Ausbildung in einem sich geradlinig an das Lyzeum anschließenden Aufbau finden. Der Einwand, dieses Verfahren empfehle sich des „Lateinischen" wegen nicht, wird von mir nicht ernst genommen. Viel mehr Gewicht lege ich dem Hinweise bei, daß es sich bei den in einen solchen „Aufbau" eintretenden jungen Damen meist um lauter Persönlichkeiten handeln wird, die mit ernstem Wollen ihren Pflichten nachgehen und die daher auch noch den Anforderungen des „Lateinischen" zu genügen verstehen werden.

Diese allgemeine Frage berührt aber, wie gesagt, uns Mathematiker nur mittelbar. Uns kommt es darauf an, daß die jungen Mädchen, die von einer weiterführenden Bildungsanstalt aus die Universität beziehen, um sich dem Studium der Mathematik oder verwandter Fächer zu widmen, mit solchen Vorkenntnissen auf die Hochschule kommen, daß sie fähig sind, den Fachvorlesungen mit Verständnis zu folgen.

Nun wird neuerdings von manchen Seiten, insbesondere von Direktoren von Oberlyzeen, anknüpfend an den Erlaß der preußischen Regierung vom 3. April 1909, dafür eingetreten, man solle grundsätzlich auch die Absolventinnen der höheren Lehrerinnenseminare, also der jetzigen Oberlyzeen, hinsichtlich des Rechtes auf den Universitätsbesuch an der philosophischen Fakultät den Abiturientinnen der Studien-

anstalten gleichstellen.[1]) Ohne daß ich mich auf die Frage einlasse, inwieweit diese Forderung bezüglich des Studiums der nichtmathematischen Fächer berechtigt sein könnte, wiederhole ich unter Hinweis auf meine früheren Ausführungen (vgl. S. 97), daß sich betreffs der Mathematik die Oberlyzealabsolventinnen in Preußen nicht auf der gleichen Höhe der Durchbildung befinden können, wie die Abiturientinnen der gymnasialen Kurse (mit denen allein man sie vergleichen darf). Die Schülerinnen der gymnasialen Kurse haben den nennenswerten Vorteil, daß sie gerade in den Jahren, wo es sich um die Legung der Grundlagen ihrer mathematischen Kenntnisse handelt, umfassender in den Stoff eingeführt werden. Im übrigen werden sie besonders auch in die analytische Geometrie und die Theorie der Kegelschnitte gründlicher eingeführt als die Schülerinnen des Oberlyzeums, was doch sehr wesentlich ist. Man kann doch nicht im Ernste behaupten wollen, daß die eine Stunde Mathematik in der Seminarklasse mit ihren Übungen in den Elementen der analytischen Geometrie dafür einen vollen Ersatz bietet. Diese Erwägung macht es mir unmöglich, Herrn Möhles Schlußfolgerungen, auf die ich früher schon hinwies, zu den meinigen zu machen. Erst dann würde ich mich in der Lage sehen, hinsichtlich der mathematischen Ausbildung die Schülerinnen des Oberlyzeums denjenigen der gymnasialen Kurse als gleichwertig und gleichberechtigt anzusehen, wenn die zur Zeit noch vorhandenen Differenzpunkte durch Revision und Ergänzung der Lehraufgaben des Lyzeums und Oberlyzeums ausgeglichen sind. So lange das nicht geschehen ist, müssen die mathematischen Fachkreise ein unmittelbares Interesse daran bekunden, daß Personen, also auch Damen, mit unzureichender Vorbildung zum Besuch der mathematischen Vorlesungen nicht ohne weiteres zugelassen werden.

Erschwerend wirken für die Damen, die auf Grund der Ausbildung am früheren höheren Lehrerinnenseminar oder am jetzigen Oberlyzeum das mathematische Studium ergreifen wollen, einige Momente, die zwar im Verlaufe meiner Darlegungen schon berührt wurden, aber doch wegen ihrer Bedeutung in diesen Schlußausführungen deutlich zur Sprache kommen müssen. Es werden noch mehrere Jahre vergehen, bis die Neuordnung am Oberlyzeum und der mathematische Betrieb am Lyzeum sich von den ihnen heute noch anhaftenden Unzulänglichkeiten befreit haben werden und bis von allen Absolventinnen des Oberlyzeums der vorgeschriebene normale Weg durch die Mathematik von Anfang bis zu Ende zurückgelegt wird. Wenn selbst bei diesem Optimum, das nach den heute in Preußen geltenden Bestimmungen als zunächst erreichbar angestrebt werden kann, die mathematische Ausbildung der Oberlyzealschülerinnen nicht das Vorhandensein der für die Hochschulreife notwendigen Kenntnisse gewährleistet, wie-

1) Vgl. hierzu u. a. die Ausführungen über das Thema: Studienanstalt oder höheres Lehrerinnenseminar? in der Frauenbildung, 10. Jahrg., 1911 von F. Möhle (S. 236), A. Steinmann (S. 237) und F. Möhle (S. 295).

viel mehr müssen sich dann die Bedenken gegen die Beschaffenheit der Vorbildung der Damen verstärken, die in das Mathematikstudium auf Grund der rückwirkenden Kraft des Erlasses vom 3. April 1909 eintreten. Daß Preußen sich dazu entschloß, dieser Verordnung rückwirkende Geltung zu verleihen, muß, von der Mathematik aus gesehen, entschieden als unzweckmäßig bezeichnet werden. Aber auch dadurch, daß vor dem Universitätsbesuch noch zwei Jahre praktischer Unterrichtstätigkeit liegen müssen, wird die Lage nicht gebessert. Ich kann ganz im Sinne meiner Ausführungen (auf S. 97) nur wiederholen: Mag während der zwei Jahre die Persönlichkeit reifen, die mathematische Vorbildung wird im Allgemeinen so unzureichend bleiben, wie sie war, und die Lern- und Aufnahmefähigkeit für die Zwecke der Mathematik wird dadurch gewiß nicht erhöht werden.

Wesentliche Lücken in der Vorbildung lassen sich oft auch während des Studiums nicht ausgleichen und beseitigen; deshalb kann leicht die Ausbildung derer leiden, die später selbst in die praktische Unterrichtstätigkeit an den höheren Mädchenbildungsanstalten eintreten wollen. Und damit natürlich auch der mathematische Unterricht selbst! Das aber muß verhindert werden; denn für die Erteilung des mathematischen Unterrichts an den Mädchenanstalten brauchen wir Kräfte, die über eine gute, in sich geschlossene mathematische Schulbildung und über eine gediegene Ausbildung für den Lehrberuf verfügen. Das ist eine ganz wesentliche Grundbedingung, die erfüllt sein muß, wenn an den Bildungsanstalten für die weibliche Jugend der mathematische Veredelungsprozeß, der durch die Neuordnungen der letzten Jahre eingeleitet worden ist, gelingen soll.

Namenverzeichnis.

